



**DELHI UNIVERSITY
LIBRARY**

DELHI UNIVERSITY LIBRARY

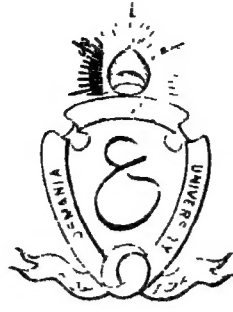
Cl. No. *B52* *168N36*

Ac. No. *21635*

189 Date of release for loan

This book should be returned on or before the date last stamped below. An overdue charge of 5 Paise will be collected for each day the book is kept overtime.

--	--	--	--



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

علم مثلث مستوی

تصنیف

ای۔ ڈبلیو۔ ہارسن۔ ایس۔ پی۔ ڈی۔ ایل۔ ایل۔ ڈی۔ ایف۔ آر۔ ایس

ترجمہ

محمد نذیر الدین ایم۔ اے (عثمانیہ)

رکن مرثیہ تالیف و ترجمہ جامعہ عثمانیہ سرکار عالی

۱۳۵۵ھ م ۱۳۳۵ھ ف ۱۹۱۶ء

طبع و نشر: دار الفکر، بیروت

۴۸۶
۹۶

فہرست مضامین

علم مثلث مستوی

پہلا باب

زاویہ مقداروں کی پیمائش

(۵۰)

صفحہ	مضمون	دفعات
۱	تہہید - کسی مقدار کے زاویہ کی تشکیل -	۱
۲	زاویوں کی عددی پیمائش -	۲ تا ۳
۴	زاویوں کی دائری پیمائش -	۴
۵	دائری قوس کا طول -	۵ تا ۱۰
۹	دائرہ کے قطاع کا رقبہ -	۱۱
۱۴	پہلے باب پر مثالیں -	۱۲
۱۵		

دوسرا باب

صفحہ

دفعات

مضمون خطوں کی پیمائش۔ ظل

- ۱۸ تا ۱۶ — خطوں کی پیمائش —
۱۷ — ظل —

تیسرے باب دائرۃ تفاعل

- ۲۲ تا ۲۱ — دائرۃ تفاعلوں کی تعریفات —
۲۲ تا ۲۱ — دائرۃ تفاعلوں کے درمیان رشتے —
۲۵ — دائرۃ تفاعلوں کی قیمتوں کے حدود —
۲۶ تا ۲۹ — دائرۃ تفاعلوں کے خواص —
۳۰ — دائرۃ تفاعلوں کی دوریت —
۳۱ — دائرۃ تفاعلوں کی علامت اور مقدار میں تبدیلیاں —
۳۲ — دائرۃ تفاعلوں کی ہندسی تعبیر —
۳۳ — وہ زاوئے جنکا دائرۃ تفاعل وہی ہے —
۳۴ — بعض زاویوں کے دائرۃ تفاعل کا تعین —
۳۵ تا ۳۸ — متغلوب دائرۃ تفاعل —
تیسرے باب پر مثالیں

چوتھے باب

دو یا دو سے زیادہ زاویوں کے دائرۃ تفاعل

- ۳۹ تا ۴۲ — جیب اور جیب التمام کے لیے جمع اور تفریق کے نتائج —
۵۳

صفحہ	مضمون	دفعات
۶۰	دو جیوب یا دو جیوب التمام کے مجموعہ یا فرق کے لیے ضابطے۔	۴۵ تا ۴۷
۶۶	مناس اور مناس التمام کے لیے جمع اور تفریق کے ضابطے۔	۴۶
۶۷	مختلف ضوابط۔	۴۷
۷۰	تین زاویوں کے لیے جمع کے ضابطے۔	۴۸
۷۱	زاویوں کی کسی تعداد کے لیے جمع کے ضابطے۔	۴۹
۷۰	جیوب یا جیوب التمام کے حاصل ضرب کو جیوب یا جیوب التمام کے حاصل جمع کے طور پر بیان کرنا۔	۵۰
۷۸	ضعفی زاویوں کے دائری تفاعلوں کے لیے ضوابط۔	۵۱
۷۸	جیب یا جیب التمام کی قوتوں کے لیے ضعفی زاویوں کی جیوب یا جیوب التمام کی رقوم میں چلے۔	۵۲
۸۰	مقلوب تفاعلوں کے درجہ ان رشتے۔	۵۳
۸۲	ضابطوں کے ہندسی ثبوت۔	۵۴
۸۳	چوتھے باب پر مثالیں۔	۵۷

پانچواں باب

تحت ضعفی زاویوں کے دائری تفاعل

۹۶	۵۵ تا ۶۳۔ ضوابط۔	۹۶
۹۶	دئے ہوئے زاوے کے ایک شلث کے دائری تفاعل۔	۹۶
۱۰۷	بعض زاویوں کے دائری تفاعلوں کی تعیین۔	۹۶ تا ۱۰۷
۱۱۱	پانچویں باب پر مثالیں۔	۱۱۱

صفحہ

مضمون

دفعات

چھٹا باب پنچ مختلف مسئلے

۱۲۳	۶۷ - تمہید -
۱۲۳	۶۸ - متماثلات اور استعمال -
۱۳۱	۶۹ - مساواتوں کا حل -
۱۳۵	۷۰ - اسقاط -
۱۳۷	۷۱ - مساواتوں کی اصولوں کے درمیان رشتے -
۱۴۱	۷۲ - اعظم اور اقل قیمتیں - لاتساویات -
۱۴۴	۷۳ - مساواتوں کے استنباطی نظام -
۱۴۷	۷۴ تا ۷۷ - سلسلوں کو جمع کرنا -
۱۵۴	چھٹے باب پر مثالیں -

ساتواں باب

ضعفی زاویوں کے تفاعلوں کو پھیلانا

۱۷۲	۷۸ تا ۷۹ - جیب یا جیب التمام کی نزولی قوتوں میں سلسلہ -
۱۷۵	۸۰ تا ۸۲ - جیب یا جیب التمام کی صعودی قوتوں میں سلسلہ -
۱۷۹	۸۳ - تخت ضعیفی زاویوں کے دائری تفاعل -
۱۸۱	۸۵ - مساواتوں کی اصولوں کے متشاکل تفاعل -
۱۸۷	۸۶ تا ۹۱ - اجزائے ضربی -

صفحہ

مضمون

دفعات

۱۹۶

ساتویں باب پر مثالیں۔

آٹھواں باب

ایک زاوے کے دائری تفاعل اور دائری ناپ کے درمیان رشتے

- ۲۰۲ - مسائل - ۹۵ تا ۹۷
 ۲۰۴ - ۹۶ - یولر کا حاصل ضرب۔
 ۲۱۱ - ۹۸ تا ۹۷ - بعض جملوں کی انتہائیں۔
 ۲۱۳ - ۹۹ - زاویہ کی جیب اور جیب التمام کے لیے سلسلے
 اس کے دائری ناپ کی قوتوں میں۔
 ۲۱۹ - ۱۰۰ - مثلثی اور جبری متاثرات کے درمیان ایک رشتہ
 آٹھویں باب پر مثالیں۔
 ۲۲۰

نواں باب

مثلثی جدولیں

- ۲۲۶ - ۱۰۱ - تمہید۔
 ۲۲۷ - ۱۰۲ تا ۱۰۵ - طبعی دائری تفاعلوں کی جدولیں محسوب کرنا۔
 ۲۳۳ - ۱۰۶ - عددی جدولوں کی تصدیق۔
 ۲۳۴ - ۱۰۷ - کاسوں اور قاطعوں کی جدولیں۔
 ۲۳۴ - ۱۰۸ - سلسلوں کے ذریعہ قیمتیں محسوب کرنا۔
 ۲۳۷ - ۱۰۹ - لوکارٹھی جدولیں۔

صفحہ	مضمون	وفیات
۲۳۷	مثلثی جدولوں کا بیان اور ان کا استعمال -	۱۱۰ تا ۱۱۱
۲۴۲	متناسب اجزاء کا اصول -	۱۱۲ تا ۱۱۳
۲۴۹	لوکارمی اعمال حساب کے لیے ضابطوں کو موزوں بنانا -	۱۱۵ تا ۱۱۷

دواں باب

مثلث کے ضلعوں اور زاویوں کے درمیان رشتے

۲۵۳	مسائل -	۱۱۸ تا ۱۲۲
۲۶۰	مثلث کا رقبہ -	۱۲۵
۲۶۱	مثلث کے ضلعوں اور زاویوں میں تئیرات -	۱۲۶
۲۶۲	کثیر الاضلاعوں کے زاویوں اور ضلعوں کے درمیان رشتے -	۱۲۷ تا ۱۲۸
۲۶۵	کثیر الاضلاع کا رقبہ	۱۲۹
۲۶۷	دسویں باب پر مثالیں -	

گیارہواں باب

مثلثوں کا حل

۲۷۴	تئیر -	۱۳۰
۲۷۴	قائم الزاویہ مثلثوں کا حل -	۱۳۱ تا ۱۳۲
۲۷۸	غیر قائم الزاویہ مثلثوں کا حل -	۱۳۲ تا ۱۳۴

صفحہ	مضمون	دفیات
۲۸۹	کثیر الاضلاعوں کا حل۔	۱۴۱ تا ۱۴۲
۲۹۳	بلندیاں اور فاصلے۔	۱۴۵ تا ۱۴۹
۳۰۰	گیارہویں باب پر مثالیں۔	

بارہواں باب

مثلثوں اور ذواربعۃ الاضلاعوں کے خواص

۳۱۳	تہیب۔	۱۵۰۔
۳۱۳	مثلث کا حارط دائرہ	۱۵۱۔
۳۱۴	مثلث کے اندرونی اور جانبی دائرے۔	۱۵۲ تا ۱۵۳
۳۲۱	خاموش وسطی۔	۱۵۵۔
۳۲۳	زاویوں کے ناصف	۱۵۶۔
۳۲۴	مثلث پائین۔	۱۵۷۔
۳۲۶	خاص نقطوں کے درمیان فاصلے۔	۱۵۸۔
۳۳۰	مثلث کے رقبہ کے لیے جملے۔	۱۵۹۔
۳۳۱	مثلثوں کے خواص۔	۱۶۰ تا ۱۶۳
۳۳۴	ذواربعۃ الاضلاعوں کے خواص۔	۱۶۴ تا ۱۶۷
۳۴۲	مختص کثیر الاضلاعوں کے خواص۔	۱۶۸۔
۳۴۳	مثالیں۔	۱۶۹۔
۳۵۰	بارہویں باب پر مثالیں	

تیرہواں باب

صفحہ	مضمون	دفعات
	ملقف اعداد	
۳۷۰	۱۷۰۔ تمہید۔	
۳۷۰	۱۷۱ تا ۱۷۴۔ ملقف اعداد کی ہندسی تعبیر۔	
۳۷۴	۱۷۵ تا ۱۷۷۔ ملقف عددوں کی جمع۔	
۳۷۷	۱۷۸۔ ملقف عددوں کی ضرب۔	
۳۷۹	۱۷۹۔ ایک ملقف عدد کو دوسرے سے تقسیم کرنا۔	
۳۸۱	۱۸۰ تا ۱۸۵۔ ملقف عددوں کی قوتیں۔	
۳۸۸	۱۸۶ تا ۱۸۷۔ ڈیموار کا مسئلہ۔	
۳۹۳	۱۸۸۔ اجزائے ضربی۔	
۳۹۶	۱۸۹۔ دائرہ کے خواص۔	
۳۹۸	۱۹۰۔ مثالیں۔	
۴۰۰	تیرہویں باب پر مثالیں۔	
	چودھواں باب	
	لامتناہی سلسلوں کا نظریہ	
۴۰۷	۱۹۱۔ تمہید۔	
۴۰۷	۱۹۲ تا ۱۹۶۔ حقیقی سلسلوں کا استدقاق۔	
۴۱۷	۱۹۷۔ ملقف سلسلوں کا استدقاق۔	
۴۲۰	۱۹۸۔ مسلسل تقابل۔	
۴۲۱	۱۹۹ تا ۲۰۱۔ یکساں استدقاق۔	
۴۲۸	۲۰۲۔ سلسلہ ہندسیہ۔	

صفحہ	مضمون	دفعات
۴۳۰	صعودی صحیح قوتوں کے سلسلے -	۲۰۳ تا ۲۰۴
۴۴۲	دو سلسلوں کے حاصل ضرب کا استدقاق -	۲۰۹
۴۴۴	دو ہرے سلسلوں کا استدقاق -	۲۱۰
۴۴۹	مسئلہ ثنائی -	۲۱۱ تا ۲۱۲
۴۵۸	ضعیفی زاویوں کے دائری تفاعل -	۲۱۳ تا ۲۱۴
	کسی زاویہ کے دائری ناپ کا پھیلاؤ اس کی جیب کی قوتوں میں -	۲۱۸ تا ۲۱۹
۴۶۹	جیبوں اور جیبوں التام کی قوتوں کو ضعیفی زاویوں کی جیبوں اور جیبوں التام میں بیان کرنا -	۲۲۰ تا ۲۲۲
۴۷۲		

پندرہواں باب

قوت ثنائی تفاعل - لوکارتم

۴۷۹	قوت ثنائی سلسلہ -	۲۲۳ تا ۲۲۴
۴۸۶	دائری تفاعلوں کے پھیلاؤ -	۲۲۸
۴۸۷	دائری تفاعلوں کی قوت ثنائی قیمتیں -	۲۲۹ تا ۲۳۰ (۱)
۴۹۲	قوت نما اور دائری تفاعلوں کی دوریت -	۲۳۱ تا ۲۳۲
۴۹۴	دائری تفاعلوں کی تحلیلی تعریف -	۲۳۳ تا ۲۳۴
۵۰۲	طبعی لوکارتم -	۲۳۸ تا ۲۳۹
۵۰۴	عام قوت نما تفاعل -	۲۴۰ تا ۲۴۱
۵۰۹	کسی اساس پر لوکارتم -	۲۴۵
۵۱۰	عام ترین لوکارتم -	۲۴۶ تا ۲۴۸
۵۱۳	لوکارتمی سلسلہ -	۲۴۹ تا ۲۵۰

صفحہ	مضمون	دفعات
۵۱۹	گرگوری کا سلسلہ -	۲۵۱
۵۲۱	دائرہ کی تربیع -	۲۵۱ (۱) تا ۲۵۱ (ج)
۵۳۰	دائرہ کی تقریبی تربیع -	۲۵۲ تا ۲۵۲
۵۳۳	مشائی مثالیں -	۲۵۵
۵۳۵	سلسلوں کا جمع کرنا -	۲۵۴ تا ۲۵۶
۵۴۰	پندرہویں باب پر مثالیں -	

سولہواں باب

زائدی تفاعلات

۵۵۳	تمہید -	۲۵۸
۵۵۳	زائدی تفاعلوں کے درمیان رشتے -	۲۵۹
۵۵۵	جمع کے ضابطے -	۲۶۱ تا ۲۶۰
۵۵۶	ضعفوں یا تحت ضعفوں کے لیے ضابطے -	۲۶۲
۵۵۶	زائدی تفاعلوں کے لیے سلسلے -	۲۶۵ تا ۲۶۳
۵۵۸	زائدی تفاعلوں کی دوریت -	۲۶۶
۵۵۹	قائم الزاویہ قطع زائد کے قطاع کا رقبہ -	۲۶۰ تا ۲۶۰
۵۶۶	ملف دلیلوں کے دائری تفاعلوں کے لیے جملے -	۲۶۱
۵۶۷	ملف دلیلوں کے مقلوب دائری تفاعل -	۲۶۴ تا ۲۶۴
۵۷۱	مقلوب زائدی تفاعل -	۲۶۴ تا ۲۶۵
۵۷۳	کعبی مساواتوں کا حل -	۲۷۷
۵۷۵	گڈر مینی تفاعل کی جدول -	۲۷۸
۵۷۷	سولہویں باب پر مثالیں -	

صفحہ

مضمون

دفعات

سترہواں باب

لامتناہی حاصل ضرب

- ۲۷۹ تا ۲۸۱۔ لامتناہی حاصل ضربوں کا استدقاق۔ ۵۸۰
- ۲۸۲ تا ۲۹۲۔ جیب اور جیب التمام کو لامتناہی حاصل ضربوں کے طور پر بیان کرنا۔ ۵۸۹
- ۲۹۲ (۱)۔ قوت نما تقاطع کو لامتناہی حاصل ضرب کے طور پر بیان کرنا۔ ۶۰۸
- ۲۹۳ تا ۲۹۵۔ مماس، مماس التمام، قاطع اور قاطع التمام کے لیے جملے۔ ۶۰۹
- ۲۹۶ تا ۲۹۹۔ دلیل کی قوتوں میں مماس، مماس التمام، قاطع، اور قاطع التمام کو بیان کرنا۔ ۶۱۷
- ۳۰۰۔ لوکارٹی جیب اور جیب التمام کے لیے جملے۔ ۶۲۷
- ۳۰۱۔ مثالیں۔ ۶۳۳
- سترہویں باب پر مثالیں۔ ۶۳۶

اٹھارواں باب

مسلسل کسیریں

- ۳۰۲ تا ۳۰۴۔ π کے غیر منطوق ہونے کا ثبوت۔ ۶۴۵
- ۳۰۴۔ دو علوی ہندسی سلسلوں کے خارج قسمت کا استحالہ۔ ۶۴۷
- ۳۰۵۔ پولر کا استحالہ۔ ۶۴۹
- اٹھارویں باب پر مثالیں۔ ۶۴۹
- متفرق مثالیں۔ ۶۵۱

علم مثلث مستوی

پہلا باب

زاوئی مقداروں کی پیمائش

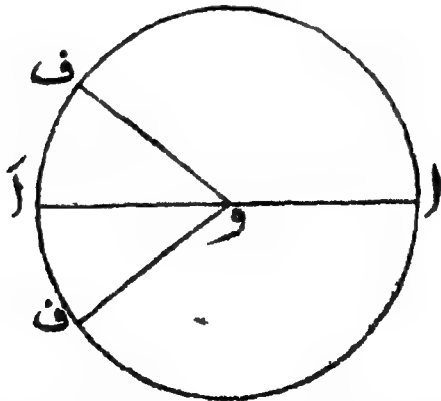
(۰۰۰)

۱۔ علم مثلث مستوی کا اولین مقصد، مستوی مثلثوں کو حل کر نیکاً طریقہ دریافت کرنا ہے۔ مستوی مثلث میں تین ضلع اور تین زاویے ہوتے ہیں اور اگر ان چھ اجزاء میں سے کسی تین کی مقدار میں دیجا میں اور ان دہیے ہوئے اجزاء میں سے کم از کم ایک ضلع ہو تو بعض شرطوں کے تحت باقی اجزاء کی مقداروں کی تعین کرنا ممکن ہے، اس کو مثلث کا حل کرنا کہتے ہیں۔ ہم دیکھینگے کہ علم مثلث مستوی کے اس اولین مقصد کو حاصل کرنے میں زاوئی مقدار کے بعض تقاضوں کو داخل کرنا ضروری ہوگا، یہ تفاعل دائری تفاعل کے نام سے موسوم کئے جاتے ہیں۔ اس طرح وسیع مفہوم میں علم مثلث مستوی میں ان دائری تفاعلوں کے حواس کی تحقیق اور تجلیلی اور ہندسی حقیقاتوں میں ان خواص کے اطلاقات بھی شامل ہیں جو مثلثوں کے حل سے تعلق نہیں رہتے۔

کسی مقدار کے زاویہ کی تکوین

۲۔ سر اقلیدسی ہندسہ میں جن زاویوں پر بحث ہوتی ہے وہ سب کے سب دو قائمہ زاویوں سے کم ہوتے ہیں، لیکن علم مثلث مستوی کے مقاصد کے لئے زاویہ مقدار کے تجزیہ کی توسیع کرنا ضروری ہے تاکہ تمام مثبت اور منفی مقداروں کے زاویے شامل ہو جائیں۔

فرض کرو کہ $و$ ایک ثابت خط مستقیم ہے اور ایک خط مستقیم $و ف$ جو ابتدا میں $و$ پر منطبق ہوتا ہے نقطہ $و$ کے گرد مخالف سمت ساعت گھومتا ہے، تب جیسے وہ گھومتا ہے زاویہ $و ف$ کی تکوین کرتا ہے اور جب $و ف$ محل $و$ پر پہنچتا ہے تو وہ دو قائمہ زاویوں کے مساوی ایک زاویہ کی تکوین کر چکنا ہے اور پھر اگر وہ اسی سمت میں گھومنا جاری رکھے تو وہ پھر آگے $و$ پر منطبق ہوتا ہے، اب وہ چار قائمہ زاویوں میں سے گھوم چکا ہوتا ہے؛ پھر ہم فرض کر سکتے ہیں کہ $و ف$ اسی سمت میں گھومنا جاری رکھتا ہے اور $و$ کے گرد متعدد مکمل چکر پورے کرتا ہے؛ ہر دفعہ جب وہ ایک مکمل گردش کر لیتا ہے تو وہ چار قائمہ زاویے مرتب کرتا ہے، اور اگر وہ کسی محل $و ف$ میں یکجائے تو وہ ایک ایسے زاویہ کی تکوین کر چکا ہوگا جو $و$ کے محل کے



مطابق کسی مطلق مقدار سے تعبیر ہو سکتا ہے لیکن یہ قرارداد اختیار کرینگے کہ زاویہ قسماً مثبت ہے جبکہ وف مخالف سمت ساعت گھومے اور منفی ہے جبکہ وف اسکی مخالف سمت میں یعنی سمت ساعت کے موافق گھومے۔ یہ قرارداد بالکل اختیاری ہے، اگر ہم چاہتے تو موافق سمت ساعت کو مثبت زاویے کے لئے لے سکتے تھے۔

اب ہماری قرارداد کی بموجب جب، وف، مخالف سمت ساعت ایک مکمل گردش کر لیتا ہے تو وہ چار مثبت قائمہ زاویوں میں سے گھوم جاتا ہے، اور جب وہ موافق سمت ساعت ایک مکمل گردش کر لیتا ہے تو وہ چار منفی قائمہ زاویوں میں سے گھوم جاتا ہے۔

کسی مقدار کے زاویہ کی تکوین مثال ذیل سے واضح ہو سکتی ہے:- اس زاویہ پر غور کرو جو گھڑی کی بڑی سوئی سے تکوین پاتا ہے۔ ہر گھنٹہ میں یہ سوئی چار قائمہ زاویوں میں سے گھوم جاتی ہے اور جتنی مرتبہ گھوم چکی ہے اس کا کوئی نشان نہیں چھوڑتی؛ لیکن یہ کام چھوٹی سوئی سے انجام پاتا ہے جو ایک گھنٹہ میں چار قائمہ زاویوں کا صرف بارہواں حصہ گھومتی ہے اور اس طرح بارہ گھنٹے سے کم کسی وقت میں وہ زاویہ ناپ سکتے ہیں جس میں سے بڑی سوئی گھوم چکی ہے۔ اب اس غرض کے لئے کہ بڑی سوئی سے تکوین یافتہ زاویے مثبت ہوں اور اس کا ابتدائی محل اوپر کی شکل کے محل کے مطابق ہو سکے ہمیں یہ فرض کرنا پڑے گا کہ سوئیاں اس سمت کے مخالف گھومتی ہیں جس میں کہ وہ فی الواقع گھوم رہی ہیں اور بارہ بجے کی بجائے تین بجے ایک دوسرے پر منطبق ہوتی ہیں۔

۳۔ فرض کر دو کہ گھومنے والے خط کا آخری محل (بموجب شکل) وف (3) ہے۔ وہ زاویہ جو اس نے محل و سے محل وف تک گھومنے میں مرتبہ کیا ہے بے شمار مثبت اور منفی زاویوں میں سے ایک ہو سکتا ہے بلحاظ ان مکمل گردشوں کی تعداد اور سمت کے جو گھومنے والے خط نے کئے ہیں۔ ایسے کسی دو زاویوں میں چار قائمہ زاویوں کے مثبت یا منفی ضعف کا فرق ہوگا۔ ہم ان تمام زاویوں کو جو خطوط و ا، وف سے محدود ہوتے ہیں ہم اختتامی زاویے کہیں گے اور انکو (و ا، وف)

سے تعبیر کریں گے، زاویوں (دراؤف) میں سے مقداراً چھوٹے سے چھوٹا زاویہ اقلیدسی زاویہ (دراؤف) ہے، اور باقی سب زاویے 'زاویے (دراؤف) کی جبری قیمت میں چار قائمہ زاویوں کے مثبت یا منفی ضعف جمع کرنے سے حاصل ہوتے ہیں۔

زاویوں کی عددی پیمائش

۴۔ یہ بتا دینے کے بعد کہ کسی مثبت یا منفی مقدار کے زاویہ سے کیا مراد ہے وہ سہرا کام زاویوں کی پیمائش سے متعلق ہے اور انکی عددی پیمائش کے لئے ایک نظام کا مقرر کرنا ضروری ہے۔ اس مقصد کے لئے ہمیں ایک اکائی زاویہ کا فیصلہ کر لینا چاہیے جو مستقل مقدار کا اختیاری طور پر منتخب کردہ کوئی زاویہ ہو سکتا ہے، تب باقی سب زاویوں کی پیمائش ان نسبتوں سے ہو سکتی ہے جو ان کو اس اکائی زاویہ کے ساتھ ہوں۔ ظاہر ہے کہ زاویہ قائمہ فطری اکائی ہے جو لیجا سکتی ہے لیکن چونکہ معمولی مقدار کے زاویے اس صورت میں ایک سے چھوٹی کسر دں سے تعبیر ہونگے اس لئے اس سے چھوٹے زاویہ کو اکائی مقرر کرنا زیادہ سہولت بخش ہے عام طور پر جو اکائی مستقل ہے وہ درجہ ہے جو زاویہ قائمہ کا نو دواں حصہ ہے۔ پھر درجہ کے کسرات سے بچنے کے لئے درجہ کو ساٹھ حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے جن کو دقیقہ کہتے ہیں اور نیز دقیقہ کو ساٹھ حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے جنکو ثانیہ کہتے ہیں۔ ایک ثانیہ سے کمتر زاویوں کو ثانیہ کے اعشاریہ کے طور پر بیان کیا جاتا ہے۔ ثالثہ جو ثانیہ کا ساٹھواں حصہ ہو سکتا ہے استعمال نہیں کیا جاتا۔ درجوں کے زاویہ کو ڈی سے تعبیر کیا جاتا ہے، م دقیقوں کے زاویہ کو م من سے اور ثانیوں کے زاویہ کو ن ن سے۔ اس طرح زاویہ ڈ م ن سے مراد وہ زاویہ ہے جس میں د درجہ + م دقیقے + ن ثانیے شامل ہیں اور وہ زاویہ قائمہ کے

$$\frac{د}{۹۰} + \frac{م}{۶۰ \times ۹۰} + \frac{ن}{۶۰ \times ۶۰ \times ۹۰} \text{ کے مساوی ہے۔}$$

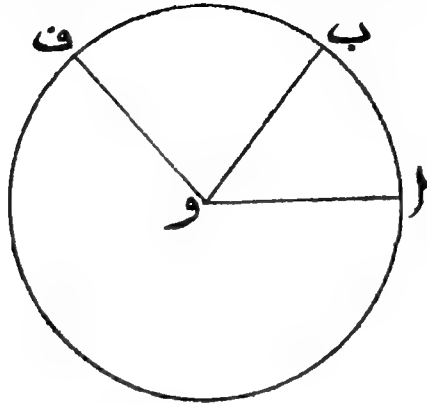
زاویوں کی عددی پیمائش کا یہ نظام ستینی نظام کہلاتا ہے۔ مثلاً
 زاویہ ۲۳° ۱۴' ۵۶.۴" کا زاویہ قائمہ کا $\frac{۲۳}{۹۰} + \frac{۱۴}{۶۰ \times ۹۰} + \frac{۵۶.۴}{۶۰ \times ۶۰ \times ۹۰}$ ہے۔

(۴) یہ تجویز پیش تھی کہ زاویوں کی پیمائش کا اعشاری نظام استعمال کیا جائے۔ اس نظام میں زاویہ قائمہ سو مرتبوں (Grades) میں تقسیم کیا جاتا ہے، مرتبہ سو دقیقوں میں اور دقیقہ سو ثانیوں میں، تب گ مرتبوں م دقیقوں اور ن ثانیوں کے زاویہ کو گ م ن لکھا جاتا ہے۔ مثلاً زاویہ ۳۱° ۲۹' ۴۰.۲۲" زاویہ قائمہ کے ۱۳۵۹۰.۲۲ کے مساوی ہے۔ لیکن یہ نظام کبھی بھی استعمال نہیں ہوا، خصوصاً اس وجہ سے کہ وقت کو طول بلد کے مرتبوں میں تبدیل کرنا ذرا تکلیف دہ ہے تاوقتیکہ دن کی تقسیم موجودہ صورت کے علاوہ کوئی اور نہ کی جائے۔ اگر مرتبوں کا نظام اختیار کیا جاتا تو دن ۲۴ گھنٹوں کی بجائے چالیس گھنٹوں میں تقسیم کیا جاسکتا تھا اور گھنٹہ ایک سو دقیقوں میں اور یہ امر وقت بیاؤں میں تغیر کرنے کو مستحکم ہوتا۔ وقت کے اس نظام کا ایک گھنٹہ طول بلد کے ۱۵ مرتبوں کے فرق کے متناظر ہے، جو کسری ہونے کی وجہ سے تکلیف دہ ہے۔

یہ ایک دلچسپ واقعہ ہے کہ بابلیوں (Babylonians) نے بھی چارٹائڈ زاویوں کی ۳۶۰ حصوں میں تقسیم کو استعمال کیا تھا۔ انھوں نے چار قائمہ کو اس تعداد میں کیوں تقسیم کیا اس بارے میں بہت قیاس آرائیاں کی گئی ہیں۔

زاویوں کی دائری پیمائش

۵۔ تمام خالص علمی مقاصد میں زاویوں کی عددی پیمائش کا ستینی نظام بالعموم استعمال کیا جاتا ہے لیکن نظری مقاصد کے لئے زاویہ کی ایک مختلف اکائی لینا زیادہ بہت بخش ہے کسی دائرہ میں جس کا مرکز و ہے فرض کرو کہ ا ب ایک قوس ہے جس کا طول



دائرے
کے نیم قطر
کے مساوی
ہے تو ہم
نہایت
کریں گے
کہ زاویہ
اوب

کی مقدار مستقل ہے اور کسی خاص دائرہ پر منحصر نہیں ہوا اس زاویہ کو نیم قطری یا دائری ناپ کی اکانی کہا جائے گا اور کسی دوسرے زاویہ کی مقدار کو اس نسبت سے بیان کیا جائے گا جو اس کو اکانی زاویہ کے ساتھ ہوا دیر یہ نسبت زاویہ کا دائری ناپ کہلائگی۔

۴۔ اب یہ ثابت کرنے کے لئے کہ نیم قطری ایک مستقل زاویہ ہے ہم حسب ذیل دو مسئلے مان لیں گے۔ (۵)

(۱) ایک ہی دائرہ میں مختلف قوسوں کے طول ایک دوسرے کے ساتھ وہی نسبت رکھتے ہیں جو ان کے محاذی مرکز پر بننے والے زاویوں میں ہوتی ہے۔

(ب) دائرے کے پورے محیط کا طول قطر کے ساتھ ایک ایسی نسبت رکھتا ہے جو سب دائروں کے لئے ایک ہی ہے۔

مسئلہ (۱) اقلیدس مقالہ ششم مسئلہ ۳۳ میں ہے اور مسئلہ (ب) کا ثبوت اس باب کے ختم پر دیا گیا ہے۔ (۱) سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$\frac{\text{قوس ا ب}}{\text{دائرہ کا محیط}} = \frac{\text{زاویہ ا ب}}{\text{تمام زاویہ}}$$

چونکہ قوس ا ب دائرہ کے نیم قطر کے مساوی ہے ان نسبتوں میں سے پہلی نسبت مسئلہ (ب) کی رو سے تمام دائروں کے لئے ایک

ہی ہے، اس لئے زاویہ \angle و ب مستقل مقدار کا ہے اور کسی خاص دائرہ

پر منحصر نہیں ہے۔

۷۔ آگے چل کر یہ بتایا جائے گا کہ دائرہ کے محیط اور اس کے قطر

میں جو نسبت ہوتی ہے وہ ایک غیر منطوق عدد ہے، یعنی ہم صحیح اعداد میں

اور ن معلوم نہیں کر سکتے ایسے کہ $\frac{1}{2}$ ٹھیک ٹھیک اس نسبت کے

مساوی ہو۔ ہم کسی آئینہ باب میں وہ مختلف طریقے بیان کریں گے

جو اس نسبت کی قیمت تقریبی طور پر محسوب کرنے میں استعمال ہوتے

ہیں۔ یہ نسبت بالعموم π سے تعبیر کی جاتی ہے۔ فی الحال یہ کہنا کافی ہے

کہ π صرف ایک غیر مختتم غیر متوالی اعشاریہ کی شکل میں حاصل کیا جاسکتا

ہے اور اس کی قیمت اعشاریہ کے بیس مقامات تک یہ ہے

۳۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳۲۳۸۴۶
اکثر تقریبی قیمت ۳۱۴۱۵۹ کا استعمال کرنا کافی ہوگا۔ نسبتیں

$\frac{22}{7} = 3.141592653589793$ ، $\frac{255}{113} = 2.270176640726758$ بھی π کی تقریبی قیمتوں

کے طور پر استعمال کی جاسکتی ہیں کیونکہ وہ علی الترتیب اعشاریہ کے دو اور چھ

مقامات تک π کی صحیح قیمت کے مطابق ہیں۔

۸۔ ہم بتا چکے ہیں کہ نیم قطری کو چار قائمہ زاویوں کے ساتھ وہی

نسبت ہے جو ایک دائرہ کے نصف قطر کو اس کے محیط کے ساتھ ہے

پس نیم قطری $\frac{r}{2} \times$ ایک زاویہ قائمہ کے مساوی ہے، اب چونکہ زاویہ

قائمہ 90° کا ہوتا ہے اس لئے π کی تقریبی قیمت ۳۱۴۱۵۹۲۶

استعمال کرنے سے، ہمیں نیم قطری کی تقریبی قیمت درجوں میں

۵۷۲۹۵۷۷۹۶۴ حاصل ہوتی ہے یعنی درجہ کے اعشاری حصہ کو

دقیقوں اور ثانیوں میں بیان کرنے سے 57.29577951308232 ۔

گلکشر (Glaisher) نے نیم قطری کی قیمت ثانیوں میں اعشاریہ

کے ۱۴ مقامات تک صحیح محسوب کی ہے۔ $\frac{1}{11}$ کی قیمت اعشاریہ کے ۱۴ مقامات تک حاصل کیجا چکی ہے۔

۹۔ زاویہ قائمہ کا دائری ناپ $\frac{1}{2}$ ہے، اور دو قائمہ زاویوں کا $\frac{1}{4}$ اور اب ہم درجوں میں دئے ہوئے کسی زاویہ کا دائری ناپ معلوم کر سکتے ہیں، اور اس کے برعکس نیم قطری میں دئے ہوئے کسی زاویہ کو درجوں میں بیان کر سکتے ہیں؛ اگر ایک زاویہ میں ۵ درجے ہوں اور

اس کا دائری ناپ طہ ہو تو $\frac{1}{11} = \frac{2}{180}$ کیونکہ ان میں سے ہر ایک نسبت اس نسبت کو ظاہر کرتی ہے جو دئے ہوئے زاویہ کو دو قائمہوں کے ساتھ ہے؛ پس ۵ درجوں کے زاویہ کا دائری ناپ $\frac{11}{180}$ ہے اور دائری ناپ طہ کے زاویہ میں درجوں کی تعداد $\frac{180}{11}$ طہ ہے، اگر زاویہ درجوں دقیقوں اور ثانیوں میں دیا جائے جیسے ۵۴° ۳۰' ۱۸" تو اس کا دائری ناپ یہ ہے

$$(د + م \setminus ۶۰ + ن \setminus ۳۶۰۰) \setminus ۱۸۰$$

ا کا دائری ناپ ۵۴° ۳۰' ۱۸" ہے، ا کا ۵۴۰۰۲۹۰۸۸۸۲... اور ا کا ۵۴۰۰۲۹۰۸۸۸۲...

۱۰۔ قوس الف کے محاذی دائرہ کے مرکز پر کے زاویہ الف

کا دائری ناپ

قوس الف

دائرہ کا نصف قطر

سے دیکھو گارٹلی جنرل جلد چہارم صفحہ ۱۸۱ On the calculation of the value of the theoretical unit angle to a great number of places.

۱۸ دیکھو Graner's Archiv جلد اول صفحہ ۱۸۱۔

عمل کرتے ہیں :- فرض کرو کہ قوس AB متعدد نقطوں A, P, Q, R, S, \dots, B پر تقسیم کی گئی ہے، اندرونی نابند کثیر ضلعی $APQR \dots$ اور AB پر غور کرو۔ اس کثیر ضلعی کے ضلعوں کے طولوں کے مجموعہ $AP + PQ + QR + RS + \dots +$

AB کی ایک محدود قیمت F ہے۔ پھر قوس AB کے اندر ایک نیا کثیر ضلعی $APQR \dots$ بناؤ جس میں N کن اور اس کثیر ضلعی کا بڑے سے بڑا ضلع کثیر ضلعی $APQR \dots$ B کے بڑے سے بڑے ضلع سے چھوٹا ہو، فرض کرو کہ اس نئے نابند کثیر ضلعی کے ضلعوں کا مجموعہ F ہے۔ اسی طرح قوس AB کی متواتر تقسیم در تقسیم جاری رکھنے سے ہمیں اندرونی نابند کثیر ضلعیوں کا ایک تواتر ملتا ہے جن کے ضلعوں کے طولوں کے مجموعے اعداد F, F, F, \dots F کے ایک تواتر سے تعبیر ہو سکتے ہیں اور یہ تواتر غیر محدود طور پر جاری رکھا جاسکتا ہے۔ اگر F کی ایک معین انتہا ہو جو قوس AB کی متواتر تقسیم در تقسیم کے طریقہ پر منحصر نہ ہو اور صرف اس شرط کے تحت ہو کہ F کے جواب میں نابند کثیر ضلعی کا بڑے سے بڑا ضلع لا انتہا چھوٹا ہو جائے جبکہ N لا انتہا بڑا ہو تو یہ کہا جاتا ہے کہ قوس AB کا طول L ہے۔ یہ دکھانے کے لئے کہ دائری قوس طول رکھتی ہے یہ دیکھنا ناگزیر رہی ہے کہ یہ انتہائی موجود ہے، اور اب ہم اسے ثابت کریں گے۔ تعریف سے یہ واضح ہے کہ اگر AB ج ایک قوس ہو اور AB, B, C کے طول معین ہوں تو ABC کا طول بھی معین ہوگا، اور AB, B, C کا طول قوسوں AB, B, C کے طولوں کا مجموعہ ہوگا۔ اس لئے ثابت کرنا کافی ہوگا کہ کوئی قوس جو نصف دائرہ سے کم ہے معین طول رکھتی ہے۔ اول ہم کثیر ضلعیوں کے اس مخصوص تواتر پر غور کرتے ہیں جس میں ہر کثیر ضلعی کے راس تواتر کے

باقی سب کثیر ضلعوں کے راس بھی ہیں۔ ان نابند کثیر الاضلاعوں کے طولوں کو
 $ف_۱، ف_۲، ...، ف_n$ سے تعبیر کر کے یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ
 $ف_۱ > ف_۲ > ف_۳ > ... > ف_n$

کیونکہ مبادئی علم ہندسہ سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ $ل_۱$ $ل_۲$ $ل_۳$... $ل_n$ طول ہیں $ل_۱$
 اور $ل_۲$ کو طمانے والے ایک نابند کثیر ضلعی کے ضلعوں کے مجموعہ سے کم ہے
 نیز اعداد $ف_۱، ف_۲، ...، ف_n$... سب کے سب ایک مستقل عدد سے کم
 ہیں۔ کیونکہ فرض کرو کہ قوس $ا ب$ کے سرور $ا ب$ پر $ماس ت ا$ ،
 $ت ب$ ہیں، $ت ب$ کے متوازی $ا ع$ ، ... $ل_n$ ۔ $ا ع$ ۔ $ا$ کھینچو اور نیز
 $ل_t$ کے متوازی $ل_۱$ ، $ل_۲$ ، $ل_۳$ ، ... $ل_n$ ۔ $ا$ کھینچو۔

$$ل_۱ > ا ع + ل_۲ > ا ع + ت ب$$

اور $ل_۲ > ا ع + ل_۳ + ل_۴ + ... + ل_n$ وغیرہ

$$ل_۱ + ل_۲ + ل_۳ + ... + ل_n > ا ع + ت ب$$

$$ف_n > ل_t + ت ب$$

اب انتہاؤں کے نظریہ کے ایک اساسی اصول کی بوجہ، چونکہ

عددوں $ف_۱، ف_۲، ...، ف_n$ کا تواتر ایسا ہے کہ ہر ایک اپنے بعد

والے عدد سے کم ہے اور نیز ان میں سے سب عدد ایک مستقل عدد سے
 کم ہیں اسلئے تواتر کی ایک انتہا ہے ایسی کہ اگر وہ ایک اختیار ہی
 مثبت عدد خواہ کتنا ہی چھوٹا ہو $ن$ کی ایک خاص قیمت $ن$ ایسی دریا
 ہو سکتی ہے کہ اس سے بڑی $ن$ کی تمام قیمتوں کے لئے $ف_n$ $ن$ سے

کہ ایک ہی دائرے کی مختلف قوسوں کے طو لوں میں وہی نسبت ہوتی ہے جو دائرہ پر ان قوسوں کے محاذی بننے والے زاویوں میں ہے۔ یہ ثابت کرنے کے لئے کہ دائروں کے محیط ایسے بدلتے ہیں جیسے ان کے قطر فرض کرو کہ وہ دائرے ہیں جن کے قطر اور قی ہیں اگر دو متشابه کثیر ضلعی ذن دائروں کے اندر بنائے جائیں تو متشابه مستقیم المثلثات اشکان کے خواص کی بنا پر یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ان کثیر ضلعی المثلثات کے گھیرے ایک دوسرے کے ساتھ وہی نسبت رکھتے ہیں جو قی اور قی میں ہے۔ اب دائروں کے محیط مراد رکھو ان انتہائیوں کے برابر سمجھا جاسکتا ہے جو کثیر المثلثات کے دو قوتروں کے گھیروں فن، فن کی ہیں جبکہ فن کے متناظر کثیر ضلعی فن کی ہر قیمت کے لئے، اس کثیر ضلعی کے متشابه ہو جو فن کے جواب میں ہے۔ اب

(10)

چونکہ فن : فن = ق : قی اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ فن کی انتہا کو فن کی انتہا کے ساتھ جو نسبت ہے وہ نسبت قی : قی کے مساوی ہے، اور اس لئے

$$\text{مراد} = ق : قی$$

دائرہ کے قطاع کا رقبہ

۱۳۔ فرض کرو کہ دائرہ کا مرکز وہ ہے۔ اس کی کسی قوس اب سے جو قطاع محدود ہوتا ہے اس کے رقبہ کی تعریف اس طرح کی ہوتی ہے کہ یہ مثلثوں $\Delta A_1 A_2$ ، $\Delta A_2 A_3$ ، ...، $\Delta A_n A_1$ اب کے رقبوں کے مجموعے کی انتہا ہے جبکہ کثیر ضلعی $\Delta A_1 A_2 A_3 \dots A_n$ اب کے ضلعوں کی تعداد لا انتہا بڑی ہو اور اس کا بڑے سے بڑا ضلع لا انتہا چھوٹا ہو جیسا کہ دفعہ (۱۱) میں بتایا جا چکا ہے۔ یہ ثابت کرنا لازم ہوگا کہ یہ انتہا موجود ہے اور ایک

معین عدد کے برابر ہے۔
 فرض کرو کہ وہ سے ضلعوں ۱۱ ، ۱۱ ، ۱۱ ، ... ۱۱ ۔ ۱۱ ب پر عمود کھینچے
 گئے ہیں اور ان کے طول $ق$ ، $ق$ ، $ق$ ، ... $ق$ ہیں، تب مثلثوں کے
 رقبوں کا مجموعہ ہے

$$\frac{1}{2} (ق \times ۱۱ + ق \times ۱۱ + ... + ق \times ۱۱) \text{ (ب)}$$

اور یہ مجموعہ، $\frac{1}{2} ق \times فن$ اور $\frac{1}{2} ق \times فن$ کے درمیان واقع ہوتا
 ہے جہاں $ق$ اور $ق$ عددوں $ق$ ، $ق$ ، $ق$ ، ... $ق$ میں سے علی الترتیب
 بڑے سے بڑے اور چھوٹے سے چھوٹے عدد ہیں اور $فن$
 کثیر ضلعی کے ضلعوں کا مجموعہ ہے۔ $فن$ کی انتہا موجود ہے کیونکہ
 یہ قوس ۱۱ کا طول ہے۔ نیز عددوں $ق$ ، $ق$ ، $ق$ کی ایک ہی انتہا ہے
 اور وہ دائرہ کا نصف قطر ہے، کیونکہ ان میں اور نصف قطر میں
 کثیر ضلعی کے بڑے سے بڑے ضلع کے نصف سے کم کا فرق ہے۔ پس
 قطاع کا رقبہ ایک محدود عدد ہے جو دائرہ کے نصف قطر اور قوس
 ۱۱ کے طول $ر$ کے نصف حاصل منسوب کے مساوی ہے، جہاں
 $ر$ ، زاویہ ۱۱ کا دائری ناپ ہے۔ اس طرح رقبہ ۱۱ =
 $\frac{1}{2} ر$ ۔ پورا دائرہ ایک قطاع خیال کیا جاسکتا ہے جس کو متعدد کمریوں
 قوس پورا محیط ہے، پس پورے دائرہ کا رقبہ $\frac{1}{2} ر$ ہے۔

باب اول پر مثالیں

۱۔ پیمائش کی اکائی کیا جونی چاہئے کہ اس کے لحاظ سے کسی زاویہ کا
 عددی ناپ اس فرق کے مساوی ہو سکے جو درجوں اور دائری ناپ
 میں بیان کرنے پر اس کے عددی ناپوں کے درمیان ہوتا ہے۔

۲۔ اگر ایک مثلث کے زاویوں کے ناپ، اکائیوں (۱، ۲، ۳) کے ... ۱۰ کے لحاظ سے ۱، ۲، ۳ کی نسبت میں ہوں تو زاوے معلوم کرو۔

۳۔ n ضلعوں والے ایک منتظم کثیر ضلعی کے ایک زاوے میں درجوں کی تعداد معلوم کرو

(۱) جبکہ وہ محذب ہو، (۲) جبکہ اس کا گھیر اندرونی دائرہ کو م مرتبہ احاطہ

کرے۔

۴۔ ایک مثلث کے دو زاوے 52° ، 53° ، 54° ، 55° ، 56° ہیں تیسرا زاویہ معلوم کرو۔

۵۔ ایک دائرہ کا نصف قطر ۴۰۰ میل ہے اس کی اس قوس کا طول اعشاریہ کے پانچ مقامات تک معلوم کرو جس کے محاذی دائرہ کے مرکز پر اس کا زاویہ بنتا ہے۔

۶۔ ایک زاوے کو مرتبوں اور درجوں میں ناپا گیا ہے اور معلوم ہوا کہ

ان کا فرق $\frac{2\pi}{3}$ زاوے کا دائری ناپ کے مساوی ہے۔ زاویہ معلوم کرو۔

۷۔ ایک مستوی چار ضلعی کے زاوے سلسلہ حسابیہ میں ہیں اور سب سے بڑے زاویے اور سب سے چھوٹے زاویہ کا فرق ایک زاویہ قائمہ ہے۔ ہر زاویہ کو درجوں میں ناپو اور نیز دائری ناپ میں۔

۸۔ دو مثلثوں میں سے ہر ایک کے زاوے سلسلہ ہندسیہ میں ہیں، ایک مثلث کا چھوٹے سے چھوٹا زاویہ دوسرے مثلث کے چھوٹے سے چھوٹے زاویہ کا تین گنا ہے اور ان کے بڑے سے بڑے زاویوں کا مجموعہ 240° ہے۔ زاویوں کا دائری ناپ معلوم کرو۔

۹۔ اگرہ فٹ قطر کے ایک دائرہ کی ۱۰ فٹ طول کی قوس $33^\circ 42'$ کا زاویہ مرکز بنائے تو 11 کی قیمت اعشاریہ کے چار مقامات تک معلوم کرو۔

۱۰۔ دو منتظم شکلیں معلوم کرو ایسی کہ ایک کے ایک زاوے کے درجوں کی تعداد کو دوسرے کے ایک زاوے کے درجوں کی تعداد سے دی

نسبت ہو جو ایک کے ضلعوں کی تعداد کو دوسرے کے ضلعوں کی تعداد سے ہے۔
 ۱۱۔ (ب ج) ایک مثلث ہے ایسا کہ جب اس کے ہر زاویہ کو یکے
 بعد دیگرے پیمائش کی اکائی قرار دیجاتی ہے اور دوسرے دو زاویوں کے مجموعہ
 کے ناپ معلوم کئے جاتے ہیں تو یہ ناپ سلسلہ حسابیہ میں ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ
 مثلث کے زاویے سلسلہ موسیقیہ میں ہیں۔ نیز ثابت کرو کہ ان میں سے صرف
 ایک زاویہ زاویہ قائمہ کے $\frac{1}{2}$ سے بڑا ہو سکتا ہے۔

۱۲۔ ثابت کرو کہ منظم کثیرالاضلاعوں کے گیارہ اور صرف گیارہ زوج ایسے
 ہیں کہ ہر زوج میں ایک کثیرالاضلاع کے ایک زاویہ کے درجوں کی تعداد دوسرے
 کے ایک زاویہ میں مرتبوں کی تعداد کے مساوی ہے۔ نیز یہ ثابت کرو کہ صرف
 چار زوج ایسے ہیں جن میں یہ زاویے صحیح عددوں سے بیان ہوتے ہیں۔

۱۳۔ سورج کا فاصلہ ہری زاوی کی قطر نصف درجہ ہے۔ یہ دیکھا گیا کہ ایک
 سیارہ اسکی قرص پر سے ایک خط مستقیم میں جو قرص کے مرکز سے اس کے نصف

قطر کے $\frac{3}{5}$ فاصلہ پر ہے سیدھا گزر جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ سیارہ کے
 راستہ کے اس محدود حصہ کا سورج پر جو ظل پڑتا ہے اس کے محاذی زمین
 پر $\frac{\pi}{50}$ کا زاویہ بنتا ہے۔

(12)

دوسرا باب

خطوں کی پیمائش

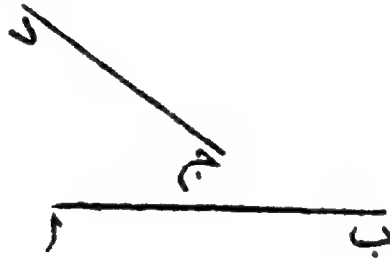
۱۳۔ اگر ایک دئے ہوئے خط مستقیم پر جسے دونوں جانب لاہتا طویل فرض کیا جاسکتا ہے ایک دیا ہوا طویل کسی مفروضہ نقطہ سے ناپنا مطلوب ہو تو یہ سوال پیدا ہوتا ہے کہ کس سمت میں یہ دیا ہوا طویل ناپا جائے۔ ابہام سے بچنے کے لئے ہم اس بات پر متفق ہوتے ہیں کہ خط مستقیم پر ایک سمت میں ناپے ہوئے طویل مثبت عدد سے تعبیر ہونگے اور اس کے اسکی مخالف سمت میں ناپے ہوئے طویل منفی عدد سے۔ پس کسی ایسے خط میں مثبت سمت کا مقرر کرنا ضروری ہے۔ شکل میں فرض کرو کہ



ہم اس بات پر متفق ہوتے ہیں کہ خطوط جو بائیں جانب سے سیدھی جانب ناپے جائیں مثبت ناپ رکھتے ہیں، پس طویل 'ا' ب کو مثبت شمار کیا جائیگا اور طویل 'ب' ا کو منفی یعنی 'ا' ب = - 'ب' ا۔ ۱۴۔ اگر خط مستقیم پر کوئی تیسرا نقطہ ج ہو تو 'ا' ب = 'ا' ج + 'ج' ب کیونکہ اگر ج (جیسا کہ شکل میں ہے) 'ب' سے پرے واقع ہو تو خط ج ب منفی ہے اور اسلئے اس کی عددی قیمت 'ا' ج کی قیمت میں سے

تفریق ہو جاتی ہے۔ اگر متعدد خطوط مستقیم ہوں جو ایک ایسے نقطہ کی حرکت سے تکوین پائیں جو ا سے نکلتا ہے اور اپنی حرکت ب پر ختم کرتا ہے تو ان خطوط مستقیم کے طولوں کا جبری مجموعہ 'ا ب' کے طول کے مساوی ہوگا۔

۱۵۔ جب خط مستقیم وف ابتدائی محل و ا سے گھوم کر وضع ۲ کی ہو جب ایک زاویہ کی تکوین کرتا ہے تو ہم یہ فرض کر لیں گے کہ اثنائے گردش میں خط مستقیم وف میں مثبت سمت نہیں بدلتی (18) اس طرح وہ زاویہ جو وف کے کسی محل میں رک جانے سے تکوین پاتا ہے حدودی خطوں کی دو مثبت سمتوں کا درمیانی زاویہ ہوتا ہے۔ پس یہ نتیجہ نکلتا ہے



کہ اگر دو خطوط مستقیم کی مثبت سمتیں 'ا ب'، 'ج د' ہوں تو 'ا ب' اور 'ج د' کا درمیانی زاویہ 'ا ب' اور 'ج د' کے درمیانی زاویے سے بقدر دو قائمہ زاویوں کے چھوٹا یا بڑا ہوگا، کیونکہ کوئی خط محل 'ا ب' سے گھومنے لگے تو اسکو 'ج' پر منطبق ہونے کے لئے جس زاویہ میں سے گھومنا ہوگا وہ اس زاویہ سے بقدر ۹۰ کے بڑا یا چھوٹا ہوگا جس میں سے اسکو 'ج د' پر منطبق ہونے کے لئے گھومنا پڑتا ہے۔

اگر ہم ان تمام ہم اختتامی زاویوں پر غور کریں جو 'ا ب' اور 'ج د' اور 'ا ب' اور 'ج د' سے علی الترتیب محدود ہیں تو ('ا ب'، 'ج د') = ('ا ب'، 'ج د') + ۹۰ جبکہ زاویے درجوں میں ناپے جائیں۔

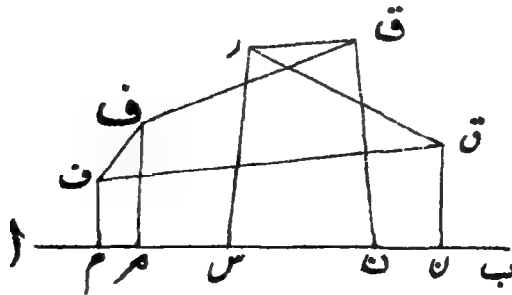
۱۶۔ جب کوئی خط مستقیم اپنے متوازی حرکت کرے تو ہم

فرض کریں گے کہ اس کی مثبت سمت نہیں بدلتی، اس طرح اگر اب ج د
غیر قاطع خطوط مستقیم ہوں تو ان کا درمیانی زاویہ، اب اور اس خط مستقیم
کے درمیانی زاویہ کے مساوی ہو گا جو ا سے ج د کے متوازی کھینچا
گیا ہے۔ عام ہندسی مقاصد کے لئے اب اور ج د کا درمیانی
زاویہ اب اور متوازی خط کے درمیان کا چھوٹے سے چھوٹا
زاویہ بلا لحاظ علامت لیا جاتا ہے۔

۱۷۔ اگر کسی خط مستقیم ف ق کے سروں ف، ق سے کسی
دوسرے خط مستقیم اب پر عمود ف م، ق ن کھینچے جائیں تو حصہ
م ن کو اس کی مناسب علامت کے ساتھ خط مستقیم اب پر خط مستقیم
ف ق کا ظل کہتے ہیں۔

یہ واضح رہے کہ ف ق اور اب کا ایک ہی مستوی میں ہونا ضروری
نہیں ہے۔ ف ق کا ظل ن م ہے اور اس لئے اس کی علامت
ف ق کے ظل کی علامت سے مختلف ہے۔

(14) اگر نقطوں ف اور ق کو کسی شکستہ خط سے ملایا جائے جیسے
ف ق ر ق تو اب پر ف، ق، ر ق کے ظلوں کا مجموعہ
اب پر ف ق کے ظل کے مساوی ہو گا۔ کیونکہ ظلوں کا مجموعہ
ہے م م + م ن + ن س + س ب اور یہ دفعہ ۱۲ کی بموجب م ن



کے مساوی ہے اس طرح یہیں غلوں کی یہ بنیادی خاصیت حاصل ہوتی ہے۔ کسی ثابت خط مستقیم پر، دو نقطوں ف و ر ق کو ملانے والے کسی شکستہ خط کے حصوں کے غلوں کا مجموعہ صرف ف اور ق کے محلوں پر منحصر ہوتا ہے اور ف، ق جس طریقہ سے ملائے گئے ہیں اُس پر منحصر نہیں ہوتا۔

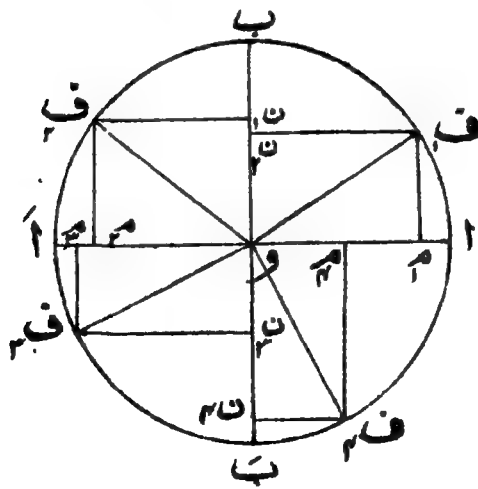
اس مسئلہ کی ایک مخصوص صورت حسب ذیل ہے: کسی خط مستقیم پر کسی بند کثیر الاضلاع کے ترتیب وار اضلاع کے ضلعوں کا مجموعہ صفر ہوتا ہے۔ شکل بالا میں اگر نقطے ف اور ق ایک دوسرے پر منطبق ہو جائیں تو ان کو ملانے والا شکستہ خط ایک بند کثیر الاضلاع ہو جاتا ہے، اور چونکہ ف ق کا غل صفر ہے کثیر الاضلاع کے ترتیب وار اضلاع کے غلوں کا مجموعہ صفر ہے۔ کثیر الاضلاع کا ایک مستوی میں ہونا ضروری نہیں ہے، اور نیز اس میں کئی متداخلہ زاوے ہو سکتے ہیں۔

(15)

تیسرا باب

دائرہ فی تفاعل۔ دائرہ فی تفاعل کی تعریف

۱۸۔ زاویہ اور خطی مقداروں کی پیمائش کا طریقہ بتا دینے کے بعد اب ہم دائرہ فی تفاعل یا مثلثی نسبتوں کی تعریف کر سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ $وف$ ابتدائی محل $و$ سے نکلتا ہے اور اس کی گردش سے کسی مقدار کے زاویہ $اوف$ کی تکوین دفعہ ۲ کی بموجب ہوتی ہے، زاویہ $اوف$ کی علامت سے متعلق ہماری قرارداد وہی ہے جو دفعہ ۲ میں بیان کی گئی ہے۔ فرض کرو کہ $ب$ و $ب'$ اور $ا$ پر نمودنکا لایا ہے۔ ہم فرض کرتے



ہیں کہ آواز اور ب و ب میں مثبت سمتیں علی الترتیب و سے ا کی طرف اور و سے ب کی طرف ہیں۔ نیز گھومنے والے خط کی مثبت سمت سے متعلق ہماری قرارداد وہی ہے جو دفعہ ۱۵ میں بیان کی گئی ہے۔

(16)

ابتدائی خط پر و ف کے ظل کو جو نسبت طول و ف سے ہے اُس کو زاویہ ا کی جیب التمام کہتے ہیں اور ا سے جم ا سے تعبیر کرتے ہیں۔

خط مستقیم و ب پر جو ابتدائی خط کے ساتھ 90° درجہ کا زاویہ بناتا ہے، و ف کے ظل کو جو نسبت طول و ف سے ہے اُس کو زاویہ ا کی جیب کہتے ہیں اور ا سے جب ا سے تعبیر کرتے ہیں۔ و ب پر و ف کے ظل کو جو نسبت و ا پر و ف کے ظل سے ہے اُس کو زاویہ ا کا ماس کہتے ہیں اور ا سے ماس ا سے تعبیر کرتے ہیں۔

و ا پر و ف کے ظل کو جو نسبت و ب پر و ف کے ظل سے ہے اُس کو زاویہ ا کا ماس التمام کہتے ہیں اور ا سے مم ا سے تعبیر کرتے ہیں۔

و ف کو جو نسبت و ا پر و ف کے ظل سے ہے اُس کو زاویہ ا کا قاطع کہتے ہیں اور ا سے قط ا سے تعبیر کرتے ہیں۔

وف کو جو نسبت وب پر وف کے ظل سے ہے اسکو
زاویہ اکا قاطع التام کہتے ہیں، اور اسے تم ا سے بغیر کرتے ہیں۔

پس

$$\text{جم ا} = \frac{\text{وم}}{\text{وف}}، \text{جب ا} = \frac{\text{ون}}{\text{وف}}، \text{مس ا} = \frac{\text{ون}}{\text{وم}}$$

$$\text{مم ا} = \frac{\text{وم}}{\text{ون}}، \text{قط ا} = \frac{\text{وف}}{\text{وم}}، \text{تم ا} = \frac{\text{وف}}{\text{ون}}$$

اگر نسبتوں کے تمام طول اپنی اپنی مناسب علامت کے ساتھ لئے
جائیں تو ہمیں معلوم ہوگا کہ ان میں وف کی علامت ہمیشہ مثبت رہتی ہے
لیکن وم اور ون میں سے ہر ایک کی علامت زاویہ ا کی مقدار کی بموجب
مثبت یا منفی ہے۔ یہ مشاہدہ طلب ہے کہ وف، ون کے مساوی ہے
اور اس کی علامت بھی وہی ہے جو ون کی ہے، اس طرح

$$\text{جب ا} = \frac{\text{مف}}{\text{وف}}، \text{مس ا} = \frac{\text{مف}}{\text{وم}}، \text{مم ا} = \frac{\text{وم}}{\text{مف}}، \text{تم ا} = \frac{\text{وف}}{\text{مف}}$$

شکل میں زاویہ ا کی چار مقداریں ہیں اوف، اوف، اوف، اوف،
اوف جو ف کے چار مقامات ف، ف، ف، ف کے متناظر ہیں۔

کسی مثبت یا منفی طول اب کا ظل ایک خط مستقیم ج د پر، اس طرح معلوم
کیا جاتا ہے کہ اب کو اسکی ٹھیک علامت کے ساتھ لیکر اسکو اس زاویہ کی جیب التام
مضبوب دیا جاتا ہے جو ان خطوں کی مثبت سمتوں کے درمیان ہے جن پر اب اور ج د
واقع ہیں۔ اس طرح ظل اپنی ٹھیک علامت کے ساتھ معلوم ہوتا ہے۔
یہ بات مشاہدہ طلب ہے کہ شکل بالا میں وف کی علامت جیسے وہ
ابتدائی محل و ا سے گھومتا ہے ہمیشہ مثبت رہتی ہے اور وف جب
و ا پر منطبق ہوتا ہے تو اس وقت اس کی علامت و ا کی علامت کے

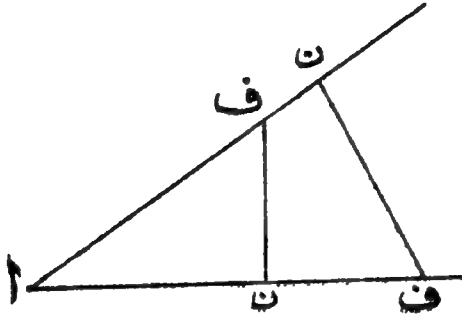
(17)

مخالف ہوتی ہے۔
۱۹۔ وہ چھ نسبتیں جن کی تعریف اوپر کی گئی ہے دائری تفاعل ہیں ان کو مثلثی نسبتیں یا مثلثی تفاعل بھی کہا جاتا ہے۔ ان میں سے ہر ایک صرف زاویہ \angle کی مقدار پر منحصر ہے اور \angle کے مطلق طول پر منحصر نہیں۔ یہ نتیجہ متشابہ مثلثوں کی اس خاصیت سے اخذ کیا گیا ہے کہ تمام متشابہ مثلثوں میں ضلعوں کی نسبتیں ایک ہی ہوتی ہیں، اس لئے جب \angle کا کوئی اور طول لیا جاتا ہے تو ہمیں اسی زاویہ کے لئے حسب سابق وہی نسبتیں حاصل ہوتی ہیں۔ پس یہ چھ نسبتیں صرف زاویہ مقدار کے تفاعل ہیں، ہم \angle کو ستینی نظام یا دائری ناپ سے پیمائش کر سکتے ہیں ہم بالعموم بڑے حروف 'ا'، 'ب'، 'ج'، ان زاویوں کے لئے استعمال کرینگے جن کی پیمائش درجوں، دقیقوں اور ثانیوں میں ہوئی ہو اور حروف 'ع'، 'ہ'، 'ط'، 'قہ' ایسے زاویوں کے لئے جن کی پیمائش دائری ناپ میں ہوئی ہو، اس طرح جب \angle سے اس زاویہ کی جیب مراد ہوگی جس کا ناپ درجوں، دقیقوں، ثانیوں میں \angle ہے اور جب \angle سے اس زاویہ کی جیب جس کا دائری ناپ \angle ہے۔ ان چھ دائری تفاعلوں میں دو اور شامل کئے جاسکتے ہیں جو بعض اوقات استعمال کئے جاتے ہیں، ایک 'سہم الجیب' ہے جبکہ 'سہہ' \angle لکھتے ہیں، دوسرا 'سہم التمام' ہے جس کو 'سہم' \angle لکھتے ہیں ان کی تعریف مساواتوں

$$\text{سہہ } \angle = 1 - \text{سہم } \angle \quad \text{سہم } \angle = 1 - \text{جب } \angle$$

سے کیجاتی ہے۔
 نظری تحقیقاتوں میں 'سہم الجیب' اور 'سہم التمام' شاذ و نادر ہی استعمال ہوتی ہیں۔ لیکن جہاز رانی میں جو ضابطے استعمال ہوتے ہیں ان میں 'سہم الجیب' اکثر واقع ہوتی ہے۔
۲۰۔ حادہ زاوے کی صورت میں دائری تفاعلوں کی تعریفیں

حسب ذیل شکل میں بیان کیجا سکتی ہیں :- فرض کرو کہ دئے ہوئے زاوے کو محدود کرنے والے خطوں میں سے کسی خط پر ف کوئی نقطہ ہے ،



ف سے دوسرے خط پر ف ن عمود کھینچو تو مثلث قائم الزاویہ ف ا ن حاصل ہوتا ہے جس کا زاویہ ف ا ن دیا ہوا زاویہ ا ہے۔ تب مثلثی نسبتوں کی حسب ذیل تعریف کی جاتی ہے :-

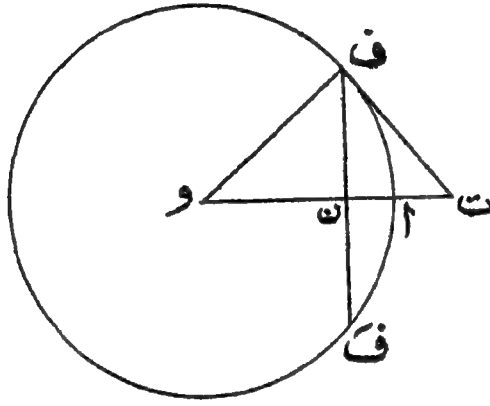
$$\text{جم } ا = \frac{ا \text{ سے متصل ضلع}}{\text{وتر}} ، \text{ جب } ا = \frac{ا \text{ کے مقابل کا ضلع}}{\text{وتر}}$$

$$\text{مس } ا = \frac{ا \text{ کے مقابل کا ضلع}}{ا \text{ سے متصل ضلع}} ، \text{ مم } ا = \frac{ا \text{ سے متصل ضلع}}{ا \text{ کے مقابل کا ضلع}}$$

$$\text{قط } ا = \frac{ا \text{ سے متصل ضلع}}{\text{وتر}} ، \text{ قم } ا = \frac{ا \text{ کے مقابل کا ضلع}}{\text{وتر}}$$

۲۱۔ حال حال تک دائری تقاعلوں کی تعریف نسبتوں کے ذریعہ سے نہیں بلکہ طولوں کے ذریعہ سے کیجانی تھی جو ایک خاص نصف قطر کے دائرہ کی قوسوں کے لحاظ سے لئے جاتے تھے۔ فرض کرو کہ دئے ہوئے دائرہ کی ایک قوس ف ا ہے ف ن و (ا پر عمود کھینچو) اور فرض کرو کہ ف پر کا ماس

فن ت ہے، خط فن کو ف کی جیب کہا جاتا تھا، ون کو اس کی جیب التمام،
فت کو اس کا ماس، وت کو اس کا قاطع، اور ان کو اس کی ہم الجیب
اس نظام میں جیب، جیب التمام، ماس، وغیرہ کی مقداریں نہ صرف زاویہ فن و ا



پر منحصر ہوتی تھیں بلکہ دائرہ کے نصف قطر پر بھی، جس کی تخصیص اس لئے ضروری تھی
ان تفاعلوں کی تعریف کا موجودہ طریقہ جس میں ان کو نسبتوں کے طور پر بیان کیا
جاتا ہے یہ فائدہ رکھتا ہے کہ یہ تفاعل کسی دائرہ کے نصف قطر پر منحصر نہیں ہوتے
اور اس لئے وہ صرف زاویہ کی مقدار کے تفاعل ہوتے ہیں۔ قوس کی جیب کو سب سے
اول عرب کے عالم ریاضی البطلونی نے استعمال کیا تھا (مشہور کتاب 'المعانی')، یونان
کے علماء ریاضی قوس فن کی جیب کے لئے فن کی بجائے دوہری قوس کے
وتر فن کو استعمال کیا کرتے تھے۔

دائری تفاعلوں کے درمیان رشتے

(۱۹)

۲۲۔ دائری تفاعلوں کی تعریفات سے ہمیں سب ذیل رشتے
نوراً مل جاتے ہیں:

$$(۱) \text{ جم } ۱ \text{ قاط } ۱ = ۱ \quad (۲) \text{ جب } ۱ \text{ قاط } ۱ = ۱$$

(۳) مس $1 = 1$ ، (۴) مس $1 = 1$ جب $1 = 1$: جم 1 ،

جم $1 = 1$: جب 1

رشتوں (۱) ، (۲) ، (۳) کو الفاظ میں یوں بیان کیا جاسکتا ہے کہ کسی زاویے کا قاطع ، قاطع التمام ، اور حماس التمام علی الترتیب اس زاویے کی جیب التمام ، جیب ، اور حماس کے شکافی ہیں۔ رشتہ (۴) اس واقعہ کا اظہار کرتا ہے کہ کسی زاویہ کا حماس وہ نسبت ہے جو اسکی جیب کو اس کی جیب التمام سے ہے اور رشتہ (۳) کو درجہ سے یہ کہنا ایسا ہی ہے کہ کسی زاویہ کا حماس التمام وہ نسبت ہے جو اس کی جیب التمام کو اس کی جیب سے ہے۔

۲۳۔ دفعہ ۱۸ کی شکل میں وہاں پر کا مربع ، قیثا غورث کے مسئلہ کی روئے ، اس کے ظل و مراورہ رف کے مربعوں کے مجموعہ کے مساوی ہے ، پس چونکہ نسبتیں $\frac{وم}{وف}$ اور $\frac{مر}{وف}$ علی الترتیب زاویہ 1 کی جیب التمام اور جیب ہیں اسلئے (جم 1) + (جب 1) = 1 ، جبکو بالعموم یوں لکھا جاتا ہے ،

جم 1 + جب 1 = 1 ،
اگر اس مساوات کی طرفین کو جم 1 پر تقسیم کیا جائے اور رشتوں (۱) اور (۴) کو یاد رکھا جائے تو $1 + مس 1 = 1$ ، قیثا 1 ، اسی طرح اگر مساوات کی طرفین کو جب 1 پر تقسیم کیا جائے اور رشتوں (۲) اور (۴) کو یاد رکھا جائے تو $1 + مم 1 = 1$ ، قیثا 1 ، اس طرح یہ تین متساویات

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{جم } 1 + \text{جب } 1 = 1 \\ 1 + \text{مس } 1 = \text{قط } 1 \\ 1 + \text{مم } 1 = \text{قط } 1 \end{array} \right. \dots \dots (۵)$$

دائری تقاطعوں کے درمیان ایک ہی رشتہ کی خلاف شکلیں ہیں۔

۲۴ — یہ پانچ غیر تابع رشتے جو چھ دائری تقاعلوں کے درمیان اوپر حاصل ہوئے ہیں ان کی مدد سے ہم ان چھ دائری تقاعلوں میں سے کسی پانچ تقاعلوں کو چھٹے تقاعلی کی رقوم میں بیان کر سکتے ہیں۔ طالب علم کو جدول ذیل کی صحت کی تصدیق خود کر لینی چاہئے جس میں اسے مراد وہ دائری تقاعلی ہے جو اس کے ستون کے سرے پر لکھا ہے اور جملوں کی قیمت ہر افقی خط کے شروع میں درج ہے۔

(20)	جب ۱ = لا	جم ۱ = لا	مس ۱ = لا	تم ۱ = لا	قط ۱ = لا	قم ۱ = لا
جب ۱ = لا	لا	$\sqrt{\frac{لا}{لا-۱}}$	$\sqrt{\frac{لا}{لا+۱}}$	$\frac{۱}{\sqrt{\frac{لا}{لا+۱}}}$	$\sqrt{\frac{۱-۲لا}{لا}}$	$\frac{۱}{لا}$
جم ۱ = لا	$\sqrt{\frac{لا}{لا-۱}}$	لا	$\frac{۱}{\sqrt{\frac{لا}{لا+۱}}}$	$\sqrt{\frac{لا}{لا+۱}}$	$\frac{۱}{لا}$	$\sqrt{\frac{۱-۲لا}{لا}}$
مس ۱ = لا	$\sqrt{\frac{لا}{لا-۱}}$	$\frac{لا}{\sqrt{\frac{لا}{لا-۱}}}$	لا	$\frac{۱}{لا}$	$\sqrt{\frac{۱-۲لا}{لا}}$	$\frac{۱}{\sqrt{\frac{لا}{لا-۱}}}$
تم ۱ = لا	$\sqrt{\frac{لا}{لا-۱}}$	$\frac{لا}{\sqrt{\frac{لا}{لا-۱}}}$	$\frac{۱}{لا}$	لا	$\sqrt{\frac{۱-۲لا}{لا}}$	$\frac{۱}{\sqrt{\frac{لا}{لا-۱}}}$
قط ۱ = لا	$\sqrt{\frac{۱-۲لا}{لا}}$	$\frac{۱}{\sqrt{\frac{لا}{لا-۱}}}$	$\frac{۱}{لا}$	$\sqrt{\frac{لا}{لا+۱}}$	لا	$\sqrt{\frac{لا}{لا-۱}}$
قم ۱ = لا	$\frac{۱}{لا}$	$\frac{۱}{\sqrt{\frac{لا}{لا-۱}}}$	$\frac{۱}{\sqrt{\frac{لا}{لا-۱}}}$	$\sqrt{\frac{لا}{لا+۱}}$	$\sqrt{\frac{لا}{لا-۱}}$	لا

اس جدول میں جذرالمربعوں کی علامتوں کے ابہام غیر متعین چھوڑ دئے گئے ہیں۔ اس جدول کی تصدیقیوں کی جاسکتی ہے :- فرض کرو کہ قط ۱ = لا دیا گیا ہے تو دفعہ ۲۲ کے رشتہ (۱) سے جم ۱ = $\frac{۱}{لا}$ رشتہ (۵) کی دوسری شکل سے مس ۱ = $\sqrt{\frac{لا}{لا-۱}}$ اور پھر رشتہ (۳) سے تم ۱ = $\frac{۱}{\sqrt{\frac{لا}{لا-۱}}}$

سہم الجیب جفت تفاعل ہے، لیکن سہم التمام نہ جفت ہے نہ طاق
۲۷۔ کسی زاوے کے دائرۃ تفاعلوں کی قیمتیں حدودی حدود

کے محل پر لحاظ دوسرے حدودی خط و ا کے منحصر ہوتی ہیں، اس لئے
تمام ہم اختتامی زاویوں (و ا، و ف) کے دائرۃ تفاعل وہی ہوتے
(22) ہیں جو زاویہ ا کے ہیں، یعنی یہ الفاظ دیگر تمام زاویوں $n \times 360^\circ + 1$
کے دائرۃ تفاعل وہی ہوتے ہیں جو ا کے ہیں جبکہ n کوئی نسبت
یا منفی صحیح عدد ہو۔ اگر عہ اس زاویہ کا دائرۃ ناپ ہو جس میں ا درجے
ہیں تو دائرۃ ناپ میں تمام زاویوں $n \times 360^\circ + 1$ عہ کے دائرۃ تفاعل
وہی ہیں جو زاویہ عہ کے ہیں نیز چونکہ زاویوں $n \times 360^\circ - 1$ عہ سب کے
سب ایک ہی دائرۃ تفاعل کہتے ہیں اس لئے

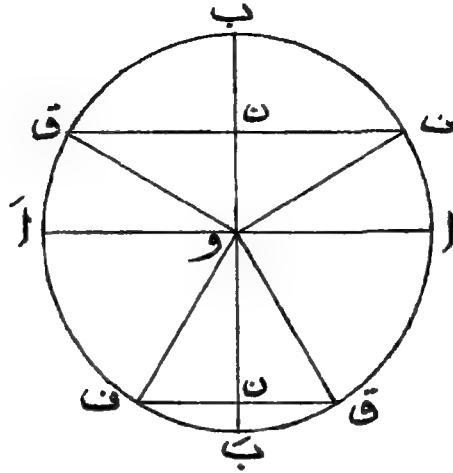
جب $(n \times 360^\circ - 1) =$ جب $(-1) =$ جب عہ

اور جم $(n \times 360^\circ - 1) =$ جم $(-1) =$ جم عہ
اوپر کی بحث میں جو خواص حاصل ہوئے ہیں وہ ذیل کی مساواتوں
میں شامل ہیں:-

جب $(n \times 360^\circ \pm 1) = \pm$ جب عہ
جم $(n \times 360^\circ \pm 1) =$ جم عہ

۲۸۔ اگر زاویہ $180^\circ - 1$ یا $360^\circ - 1$ عہ، وق سے محدود ہو تو

وق، و ا کے ساتھ وہی زاویہ بناتا ہے جو وق، و ا کے ساتھ
بناتا ہے اور ہم دیکھتے ہیں کہ و ا پر وق اور وق کے ظل مساوی
مگر علامت میں مختلف ہیں اور و ب پر وق اور وق کے ظل مساوی
اور ہم علامت ہیں اس لئے جب $(n \times 360^\circ - 1) =$ جب عہ



اور حجم $(۲۲ - ع) = -$ حجم ع، یہ مساواتیں درست رہتی ہیں خواہ ع کچھ ہی ہو
اس طرح ع کو - ع میں تبدیل کیا جاسکتا ہے اور ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{جب } (۲۲ + ع) = \text{جب } (- ع) = - \text{جب } (ع) ،$$

اور حجم $(۲۲ + ع) = -$ حجم $(- ع) = -$ حجم ع
پس مساواتوں کا یہ نظام

(23)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{جب } (۲۲ \pm ع) = \mp \text{جب } ع ، \\ \text{حجم } (۲۲ \pm ع) = - \text{حجم } ع \end{array} \right. \quad (۷)$$

حاصل ہوتا ہے اور ان سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$\text{مس } (۲۲ \pm ع) = \pm \text{مس } ع . \quad (۸)$$

$$\text{نیز } \left\{ \begin{array}{l} \text{جب } (۲۲ + ع) = \text{جب } (۲۲ \pm ع) = \mp \text{جب } ع \\ \text{حجم } (۲۲ + ع) = \text{حجم } (۲۲ \pm ع) = - \text{حجم } ع \\ \text{مس } (۲۲ + ع) = \text{مس } (۲۲ \pm ع) = \pm \text{مس } ع \end{array} \right. \quad (۹)$$

۲۹۔ دفعہ ۲۸ کی شکل میں وف جو زاویہ، وب کے ساتھ بناتا ہے وہ $90^\circ +$ اس لئے زاویہ $90^\circ + \frac{1}{p}\pi + \pi$ عہ کی جیب تمام وہ نسبت ہے جو وب پر وف کے ظل کو وف سے ہے، پس چونکہ وب پر کا ظل مختلف علامت کے ساتھ، وب پر کے ظل کے مساوی ہے اس لئے $\text{جم} (\frac{1}{p}\pi + \text{عہ}) = - \text{جب عہ}$ ، $\frac{1}{p}\pi + \pi + \text{عہ کو عہ میں تبدیل کرنے سے جم عہ} = - \text{جب} (\frac{1}{p}\pi - \text{عہ})$ پس (۶) کی رو سے

$$\text{جم عہ} = \text{جب} (\frac{1}{p}\pi - \text{عہ})$$

ان مساواتوں میں اگر جم چاہیں تو عہ کی علامت بدل سکتے ہیں کیونکہ عہ یا مثبت ہوگا یا منفی، پس ہمیں مساواتیں ملتی ہیں

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{جب} (\frac{1}{p}\pi \pm \text{عہ}) = \text{جم عہ} \\ \text{جم} (\frac{1}{p}\pi \pm \text{عہ}) = \mp \text{جب عہ} \\ \text{مس} (\frac{1}{p}\pi \pm \text{عہ}) = \mp \text{مم عہ} \end{array} \right. \dots \dots (10)$$

نیز (۶) اور (۹) کی رو سے

$$\text{جب} (\text{م} + \frac{1}{p}\pi \pm \text{عہ}) = (-1) \text{ جب} (\frac{1}{p}\pi \pm \text{عہ})$$

$$\text{جم} (\text{م} + \frac{1}{p}\pi \pm \text{عہ}) = (-1) \text{ جم} (\frac{1}{p}\pi \pm \text{عہ})$$

$$\text{مس} (\text{م} + \frac{1}{p}\pi \pm \text{عہ}) = \text{مس} (\frac{1}{p}\pi \pm \text{عہ})$$

اس لئے

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{جب} (\text{م} + \frac{1}{p}\pi \pm \text{عہ}) = (-1) \text{ جم عہ} \\ \text{جم} (\text{م} + \frac{1}{p}\pi \pm \text{عہ}) = (-1) \text{ جب عہ} \\ \text{مس} (\text{م} + \frac{1}{p}\pi \pm \text{عہ}) = \text{مم عہ} \end{array} \right. \dots \dots (11)$$

زاویہ ۲۲۔ عہ کو زاویہ عہ کا تکملہ کہتے ہیں اور زاویہ $\frac{1}{4}$ ۲۲۔ عہ کو زاویہ عہ کا متمم کہتے ہیں۔
ہم بتا چکے ہیں کہ کسی زاویہ کی جیب اس کے تکمیلی زاویہ کی جیب کے مساوی ہوتی ہے اور کسی زاویہ کی جیب تمام اس کے تکمیلی زاویہ کی جیب تمام کے مساوی مگر مختلف علامت کے ساتھ، نیز کسی زاویہ کی جیب اس کے متمم زاویہ کی جیب تمام کے مساوی ہوتی ہے اور کسی زاویہ کی جیب تمام اس کے متمم زاویہ کی جیب کے مساوی۔

(24) ضوابط (۶) تا (۱۱) کی مدد سے ہم کسی زاوے کے دائرۂ تفاعل معلوم کر سکتے ہیں جبکہ صفر اور $\frac{1}{4}$ ۲۲ کے درمیان اس زاویہ کے دائرۂ تفاعل کی قیمتیں معلوم ہوں جو دئے ہوئے زاویہ سے بقدر $\frac{1}{4}$ ۲۲ کے ضعف کے بڑایا چھوٹا ہو، یا ہم اس وقت بھی معلوم کر سکتے ہیں جبکہ دئے ہوئے زاوے کے متمم زاوے کے دائرۂ تفاعل معلوم ہوں۔

دائرۂ تفاعل کی دوریت

۳۳۔ جب متغیر لا کے تفاعل (لا) کی یہ خاصیت ہو کہ لا کی ہر قیمت کے لئے

$$f(لا) = f(لا + ک)$$

جہاں ک مستقل ہے تو تفاعل (لا) کو دوری تفاعل کہتے ہیں، نیز اگر ک وہ چھوٹے سے چھوٹا مستقل ہو جسکے لئے یہ تفاعل یہ خاصیت رکھتا ہے تو ک کو تفاعل کا دور کہتے ہیں۔

اب یہ فوراً مستنبط ہوتا ہے کہ اگر $f = (l + k)$ تو f (لا + ک) تو f (لا + ن ک) جہاں n کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔ اگر لاکہ n تمام قیمتوں کے لئے جو لاکہ دو قیمتوں کے درمیان (جن کا فرق ک ہے) واقع ہیں تفاعل کی قیمتیں دی گئی ہوں تو لاکہ باقی سب قیمتوں کے لئے تفاعل کی قیمتیں معلوم ہو جاتی ہیں، تفاعل کی یہ قیمتیں فی الحقیقت ان قیمتوں کی صرف تکرار ہونگی جو مذکورہ وقفہ میں دی گئی ہیں۔

جب n اور k کی خاصیت (۶) سے واضح ہے کہ یہ تفاعل n کے دوری تفاعل ہیں، اور ان کا دور ۲۲ ہے، یا اگر زاویہ کی پیمائش درجوں میں ہو تو جب l اور k کے دوری تفاعل ہیں اور n ۔
۳۶۰ ہے۔ خاصیت (۷) سے یہ امر واضح ہے کہ یہ تفاعل ایسے ہیں کہ ان کی قیمتیں زاویہ کی ان قیمتوں کے لئے جن میں نصف مکمل دور کا فرق ہے مساوی ہیں مگر علامت میں مختلف۔ خاصیت (۸) سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ n ماس دوری تفاعل ہے اس کا مکمل دور n ہے جو جب اور جب تمام کے دور کا نصف ہے۔ ظاہر ہے کہ قاطع یا قاطع تمام کا دور ۲۲ ہے اور ماس تمام کا ۲۲۔ آئندہ چل کر یہ معلوم ہو گا کہ دائری تفاعلوں کی اہمیت علم ثلث کے نظریہ میں صرف ان کی اس خاصیت دوریت کی وجہ سے ہے۔

دائرہ قوسوں کی علامت اور مقدار میں تبدیلیاں

۳۱۔ اب ہم کسی زاویہ کے دائری تفاعلوں کی علامت اور مقدار میں جو تبدیلیاں وقوع پذیر ہوتی ہیں جبکہ زاویہ صفر سے چار قوسہ زاویوں تک بڑھتا ہے ان کو معلوم کریں گے۔

(۱) کسی زاویہ کی جیب کی قیمت میں جو تبدیلیاں وقوع پذیر ہوتی ہیں ان کو معلوم کرنے کے لئے ہمیں دو (۱۸) کی شکل میں n کی مقدار اور علامت کی تبدیلیوں کا مشاہدہ کرنا چاہیے۔ جب زاویہ l

صفر ہوتا ہے تو ون صفر ہوتا ہے اور جیسے ل، ۹۰ تک بڑھتا ہے ون مثبت رہتا ہے اور بڑھتا ہے تاکہ ل = ۹۰ اور اس صورت میں ون، وقت کے مساوی ہوتا ہے، اس لئے جب ل مثبت ہے اور صفر سے ایک تک بڑھتا ہے۔ پھر جیسے ل، ۹۰ سے ۱۸۰ تک بڑھتا ہے ون مثبت رہتا ہے اور گھٹتا ہے یہاں تک کہ ل، ۱۸۰ کے مساوی ہوتا ہے تو وہ پھر صفر ہو جاتا ہے اس لئے جب ل مثبت ہے اور ایک سے صفر تک گھٹتا ہے۔ پھر جیسے ل، ۱۸۰ سے ۲۷۰ تک بڑھتا ہے تو ون منفی ہوتا ہے اور عدد بڑھتا ہے یہاں تک کہ اگر ل، ۲۷۰ ہو تو ون = - وقت، اس لئے جب ل منفی ہے اور صفر سے - ایک بدلتا ہے۔ نیز جیسے ل، ۲۷۰ سے ۳۶۰ تک بڑھتا ہے تو ون منفی ہوتا ہے اور عدد گھٹتا ہے یہاں تک کہ اگر ل، ۳۶۰ ہو تو وہ پھر صفر ہو جاتا ہے اس طرح جب ل منفی ہے اور - اسے صفر تک بدلتا ہے۔

(۲) جیب تمام کی صورت میں ہمیں ظل و ہر کی علامت اور مقدار کی تبدیلیوں کا مشاہدہ کرنا چاہیے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ جیسے ل، صفر سے ۹۰ تک بڑھتا ہے جم ل مثبت رہتا ہے اور ایک سے صفر تک گھٹتا ہے جیسے ل، ۹۰ سے ۱۸۰ تک بڑھتا ہے جم ل منفی رہتا ہے اور صفر سے - ایک تبدیل ہوتا ہے، جیسے ل، ۱۸۰ سے ۲۷۰ تک بڑھتا ہے جم ل منفی رہتا ہے اور - اسے صفر تک تبدیل ہوتا ہے، اور جیسے ل، ۲۷۰ سے ۳۶۰ تک بڑھتا ہے جم ل مثبت رہتا ہے اور صفر سے ایک تک بڑھتا ہے۔

(۳) کسی زاویہ کے محاس کی تبدیلیوں کو معلوم کرتے کے لئے

ہمیں نسبت $\frac{\text{ون}}{\text{وہ}}$ پر غور کرنا چاہیے، جب یہ زاویہ صفر ہوتا ہے تو یہ نسبت

صفر ہوتی ہے اور جیسے یہ زاویہ صفر سے ۹۰ تک بڑھتا ہے یہ نسبت مثبت رہتی ہے اور بڑھتی ہے، جب یہ زاویہ ۹۰ کا ہوتا ہے تو ظل وہ صفر ہے اور ون اکائی کے مساوی ہے، پس مس ۹۰ = ۱۰۰، پھر جیسے

د. ۹۰ سے ۱۸۰ تک بڑھتا ہے ماس منفی رہتا ہے اور ∞ سے صفر تک بدلتا ہے، جیسے د. ۱۸۰ سے ۲۷۰ تک بڑھتا ہے ماس مثبت رہتا ہے کیونکہ ون اور وھر دونوں منفی ہیں اور وہ بڑھتا ہے حتیٰ کہ وہ لاتنا ہی ہو جاتا ہے جبکہ د. = ۲۷۰، جیسے د. ۲۷۰ سے ۳۶۰ تک بڑھتا ہے ماس منفی رہتا ہے اور ∞ سے صفر تک تبدیل ہوتا ہے۔ یہ مشاہدہ طلب ہے کہ ماس د. اوقت ۹۰ میں سے گزرتے وقت $\infty +$ سے ∞ تک تبدیل ہوتا ہے اور ۲۷۰ میں سے گزرتے وقت ∞ سے $\infty +$ تک بدلتا ہے، اس کی توضیح کے لئے صرف یہ بتا دینا ضروری ہے کہ اگر کوئی متغیر لا، صفر میں سے گزرتے وقت اپنی علامت بدلے تو اس کا مشکافی $\frac{1}{\infty}$ ، ∞ میں سے گزرتے وقت اپنی علامت بدلتا ہے۔

(۴) اب چونکہ قاطع التمام، قاطع اور ماس، التمام علی الترتیب جیب، جیب التمام اور ماس کے مشکافی تفاعل ہیں اس لئے ان کی قیمتوں کی تبدیلیاں اوپر سے اخذ کیا سکتی ہیں۔ ان کی قیمتیں د. = ۹۰، ۱۸۰، ۲۷۰، ۳۶۰ کے لئے حسب ذیل جدول میں دی گئی ہیں جس میں وہ نتیجے بھی شامل ہیں جو جیب، جیب التمام، اور ماس کے لئے اوپر حاصل ہو چکے ہیں۔ (28)

	۰	۹۰ تا ۹۰	۹۰	۹۰ تا ۱۸۰	۱۸۰	۱۸۰ تا ۲۷۰	۲۷۰	۲۷۰ تا ۳۶۰	۳۶۰
جیب	۰	+	۱	+	۰	+	-	-	۰
جیب التمام	۱	+	۰	-	-	۱	۰	+	۰
ماس	۰	+	$\infty \pm$	-	۰	-	$\infty \pm$	+	-
ماس التمام	$\infty \mp$	+	۰	-	$\infty \mp$	+	۰	-	$\infty \mp$
قطب	۱	+	$\infty \pm$	-	-	۱	-	$\infty \mp$	۰
قطب التمام	$\infty \mp$	+	۱	+	$\infty \pm$	-	-	۱	$\infty \mp$

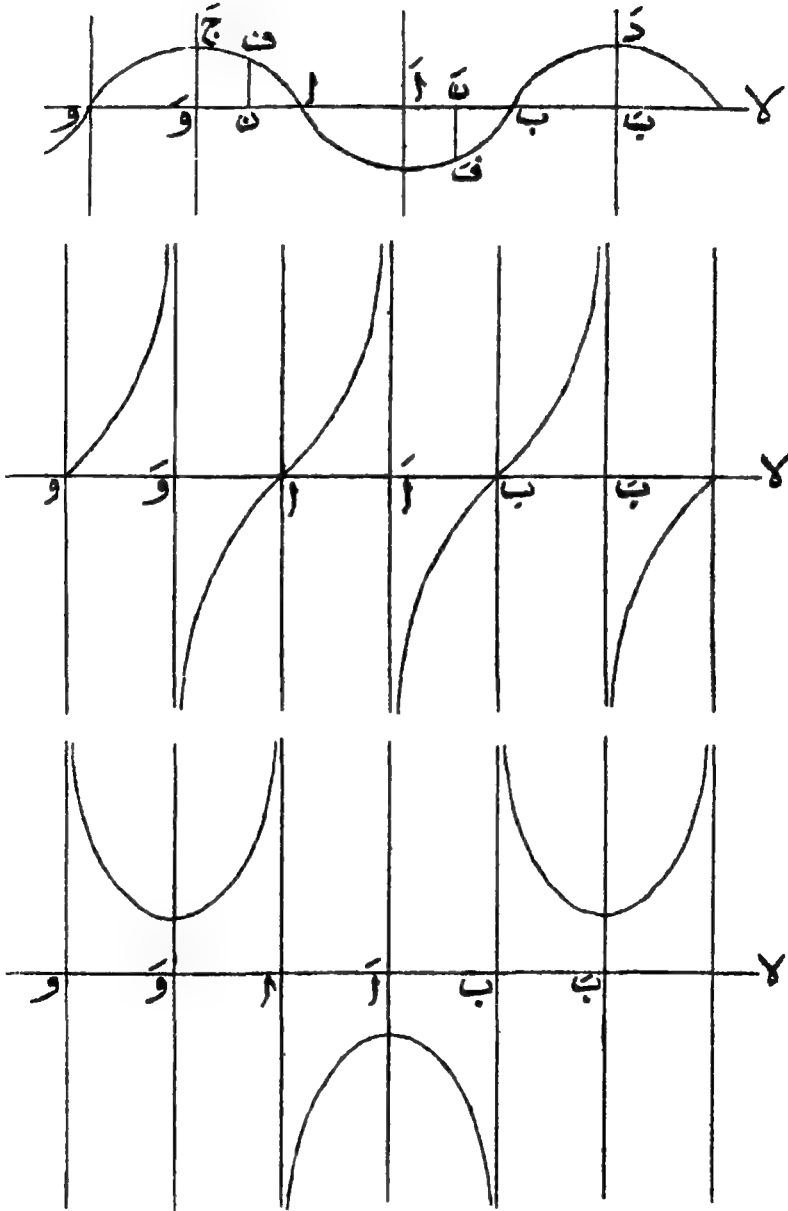
دائری تفاعلوں کی ہندی تعبیر

۳۲۔ دائری تفاعلوں کی قیمت کی تبدیلیوں کی ہندی تعبیر حاصل کرنے کے لئے ہم یہ فرض کریں گے کہ کسی زاویہ کا دائری تفاعل، ایک ثابت خط مستقیم پر ایک ثابت نقطہ سے کسی مستقل پیمانہ کی ہر دو طول لائیں سے تعبیر ہوتا ہے، اور تفاعل کی عددی قیمت اس متناظر معین کے طول سے تعبیر ہوتی ہے جو دئے ہوئے خط مستقیم پر طول لا کے سرے میں سے عمود وار چھینچا گیا ہے، تب اس معین کے سرے سے جو منحنی مرتبہ ہوتا ہے وہ دائری تفاعل کی ترتیب کو تعبیر کریگا۔

اگلے صفحہ پر تین شکلیں ہیں جن میں سے پہلی شکل میں جب لا اور جم لا کی ترتیبیں دکھائی گئی ہیں۔ اگر وہ مبداءوں جہاں سے طول لانا ثابت خط مستقیم ولا پر لایا گیا ہے اور $۱ = \pi$ ، $\text{دب} = \frac{\pi}{2}$ ، $\text{و} = \frac{1}{4}\pi$ ، $\text{و ج} = \frac{1}{4}\pi$ تو منحنی و ف ا ف ب ایسا ہے کہ اس کا کوئی معین، جب لا کی اس قیمت کو تقریباً تعبیر کرتا ہے جو صفر اور $\frac{\pi}{2}$ کے درمیان لا کی کسی ایک قیمت کے جواب میں ہے۔ اگر وہ مبداء لائے اور $\text{دب} = \frac{\pi}{2}$ تو منحنی ج ف ا ف ب جم لا کی قیمت کو تعبیر کرتا ہے لا کی ان قیمتوں کے جواب میں جو صفر اور $\frac{\pi}{2}$ کے درمیان ہیں، یہ نتیجہ رشتہ $\text{جم لا} = \text{ج ب} (\frac{1}{4}\pi + \pi)$ سے حاصل ہوا ہے۔ دب کے آگے منحنی

و ف ا ف ب مبداء کے ہر دو جانب، لانا تھا مرتبہ تکرار پائے گا۔ اسی طرح دوسری شکل میں مس لا اور مم لا کی ترتیبیں دکھائی گئی ہیں، وہ مبداءے مس لا کے لئے اور وہ مبداءے مم لا کے لئے، و ا ف ب میں سے گزرنے والے معین منحنی کے متقارب ہیں، ان نقطوں پر تفاعل لانا ہی قیمت میں سے گزرتے وقت علامت بدلتے ہیں۔ تیسری شکل میں قسط لا اور مم لا کی ترتیبیں دی گئی ہیں، وہ مبداءے مم لا کے لئے اور وہ مبداءے

قطر کے لئے، د، ا، ب میں سے گزرنے والے معین اس منحنی کے متقارب ہیں۔

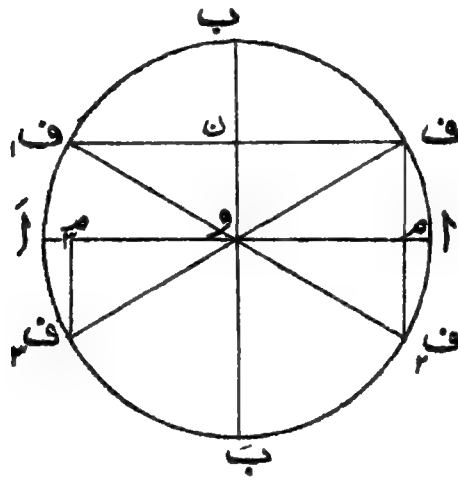


(28)

مثال :- حسب ذیل تفاعلوں کی ترسیمات کھینچو۔

- (۱) جب لا + جسم لا
(۲) جسم (۳) جب لا + جسم (۴) جسم لا
(۳) مس لا + قط لا
(۴) جسم (۵) جب لا - ۲ جسم لا
(۶) جسم (۳) جب لا + ۱/۲ جسم لا

وہ زاوے جن کا دائرہ تفاعل وہی ہے
۳۳۔ اب ہم ان تمام زاویوں کے لئے جملے معلوم کریں گے جن کے
ایک دائرہ تفاعل کی قیمت ان سب زاویوں کے لئے ایک ہی ہے۔



(۱) اگر شکل میں دیا ہوا زاویہ اوف ہو اور ف ف، و ا کے متوازی
کھینچا جائے تو زاوے (و ا، و ف) اور (و ا، و ف) ہی صرت وہ زاویے
ہیں جن کی جیب وہی ہے جو زاویہ اوف کی ہے، کیونکہ صرف یہی
وہ زاویے ہیں جن کے لئے و ب پر نصف قطر کا ظل و ن کے
مساوی ہے، یہ زاویے ۲ ن ۳ + عہ اور ۲ ن ۳ - عہ ہیں جہاں
عہ زاویہ اوف کا دائرہ ناپ ہے اور ن کوئی مثبت صحیح عدد ہے،

یہ دونوں جملہ $m + (1 - m)$ عمده میں شامل ہیں جہاں m کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے، پس یہ جملہ ان تمام زاویوں کو بیان کرتا ہے جن کی جیب وہی ہے جو عمده کی ہے۔

(۲) پھر \cos و \sin کے متوازی کھینچ کر زاویے (۱) اور (۲) اور (۱) و (۲) ہی صرف وہ زاویے ہیں جن کی جیب التمام وہی ہے جو زاویہ (۱) و (۲) کی ہے، کیونکہ عرض یہی وہ زاویے ہیں جن کے لئے \cos کا نکل \sin پر وہی کے مساوی ہے، یہ دونوں زاویے (۱) و (۲) $m + (1 - m)$ عمده میں شامل ہیں، جہاں m کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔

(۳) اگر \tan و \cot تک خارج کیا جائے تو زاویے (۱) و (۲) اور (۱) و (۲) ہی صرف وہ زاویے ہیں جن کا \tan وہی ہے جو زاویہ عمده کا ہے، یہ زاویے علی الترتیب $n + m$ عمده اور $n + (1 - m)$ عمده ہیں اور اس لئے دونوں ضابطہ $m + (1 - m)$ عمده میں شامل ہیں، جہاں m کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔

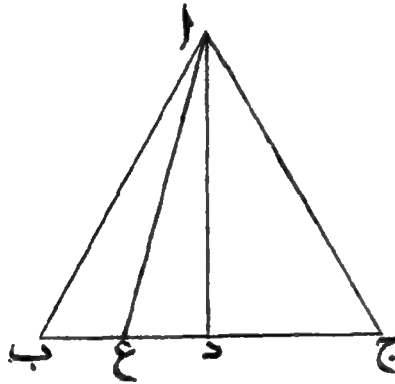
(۴) اب چونکہ جن زاویوں کا قاطع التمام ایک ہی جہان کی جیب بھی ایک ہی ہوتی ہے اس لئے $m + (1 - m)$ عمده میں وہ تمام زاویے شامل ہیں جن کا قاطع التمام وہی ہے جو عمده کا ہے، اسی طرح $m + (1 - m)$ عمده میں وہ تمام زاویے شامل ہیں جن کا قاطع وہی ہے جو عمده کا ہے، اور $m + (1 - m)$ عمده میں وہ تمام زاویے شامل ہیں جن کا \tan وہی ہے جو عمده کا ہے۔ اوپر کی ہر صورت میں m یا n کی قیمتوں میں سفر بھی داخل ہے۔

بعض زاویوں کے دائرہ قضا کی قیمتیں

۴۳۔ چند اہم زاویوں کے دائرہ قضا کی قیمتیں سادہ ہندسی طریقوں سے حاصل ہو سکتی ہیں۔

(۱) زاویہ 45° یا 135° ، قائم، زاویہ مثلث متساوی الساقین کا ایک حادہ زاویہ ہے، اس زاویہ کی جیب اور جیب التمام سر یکساں ایک

دوسرے کے مساوی ہیں، اور چونکہ ان کے مربعوں کا مجموعہ ایک کے مساوی ہے، ان میں سے ہر ایک $\frac{1}{\sqrt{2}}$ کے مساوی ہے، اس زاویہ کا ماس ایک ہے۔
(۲) مثلث متساوی الاضلاع کا ہر زاویہ 60° یا $\frac{1}{2}\pi$ ہوتا ہے۔



فرض کرو کہ ا ب ج متساوی الاضلاع مثلث ہے، ب ج پر عمود د
کھینچو تو زاویہ ب کی جیب التمام $\frac{ب د}{ا ب}$ ہے اور یہ $\frac{1}{2}$ کے مساوی ہے، اسی
زاویہ کی جیب، $\frac{1}{2} = \frac{ب د}{ا ب}$ ہے۔ 60° کا مستقیم 90° یا $\frac{1}{2}\pi$ ہے، پس
جسم $90^\circ = \frac{1}{2}\pi$ اور جیب $90^\circ = \frac{1}{2}\pi$ ، نیز مس $90^\circ = \frac{1}{2}\pi$ اور مس $90^\circ = \frac{1}{2}\pi$
(۳) زاویہ د ا ب کا نصف ا ع کھینچو تو زاویہ د ا ع 45° یا $\frac{1}{4}\pi$ ہے

اقلیدس مقالہ ششم مسئلہ ۳ کی رو سے

$$\frac{د ا ع}{د ب} = \frac{د ا}{ا ب} = \frac{1}{2}$$

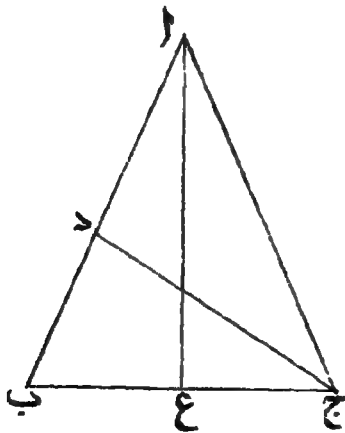
$$\frac{د ا ع}{د ب} = \frac{1}{2}$$

اور ان سے $\frac{دع}{د}$ یعنی مس ۵۱ = $\frac{۳۷}{(۳۷+۲)} = ۲ - ۳۷$ پس
اس سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{جب } ۵۱ = \frac{۳۷ - ۳۷}{۲} \text{ ، جم } ۵۱ = \frac{۳۷ + ۳۷}{۲}$$

ہم ان قیمتوں سے ۵۱ کے متکم زاویہ ۵۱ یا $\frac{۵۱}{۱۳}$ کی جیب جیب تمام
اور ماس حاصل کر سکتے ہیں۔ اگر ہم پھر زاویہ ۵۱ کے کی تضعیف کریں تو ہمیں
۵۱ یا $\frac{۵۱}{۱۳}$ کا ماس حاصل ہونا چاہیئے اور ہم اس طریقہ کو جاری رکھ کر شکل
 $\frac{۵۱}{۱۳}$ کے تمام زاویوں کے ماس حاصل کر سکتے ہیں جہاں ف ایک
ثبت صحیح عدد ہے، لیکن ہم آئندہ ایسے ضابطے حاصل کریں گے جن کی مدد سے
ان زاویوں کے تفاعلوں کو یکے بعد دیگرے محسوس کیا جاسکتا ہے، اس طرح ہندسی
عمل کو جاری رکھنے کی ضرورت باقی نہیں رہتی۔

اس کے مشابہ ہندسی طریقہ سے شکل $\frac{۵۱}{۱۳}$ کے زاویوں کے دائری
تفاعل حاصل ہو سکتے ہیں۔



(۴) فرض کرو
کہ ا ب ج ایک
مثلث ہے جس میں
قاعدہ پر کے زاویوں
میں سے ہر ایک اس
پر کے زاویہ کا دو چہ
ہے یعنی قاعدہ پر
کا ہر زاویہ ۲ یا
 $\frac{۲}{۵}$ ہے اور

(31)

زاویہ اس ۳۶ یا $\frac{1}{12}\pi$ ۔ اگر اب کو د پر تقسیم کیا جائے اس طور پر کہ لب * ب د = ۱۵ تو اقلیدس مقالہ چارم مسئلہ ۱۰ میں یہ بتایا گیا ہے کہ $ا د = د ج = ج ب$ ۔ اب ب ج پر ا غ غود نکالو۔ اگر نسبت $\frac{ا د}{ب ج}$ کو لا سے بتیر کیا جائے تو ۱- لا = لا ۲ اور اس دو درجی مساوات کو حل کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے
 $لا = \frac{1}{4}(\pm \sqrt{5} - 1)$ ہمیں مثبت اصل یعنی چاہیے، پس $\frac{ا د}{ب ج} = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$
 اس طرح جم ۲ = جب ۱۸ = $\frac{1}{4} \frac{ب ج}{ب ج} = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$
 اس سے ہمیں حاصل ہوتا ہے جب ۲۲ = جم ۱۸ = $\frac{1}{4} \sqrt{5} + 10$
 نیز جم ۳۶ = $\frac{1}{4} \frac{ا ج}{ا د}$ کیونکہ د ل ج ایک متساوی الساقین مثلث ہے
 اس لئے جم ۳۶ = $\frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1)$ پس جب ۳۶ = $\frac{1}{4} \sqrt{5} - 10$
 نیز چونکہ ۳۶ کا متمم ۵ ہے اس لئے جب ۵ اور جم ۵ کی قیمتیں بھی حاصل ہو جاتی ہیں۔
 ذیل کی جدول میں محصلہ قیمتیں حوالہ کے لئے اکٹھی کی گئی ہیں:-
 پہلی سطر کے تقابل پہلے ستون کے؛ ا دیوں کے لحاظ سے ہیں اور آخری سطر کے تقابل آخری ستون کے
 زاویوں کے لحاظ سے

	جیب	جیب التمام	ماس	ماس التمام	
$۱۵ = \pi \frac{1}{12}$	$\frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{4}$	$\sqrt{5} - 2$	$\sqrt{5} + 2$	$۲۵ = \pi \frac{5}{12}$
$۱۸ = \pi \frac{1}{10}$	$\frac{1 - \sqrt{5}}{4}$	$\frac{1 + \sqrt{5}}{4}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1)$	$۴۲ = \pi \frac{7}{6}$
$۳۰ = \pi \frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$۶۰ = \pi \frac{1}{3}$
$۳۶ = \pi \frac{1}{5}$	$\frac{1}{4} \frac{\sqrt{5} - 10}{\sqrt{5}}$	$\frac{1 + \sqrt{5}}{4}$	$\frac{1}{4} \sqrt{5} - 10$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5} + 10)$	$۵۴ = \pi \frac{3}{10}$
$۴۵ = \pi \frac{1}{8}$	$\frac{1}{4\sqrt{2}}$	$\frac{1}{4\sqrt{2}}$	۱	۱	$۴۵ = \pi \frac{1}{8}$
	جیب التمام	جیب	ماس التمام	ماس	

اب ہم ضوابط (۶) تا (۱۱) استعمال کر کے کسی ایسے زاوے کے دائری تفاعل فوراً حاصل کر سکتے ہیں جو اوپر کی جدول میں مندرجہ زادیوں میں سے کسی زاویہ سے زادیہ قائمہ کے کسی ضعف کا فرق رکھتا ہو۔

مثال :- ۱۲۰ اور ۵۴۶ کی جیب اور جیب التمام معلوم کر دو۔

(32)

چونکہ $۱۲۰ = ۹۰ + ۳۰$ ، اس لئے

جب $۱۲۰ = \text{جیب } ۳۰ = \frac{۱}{۳۶}$

جیب $۱۲۰ = - \text{جیب } ۳۰ = -\frac{۱}{۳۶}$ ؛

تیز چونکہ $۵۴۶ = (۳ \times ۱۸۰ + ۳۶)$ ، اس لئے

جب $(۵۴۶) = \text{جب } (۱۸۰ - ۳۶) = \text{جب } ۳۶$ ،

اور جیب $(۵۴۶) = \text{جیب } (۱۸۰ - ۳۶) = - \text{جیب } ۳۶$

مقلوب دائری تفاعل

۳۵۔ اگر ما، لا کا تفاعل ف (لا) ہے تو لا کو ما کا ایک تفاعل سمجھا جاسکتا ہے۔ اس تفاعل کو ف (لا) کا مقلوب تفاعل کہتے ہیں اور اس کو بالعموم ف (ما) سے تعبیر کرتے ہیں، اس طرح لا = ف (ما)، اگر ف (لا) دوری تفاعل ہو جس کا دورک ہے اور اس لئے ف (لا) = ف (لا + م ک) جہاں م کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے تو تفاعل ف (ما) کی قیمتیں تعداد میں لا انتہا ہونگی جو لا + م ک سے حاصل ہوں گی جبکہ لا، ف (ما) کی کوئی ایک قیمت ہو، ما کے ایسے تفاعل کو کثیر قیمتی تفاعل کہتے ہیں، کیونکہ متغیر ما کی ہر قیمت کے جواب میں اس کی ایک واحد قیمت نہیں ہوتی۔ پس ہم دیکھتے ہیں کہ دوری تفاعل ف (لا) = ما کے متناظر ایک کثیر قیمتی مقلوب تفاعل ف (ما) ہے جس کی قیمتوں کی تعداد ما کی کسی ایک قیمت کے لئے لا انتہا ہے، یہ

قیمتیں ایک دوسرے سے اتنا فرق رکھتی ہیں جو ف (لا) کے دور کے کسی ضعف کے مساوی ہوتا ہے۔

۴۔ اگر صفر اور ک کے درمیان واقع ہونیوالی لاکے دو یا دو سے زیادہ قیمتیں ہوں جن کے لئے ف (لا) کی قیمتیں مساوی ہوتی ہیں تو ف (ما) کی قیمتوں کی کثرت اور بڑھ جاتی ہے، کیونکہ ف (ما) کی قیمتوں میں اول تو لاکے ہر وہ قیمت ہے جس کے لئے ف (لا) = ما اور پھر قیمتوں کے وہ لا متناہی سلسلے ہیں جو لاکے ہر قیمت میں ک کے ضعف جمع کرنے سے حاصل ہوتے ہیں۔ مثلاً فرض کرو کہ صفر اور ک کے درمیان لاکے دو قیمتیں $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{4}$ ہیں جن کے لئے ف (لا) = ما تو مقلوب تفاعل ف (ما) کی قیمتوں کے دو جٹ $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ م، ک، ل، ن ک ہیں۔

۵۔ دائری تفاعل جب لا = ما کی صورت میں مقلوب تفاعل جب (ما) کی قیمتیں $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ (لا) ہیں جس میں لا لاکے کوئی قیمت ہے جس کے لئے جب لا = ما، اس صورت میں جب لا کا مکمل دور $\frac{1}{2}$ ہے، اور صفر اور $\frac{1}{2}$ کے درمیان لاکے دو قیمتیں ہیں (فرض کرو) $\frac{1}{4}$ اور $\frac{1}{8}$ = لا جن کے لئے جب لا = ما، پس جب ما کی قیمتوں کے دو سلسلے $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ = لا ہیں اور یہ دونوں سلسلے $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ (لا) میں شامل ہیں اسی طرح ہم دیکھتے ہیں کہ حجم ما کی قیمتیں $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ لا میں شامل ہیں، جہاں ج لا = ما۔

تفاعل مس لا، مم لا کے دور $\frac{1}{2}$ ہیں جو جب لا اور جم لا کے دور کا صرف نصف ہیں، اور صفر اور $\frac{1}{2}$ کے درمیان لاکے صرف ایک قیمت ہے جس کے لئے مس لا یا مم لا ایک دی ہوئی قیمت اختیار کرتا ہے، اس طرح مس لا کی قیمتیں $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ لا ہیں اور مم ما کی قیمتیں $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ لا جہاں لا صفر اور $\frac{1}{2}$ کے درمیان لاکے وہ قیمت ہے جس کے لئے مس لا = ما یا مم لا = ما۔

۳۸۔ اگر لا عدداً وہ چھوٹی سے چھوٹی مقدار ہو جس کی علامت وہی ہے جو α کی ہے اور جس کے لئے جب $\alpha = 0$ تو اس چھوٹی سے چھوٹی مقدار α کو جب α کی صدر قیمت کہتے ہیں۔ $\sin \alpha$ ، $\cos \alpha$ ، $\tan \alpha$ کی صدر قیمتوں کی تعریف بھی اسی طرح کیجا سکتی ہے اگر لا عدداً وہ چھوٹی سے چھوٹی مثبت مقدار ہو جس کے لئے $\alpha = 0$ تو اس کو جب α کی صدر قیمت کہتے ہیں، ایسی ہی تعریف α کی صدر قیمت کے لئے استعمال ہوگی۔

اس طرح جب α ، $\sin \alpha$ ، $\cos \alpha$ ، $\tan \alpha$ کی صدر قیمتیں $\pm \frac{1}{2}$ کے درمیان واقع ہوتی ہیں، اور جب α ، $\sin \alpha$ ، $\cos \alpha$ کی صدر قیمتیں صفر اور $\pm \frac{1}{2}$ کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔ بعض تصنیفات میں جب α ، $\sin \alpha$ ، $\cos \alpha$ کی صدر قیمتوں کو جب α ، $\sin \alpha$ ، $\cos \alpha$ ، $\tan \alpha$ کی صدر قیمتیں اس طرح لکھی جاتی ہیں:

$$\text{جب } \alpha = 0 \quad \sin \alpha = 0, \quad \cos \alpha = 1, \quad \tan \alpha = 0$$

$$\sin \alpha = 0, \quad \cos \alpha = 1, \quad \tan \alpha = 0$$

لیکن ہم یہ ترقیم استعمال نہیں کریں گے۔ یہ یاد رکھنا چاہیے کہ بہت سی مساواتوں میں جن میں یہ مقلوب تفاعل موجود ہوتے ہیں یہ فرض کرنا ضروری ہے کہ ان تفاعلوں کی صرف صدر قیمتیں استعمال ہوتی ہیں یا بہر صورت قیمتوں کا انتخاب محدود ہے۔ مثلاً جب α ، $\sin \alpha$ ، $\cos \alpha$ ، $\tan \alpha$ جیسی مساوات میں مقلوب تفاعل کی قیمتوں کا انتخاب محدود و مقید ہے یہ بھی مشاہدہ طلب ہے کہ تفاعلوں $\sin \alpha$ ، $\cos \alpha$ ، $\tan \alpha$ کی تعریف α کی صرف ان قیمتوں کے لئے کی گئی ہے جو $\pm \frac{1}{2}$ کے درمیان واقع ہیں، α کی ان حدود کے باہر یہ تفاعل کوئی معنی نہیں رکھتے جب تک کہ وہ موجودہ تعریف کے تحت ہیں۔ طالب علم کو مشق کے طور پر مختلف مقلوب تفاعلوں کی ترکیبیں کھینچنا چاہیے۔ یورپ کے دیگر ممالک کی تصانیف

میں متغلب تغافل جب لا جم لا سس اما کی بجائے قوس جب لا
قوس جم لا قوس س لا استعمال ہوتے ہیں۔

تیسرے باب پر مثالیں

۱۔ متناظرات ذیل ثابت کرو:

$$(۱) \text{ مس } (۱) - \text{ جم } (۱) + \text{ مم } (۱) - \text{ مس } (۱) = ۰$$

$$(۲) \text{ (جب } ۱ + \text{ قط } ۱) + \text{ (جم } ۱ + \text{ قم } ۱) = (۱ + \text{ قط } ۱ + \text{ قم } ۱)$$

۲۔ ایک زاویہ کی جیب $\frac{۲}{۲} = \frac{۲}{۲}$ ہے، باقی دائری تغافل معلوم کرو۔

۳۔ اگر $\text{مس } (۱) + \text{جب } ۱ = \text{م}، \text{مس } (۱) - \text{جب } ۱ = \text{ن}$
تو ثابت کرو کہ $\text{م} - \text{ن} = \text{م} - \text{ن}$

۴۔ اگر $\frac{\text{جب } ۱}{\text{جب } ۱} = \text{ف}، \frac{\text{جم } ۱}{\text{جم } ۱} = \text{ق}$ تو $\text{مس } (۱)$ اور $\text{مس } (۱)$ معلوم کرو۔

۵۔ اگر $\frac{\text{جب } ۱}{\text{جب } ۱} = \text{ا}، \frac{\text{مس } ۱}{\text{مس } ۱} = \text{ب}$ تو ا اور ب معلوم کرو۔

۶۔ اگر $\text{جم } ۱ = \text{مس } (۱) + \text{جم } (۱) = \text{مس } (۱) + \text{جم } (۱) = \text{مس } (۱)$
تو ثابت کرو کہ $\text{جب } ۱ = \text{جب } (۱) + \text{جب } (۱) = \text{جب } (۱) + \text{جب } (۱) = \text{جب } (۱)$

۷۔ ان مساواتوں کو حل کرو:-

$$(۱) \text{ جب } ۱ + \text{جم } ۲ = ۱$$

$$(۲) \frac{\text{جم } ۱}{\text{مس } ۱} = \frac{۳}{۲}$$

$$(۳) \text{ مس } ۱ + \text{جم } ۲ = ۲$$

۸۔ ان مساواتوں کو حل کرو:-

$$\begin{cases} \text{جم } (۱ + ۲) = \text{جب } (۱ - ۲) \\ \text{جم } (۱ - ۲) = \text{جب } (۱ + ۲) \end{cases}$$

(35)

۱۸۔ ایک مخروط مضلع کا قاعدہ متعلقہ کا مربع ہے، اس کا اس قاعدہ کے نقطہ وسطیٰ میں سے گزرنے والے ایک خط پر واقع ہے جو قاعدہ پر عمود ہے، نیز اس قاعدہ سے ف فاصلہ پر واقع ہے۔
ثابت کرو کہ دو متصلہ زوئوں کے درمیان زاویہ عم اس مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}} = \text{جب عم}$$

۱۹۔ دو مستوی ایک دوسرے کو علی القوائم خط AB پر قطع کرتے ہیں اور ایک تیسرا مستوی ان کو خطوط AD ، AE پر قطع کرتا ہے، اگر زاویوں $\angle B$ ، $\angle C$ کو علی الترتیب α ، β سے تعبیر کیا جائے تو ثابت کرو کہ $\angle B$ جو زاویہ مستوی $\angle C$ سے بناتا ہے حسب ذیل ہے:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

۲۰۔ اگر ایک قائم الزاویہ متوازی السطوح کا وتر OD جو تو ثابت کرو کہ OD اور اس رخ کے دھڑوں کے درمیان جن کے متصلہ اضلاع OA ، OB ہیں جو زاویے بنتے ہیں ان کے جیب التمام علی الترتیب ہیں

$$\frac{OB}{OD} \text{ اور } \frac{OA}{OD}$$

۲۱۔ دو دائرے جن کے نیم قطروں کا مجموعہ AB ہے ایک ہی مستوی میں رکھے گئے ہیں اس طرز پر کہ ان کے مرکز M ، N فاصلہ AB پر ہیں۔ ایک بے سرا تما کا خوب تنہا ہوا دائروں کو گھیرتا ہے اور ان کے درمیان خود کو قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ تاگے کا طول $\left(\frac{2}{3}\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\right)$ ہے۔

۲۲۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \right) = \text{جب مس}^2$$

۲۳۔ تفاعلات ۳ جب لا + ۴ جم لا، و لا جب لا، اور جب $\left(\frac{7}{4}\right)$ جب لا
 کی مقدار اور علامت کی تبدیلیاں لا کی تمام قیمتوں کے لئے ترتیبی طور پر ظاہر کرو۔
 ثابت کرو کہ مساوات $۲ = (۲ن + ۱) ۲۲$ سہ لا کی حقیقی اصلوں کی تعداد
 $۲ن + ۳$ ہے اور اس سے زیادہ نہیں، جہاں $ن$ کوئی مثبت صحیح عدد ہے انکے
 مقامات تقریبی طور پر بتاؤ۔

(36)

چوتھا باب

دو یا دو سے زیادہ زاویوں کے دائری تفاعل
جیب اور جیب التمام کے لئے جمع اور تفریق کے ضابطے

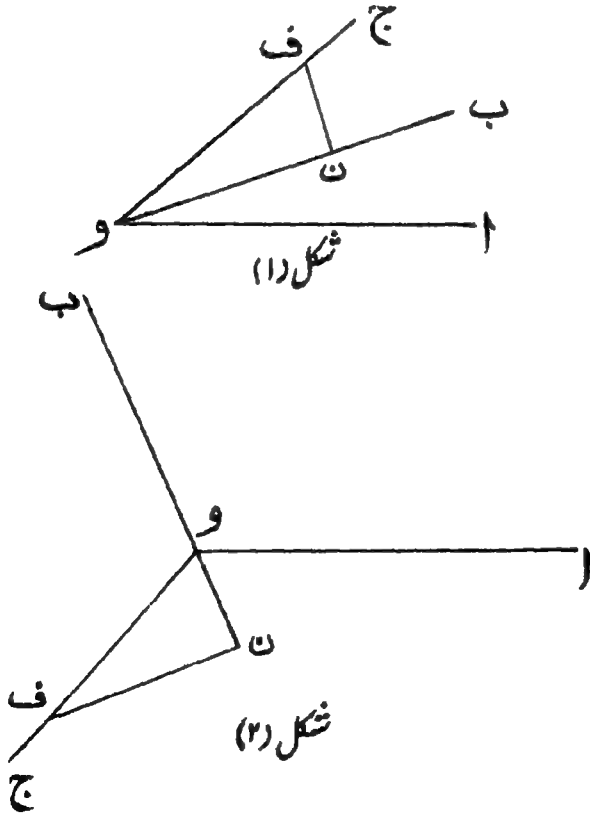
۳۹۔ اب ہم دو زاویوں کے مجموعہ اور فرق کے دائری تفاعلوں کے لئے جملے ان زاویوں کے دائری تفاعلوں کی رقوم میں معلوم کرینگے۔ فرض کرو کہ کسی مقدار A کا ایک زاویہ A و B مثبت یا منفی، ایک خط مستقیم سے تکوین پاتا ہے جو O کے گرد ابتدائی محل O سے گھومتا ہے یہ حالیکہ زاویہ کی علامت سے متعلق ہماری قرارداد وہی ہے، اور نیز فرض کرو کہ کسی مقدار B کا ایک زاویہ B و C ایک خط مستقیم سے مرسم ہوتا ہے جو ابتدائی محل O سے گھومتا ہے۔ تب زاویہ $A+B = A+B$ ۔ و C میں کوئی نقطہ F لو، اور B پر F ان عمود کھینچو۔

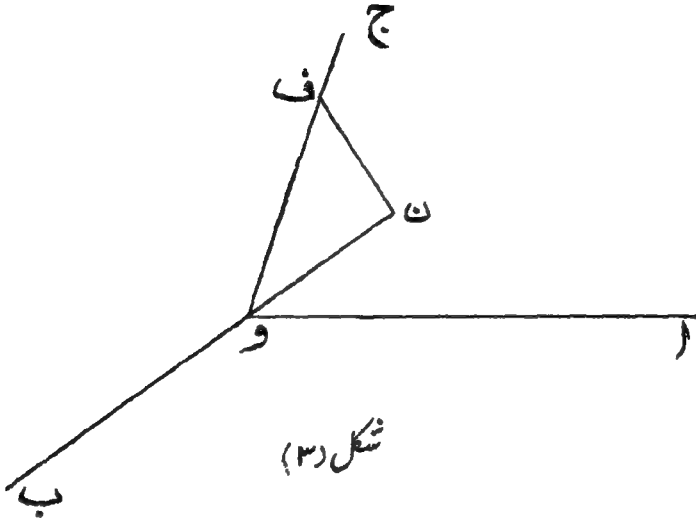
دفعہ ۵ کی قرارداد کے مطابق خط مستقیم ON مثبت یا منفی ہے بموجب اس کے کہ وہ B میں ہو یا B مدودہ میں، نیز N مثبت ہے جبکہ وہ B کی مثبت جانب واقع ہو اور مخالف سمت ساعت میں گھومے اور منفی ہے جبکہ وہ دوسری جانب واقع ہو۔ اس خط مستقیم کی مثبت سمت جس پر N واقع ہے و A کے ساتھ زاویہ $A+B$ بناتی ہے۔
 $ON = OF$ جب B اور N F = OF جب B ، کیونکہ ON اور N F

ظل ہیں و ف کے و ب پر اور اُس خط پر جو د ا کے ساتھ $90^\circ + 1^\circ$ کا زاویہ بناتا ہے۔

شکل (۱) میں زاویوں ا ب میں سے ہر ایک مثبت ہے اور 90° سے کم،
 شکل (۲) میں ا ب 90° اور 180° کے درمیان واقع ہے اور زاویہ ب بھی 90° اور 180° کے درمیان واقع ہے، شکل (۳) میں زاویہ ا 180° اور 270° کے درمیان واقع ہے اور زاویہ ب منفی ہے اور 90° اور 180° کے درمیان واقع ہے۔
 اشکال (۱) اور (۲) میں ن ف کا طول مثبت ہے اور شکل (۳) میں ن ف کا طول منفی ہے کیونکہ اس آخری صورت میں ف ا ن اُس خط کی سمت ہے جو د ا کے ساتھ $90^\circ + 1^\circ$ کا زاویہ بناتی ہے۔

(37)





(88) اب دفعہ میں بیان کردہ ظلوں کے اساسی مسئلہ کی رو سے وف کا ظل داپر = ون کا ظل واپر + ن ف کا ظل واپر، یا
 وف جم (ا + ب) = ون جم ل + ن ف جم (ل + ۹۰)°

$$= \text{وف جم لجم ب} + \text{وف جب ب جم (ل + ۹۰)°}$$

اس لئے جم (ا + ب) = جم لجم ب - جب لجم ب " " " " (۱)
 اگر مثلث ون ف کے ضلعوں کے ظل واپر لینے کی بجائے اُنکے
 ظل اُس خط پر لئے جائیں جو ود کے ساتھ ۹۰ کا زاویہ بناتا ہے تو

$$\text{وف جب (ا + ب)} = \text{ون جب ل + ن ف جب (ل + ۹۰)°}$$

$$= \text{وف جب لجم ب} + \text{وف جب ب جم (ل + ۹۰)°}$$

اس لئے جب (ا + ب) = جب لجم ب + جم لجم ب " " " " (۲)

اس طرح ضوابط (۱) اور (۲) مثبت اور منفی تمام مقداروں کے ناویوں

کے لئے ثابت ہو چکے۔ زاویوں ۱ اور ۲ کی مختلف مقداروں کے لئے طالب علم کو مناسب شکل بنانی چاہیئے تاکہ خود اس کو ثبوت کی عمومیت کا یقین ہو جائے۔ اگر ہم ضابطوں (۱) اور (۲) میں سے ہر ایک میں ۲ کو - ۲ میں بدل دیں تو

$$\text{جم (۱-۲) = جم (۲-۱) - جب (۱-۲) جب (۲-۱)}$$

$$\text{اور جب (۱-۲) = جب (۲-۱) + جم (۱-۲) جب (۲-۱)}$$

$$\text{پس جم (۱-۲) = جم (۲-۱) + جب (۱-۲) جب (۲-۱) (۳)}$$

$$\text{جب (۱-۲) = جب (۲-۱) - جم (۱-۲) جب (۲-۱) (۴)}$$

یہ ضابطے (۳) اور (۴) بلا واسطہ اس طرح بھی حاصل کئے جاسکتے ہیں کہ شکل میں زاویہ ۲ منفری سمت میں بنایا جائے، تب زاویہ ۱ ف و ۱ - ۲ کے مساوی ہوگا۔

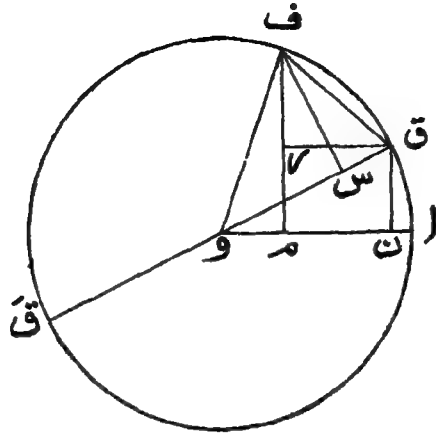
۴۔ ضابطوں (۱)، (۲) اور (۳) کو علی الترتیب جمع اور تفریق کے ضابطے کہتے ہیں، ضابطوں (۱) اور (۲) میں سے کسی ایک کو دوسرے سے اخذ کیا جاسکتا ہے، (۱) میں ۱ کی بجائے ۱۰۰ لکھو تو

$$\text{جم (۱۰۰ + ۱ - ۲) = جم (۱۰۰ + ۱) - جب (۱۰۰ + ۱) جب (۱۰۰ + ۱)}$$

$$\text{یا - جب (۱۰۰ + ۱) = - جب (۱۰۰ + ۱) - جب (۱۰۰ + ۱) جب (۱۰۰ + ۱)}$$

اور اس مساوات کی طرف میں علامتیں بدلنے سے ضابطہ (۲) حاصل ہوتا ہے اسی طرح (۲) میں ۱ کی بجائے ۱۰۰ لکھ کر (۱) کو حاصل کیا جاسکتا ہے پس یہ نتیجہ نکلا کہ یہ چاروں اساسی ضابطے فی الحقیقت ان میں سے کسی ایک میں شامل ہیں۔

۵۔ کوشی نے جمع اور تفریق کے ضابطوں کا جو ثبوت دیا ہے وہ جب ذیل ہے -
و کو مرکز مان کر ایک دائرہ کھینچو اور فرض کرو کہ نیم قطر و ف اور و ق، و کے ساتھ علی الترتیب زاویے ۱ اور ۲ بناتے ہیں، ف ق کو ملاؤ، اور دایرہ ف م ق ن



عمود نکالو، اور ق س، و ا کے متوازی کھینچو تو

$$ف ق^2 = ق س^2 + س و^2$$

$$= (و ن - و م)^2 + (م ق - ق ن)^2$$

$$= و ا^2 - 2 و ا م ق + م ق^2 + م ق^2 - 2 م ق ق ن + ق ن^2$$

$$= و ا^2 - 2 و ا م ق + 2 م ق^2 - 2 م ق ق ن + ق ن^2$$

فرض کرو کہ قطر ق ق پر عمود ف س کھینچا گیا ہے تو

$$ف ق^2 = ق س \times ق ق = (و ا - و س) (و ا + و س)$$

$$= و ا^2 - و س^2 = (و ا - و س) (و ا + و س)$$

اس لئے جم (ا-ب) = جم لجم ب + جب لجب ب، (۳)

اب دوسرے ضابطے اس سے اخذ کئے جاسکتے ہیں، چنانچہ ب کو- ب میں بدلنے سے

ضابطہ (۱) حاصل ہوتا ہے ب کو- ب میں بدلنے سے ضابطہ (۲) ب کو- ب + ب میں بدلنے سے ضابطہ (۳)۔

۴۲- اوپر کے دو ثبوت جو ہم نے جمع اور تفریق کے اساسی ضابطوں کے لئے دئے ہیں بالکل عام ہیں، ان کے علاوہ دوسرے اور ثبوت دئے

جاتے ہیں جن میں سے بعض صرف اُن زاویوں پر اطلاق پذیر ہوتے ہیں جو قیمتوں کی ایک محدود وسعت کے درمیان واقع ہوں اور اس لئے انہی توسیع اُن صورتوں میں کرنی پڑتی ہے جب زاویوں کی مقدار میں اس وسعت کے باہر ہوں۔ ہم اس قسم کی توسیع پہلے ایسے ضابطوں کے لئے کریں گے جو ا اور ب کی اصغر اور ۹۰ کے درمیان قیمتیں لیکر ثابت کئے گئے ہیں۔ ا اور ب خواہ کچھ ہی ہوں زاویوں ا اور ب کا معلوم کرنا ہمیشہ ممکن ہے جو صفر اور ۹۰ کے درمیان ہوں ایسے کہ $م \times ۹۰ + ا = ب$ ،

ب = $ن \times ۹۰ + ب$ جن میں م اور ن مثبت یا منفی صحیح عدد ہیں، تب

جم (ا + ب) = جم (م + ن) $۹۰ + (ا + ب)$!

(40)

(۱) اگر م اور ن دونوں جنت ہوں تو

$$\text{جم (ا + ب)} = (۱ - \frac{ن}{م}) \text{جم (ا + ب)}$$

$$= (۱ - \frac{ن}{م}) \text{جم ا} \text{جم ب} - \text{جم ا جب ب}$$

اب جم ا = $(۱ - \frac{ن}{م}) \text{جم ا}$ جب ا = $(۱ - \frac{ن}{م}) \text{جم ا}$ جب ا اور ب کے لئے بھی اسی وضع کے ضابطے۔

پس جم (ا + ب) = جم ا جم ب - جب ا جب ب

(۲) اگر م اور ن دونوں طاق ہوں تو

$$\text{جم (ا + ب)} = (۱ - \frac{ن}{م}) \text{جم (ا + ب)} = (۱ - \frac{ن}{م}) \text{جم ا} \text{جم ب} - \text{جم ا جب ب}$$

$$\text{جب ا} = (۱ - \frac{ن}{م}) \text{جم ا} \text{جب ب} = (۱ - \frac{ن}{م}) \text{جم ا}$$

اور ب کے لئے بھی اسی وضع کے ضابطے۔ پس جم ا، جم ب، جب ا، جب ب کی قیمتیں درج کرنے سے ہمیں حسب سابق جم (ا + ب) کے لئے وہی ضابطہ حاصل ہوتا ہے۔

(۳) اگر م طاق ہو اور ن جنت تو

$$\text{جم (ا + ب)} = \frac{1 + \frac{n}{2} + \frac{m}{2}}{2(1 - \frac{n}{2})} \text{جم (ا + ب)}$$

$$= \frac{1 + \frac{n}{2} + \frac{m}{2}}{2(1 - \frac{n}{2})} \text{جب (ا + ب)}$$

$$= \frac{1 + \frac{n}{2} + \frac{m}{2}}{2(1 - \frac{n}{2})} \text{جم (ا + ب) + جم (ب + ا)}$$

لیکن $\text{جم ا} = \frac{1 + \frac{n}{2}}{2(1 - \frac{n}{2})} \text{جب ا}$ ، $\text{جم ب} = \frac{\frac{n}{2}}{2(1 - \frac{n}{2})} \text{جم ب}$ ،

$\text{جب ب} = \frac{1 + \frac{n}{2}}{2(1 - \frac{n}{2})} \text{جم ب}$ ، $\text{جم ا} = \frac{\frac{n}{2}}{2(1 - \frac{n}{2})} \text{جم ا}$ ،

اس لئے حسب سابق اندراج کرنے سے ، جم (ا + ب) کے لئے وہی ضابطہ حاصل ہوتا ہے۔ دوسرے ضابطوں کی توسیع بھی اسی طرح عمل میں آسکتی ہے۔
۳۳ - حج کے ضابطے جس شکل میں یونانیوں کو معلوم تھے وہ ٹولمی کا مسئلہ ہے جو اقلیدس مقالہ ششم مسئلہ (۵۰) میں مذکور ہے ؛ یہ مسئلہ یہ ہے کہ اگر ا ب ج د ایک چار ضلعی ہو جو ایک دائرے کے اندر بنایا گیا ہے تو ا ب × ج د + د د × ب ج = ا ج × ب د۔ کوئی دہر ا ب اس زاویہ کے نصف کی جیب ہوتا ہے جو دائرے کے مرکز پر ا ب کے محاذی بنایا گیا ہو جبکہ دائرہ کا قطر اکائی تسلیم کیا جائے ، یہ نصف زاویہ وہ زاویہ ہے جو قوس ا ب کے محاذی محیط کے کسی نقطہ پر بنتا ہے۔ ہم اب یہ بتائیں گے کہ جب (ع + ب) اور جم (ع + ب) کے ضابطے ٹولمی کے مسئلہ میں شامل ہیں۔

(۱) فرض کرو کہ ب د ، دائرہ کا ایک قطر ہے اور ا د ب = ع ،

ب د ج = ب ، تب ا ب د = د = ع ، د ب ج = ا = ب ،

لے دیکھو انساٹکلو پیڈیا بریٹانیکا (اشاعت نہم) میں مضمون ”دراٹونی“۔

لج = جب (عہ + ہ) ا ب = جب عہ، اور ج د = جم بہ، اس طرح مسئلہ بالاضابطہ
جب (عہ + ہ) = جب عہ جم بہ + جم عہ جب بہ
کے مائل ہے۔

(۲) فرض کر دو کہ ج د، دائرہ کا ایک قطر ہے اور ب ج د = عہ،
لج د = ہ، تو ا ب = جب (عہ - ہ) اور مسئلہ بالاضابطہ
جب (عہ - ہ) + جب بہ جم عہ = جم بہ جب عہ
کے مائل ہے۔

(۳) فرض کر دو کہ ب د، دائرہ کا ایک قطر ہے اور ل د ب = عہ،
زاد یہ ج ب د = ہ، تو ل د ج = $\frac{1}{4}\pi$ + عہ - ہ، اس طرح ل ج =
جم (عہ - ہ) اور مسئلہ بالاضابطہ
جم (عہ - ہ) = جم عہ جم بہ + جب عہ جب بہ
کے مائل ہے۔

(۴) فرض کر دو کہ ج د، دائرہ کا ایک قطر ہے اور ب ج د = عہ،
ل ج = ہ، تب ب ج ل = عہ + ہ - $\frac{1}{4}\pi$ ، ا ب = جم (عہ + ہ) اور
مسئلہ بالاضابطہ
جم (عہ + ہ) + جم عہ جم بہ = جب عہ جب بہ
کے مائل ہے۔

مثال :- سائل ذیل کے ثبوت میں ٹولمی کا مسئلہ استعمال کرو:-

جب عہ جب (ہ - ج) + جب بہ جب (جہ - عہ) + جب جہ جب (عہ - ہ) = ۰

جب (عہ + ہ) جب (ہ + ج) = جب عہ جب جہ + جب بہ جب (عہ + ہ + جہ)

دو جیوب یا دو جیوب التمام کے مجموعہ یا فرق کے لئے ضابطے

۴۴ - جمع اور تفریق کے ضابطوں سے ہم فوراً حاصل کرتے ہیں

جب (ا + ب) + جب (ا - ب) = ۲ جب ا جم ب،

جب (ا + ب) - جب (ا - ب) = ۲ جم ا جب ب،

$\text{جم} (ا + ب) + \text{جم} (ا - ب) = ۲ \text{ جم} ا$ جم ب
 $\text{جم} (ا - ب) - \text{جم} (ا + ب) = ۲ \text{ جم} ا$ جب ب
 فرض کرو $ا + ب = ج$ ، $ا - ب = د$ ، تو چونکہ $\frac{۱}{۲} (ج + د) = ا$ اور
 $\frac{۱}{۲} (ج - د) = ب$ اس لئے حسب ذیل ضابطے حاصل ہوتے ہیں۔
 جب ج + جب د = ۲ جب $\frac{۱}{۲} (ج + د)$ جم $\frac{۱}{۲} (ج - د)$ (۵)
 جب ج - جب د = ۲ جم $\frac{۱}{۲} (ج + د)$ جب $\frac{۱}{۲} (ج - د)$ (۶)
 جم ج + جم د = ۲ جم $\frac{۱}{۲} (ج + د)$ جم $\frac{۱}{۲} (ج - د)$ (۷)
 جم د - جم ج = ۲ جب $\frac{۱}{۲} (ج + د)$ جب $\frac{۱}{۲} (ج - د)$ (۸)

(42) یہ اہم ضابطے (۵)، (۶)، (۷)، (۸) دو زاویوں کی جیب یا جیب التمام کے مجموعہ یا فرق کو دو دائری تغافلوں کے حاصل ضرب کے طور پر بیان کرتے ہیں، ان کو الفاظ میں یوں بیان کیا جاسکتا ہے :-

دو زاویوں کی جیب کا مجموعہ، ان زاویوں کے نصف مجموعہ کی جیب اور نصف فرق کی جیب التمام کے حاصل ضرب کا دوچند ہوتا ہے۔

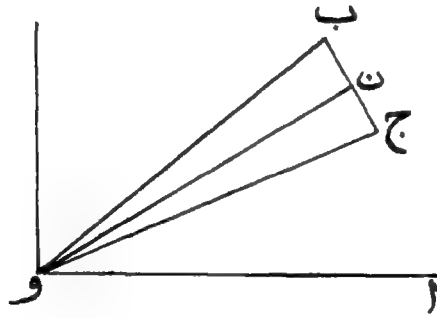
دو زاویوں کی جیب کا فرق، ان زاویوں کے نصف مجموعہ کی جیب التمام اور نصف فرق کی جیب کے حاصل ضرب کا دوچند ہوتا ہے۔

دو زاویوں کی جیب التمام کا مجموعہ، ان زاویوں کے

نصف مجموعہ کی جیب التمام اور نصف فرق کی جیب التمام کے حاصل ضرب کا دو چند ہوتا ہے۔

دو زاویوں کی جیب التمام کا فرق، ان زاویوں کے نصف مجموعہ کی جیب اور اُلٹے نصف فرق کی جیب کے دو چند حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے۔

۴۵۔ یہ ضابطے ہندسی طور پر خطوں کے طریقہ سے ثابت کئے جاسکتے ہیں۔



فرض کر دے کہ $\angle AOC = \alpha$ ، $\angle COB = \beta$ ، اور فرض کر لے کہ $\angle AOB = \alpha + \beta$ ،
 جیب پر عمود و ن کھینچو تو $\angle AOC = \alpha$ ، $\angle COB = \beta$ کا نقطہ وسطی ہے، نیز

$\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cdot \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \sin \beta$
 اب دائرہ و ب اور و ج کے خطوں کا مجموعہ، دائرہ و ن، ن ب،
 و ن اور ن ج کے خطوں کے مجموعہ کے مساوی ہے اور چونکہ ن ب اور
 ن ج کے نل مساوی اور مختلف علامت ہیں اس لئے یہ مجموعہ و ن کے
 نل کے دو چند کے مساوی ہے۔ اس لئے

$$\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cdot \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

اور چونکہ

$$\text{ون} = \text{وب} \text{ جم } \frac{1}{2} (\text{ج} - \text{د})$$

اس لئے ضابطہ

$$(43) \quad \text{جم ج} + \text{جم د} = 2 \text{ جم } \frac{1}{2} (\text{ج} + \text{د}) \quad \text{جم } \frac{1}{2} (\text{ج} - \text{د}) \dots \dots (6)$$

حاصل ہوتا ہے۔
اگر وہاں پر ظل لینے کی بجائے اسکے علی القوالم خط پر ظل لئے جائیں تو
دب جب ج + وج جب د = 2 ون جب $\frac{1}{2} (\text{ج} + \text{د})$

اس لئے

$$\text{جب ج} + \text{جب د} = 2 \text{ جب } \frac{1}{2} (\text{ج} + \text{د}) \quad \text{جم } \frac{1}{2} (\text{ج} - \text{د}) \dots \dots (5)$$

نیز وہاں پر وج کا ظل = دب کا ظل + بن کے ظل کا دو چند
یعنی

$$\text{وج جم د} = \text{دب جم ج} + 2 \text{ بن جب } \frac{1}{2} (\text{ج} + \text{د})$$

اس لئے جم د - جم ج = 2 جب $\frac{1}{2} (\text{ج} + \text{د})$ جب $\frac{1}{2} (\text{ج} - \text{د}) \dots \dots (8)$
اور اگر ہم وہاں پر کے عمود پر ظل لیں تو

$$\text{وج جب د} = \text{دب جب ج} - 2 \text{ بن جم } \frac{1}{2} (\text{ج} + \text{د}) \dots \dots (6)$$

یا جب ج - جب د = 2 جب $\frac{1}{2} (\text{ج} - \text{د})$ جم $\frac{1}{2} (\text{ج} + \text{د}) \dots \dots (9)$
لو کارنتوں کی ایجاد سے قبل تقریباً ایک صدی تک عددوں کو، جو جب کی
جدولوں کے ذریعہ ضرب دینے کا ایک عجیب طریقہ رائج تھا۔ یہ طریقہ ضابطہ

$$\text{جب د جب ب} = \frac{1}{2} \{ \text{جم} (1 - \text{ب}) - \text{جم} (1 + \text{ب}) \}$$

کے استعمال پر منحصر تھا۔ زاوئے اور ب جن کی جو ب، علامت اعشاریہ کو نکال دینے
کے بعد، ان اعداد کے مساوی ہوتے ہیں جن کو ضرب دینا مقصود ہوتا ہے جو ب کی ایک
جدول سے معلوم کئے جاسکتے ہیں اور پھر اسی جدول سے جم (1 + ب)،
جم (1 - ب) معلوم ہو سکتی ہیں، ان آخری جو ب التام کے فرق کا نصف مطلوبہ

حاصل ضرب ہے۔ اس طریقہ کو $\pi\rho\sigma\sigma\alpha\phi\alpha\lambda\pi\sigma\iota\varsigma$ کہتے تھے۔ گلیفر کے ایک مضمون "On multiplication by a table of single entry" میں جو فلا سیفکل میگزین بابۃ ۱۱۸۸ میں شائع ہوا تھا اس طریقہ کا ذکر ملے گا۔

امثلہ

۱۔ ثابت کرو مثلاً

$$\text{جب } (ب-ج) \text{ جب } (ب+ج-۱) + \text{جب } ب \text{ جب } (ج-۱) \times$$

$$\text{جب } (ج+۱-ب) + \text{جب } ج \text{ جب } (۱-ب) \text{ جب } (۱+ب-ج)$$

$$= ۲ \text{ جب } (ب-ج) \text{ جب } (ج-۱) \text{ جب } (۱-ب)$$

دائیں جانب کی دوسری اور تیسری ارقام یکساں جاسکتی ہیں

$$\frac{۱}{۲} \text{ جب } ب \{ \text{جم } (ب-۱۲) - \text{جم } (ج-ب) \} + \frac{۱}{۲} \text{ جب } ج \{ \text{جم } (ج-۲) - \text{جم } (ب-۲) \} -$$

$$\text{جم } (۲-ج-۱)$$

$$\text{اور یہ } = \frac{۱}{۲} \{ \text{جب } ۲(ب-۱) + \text{جب } ۲(۱-ب) - \text{جب } ۲(ج-۱) - \text{جب } ۲(ب-ج) \}$$

$$+ \frac{۱}{۲} \{ \text{جب } ۲(ج-ب) + \text{جب } ۲(ب-ج) - \text{جب } ۲(ج-۱) - \text{جب } ۲(ب-۱) \}$$

$$= \frac{۱}{۲} \{ \text{جب } ۲(ب-ج) - \text{جب } ۲(ج-ب) \} + \frac{۱}{۲} \{ \text{جب } ۲(ب-۱) - \text{جب } ۲(ج-۱) \}$$

$$= \text{جب } (ب-ج) \{ \text{جم } (ب+ج) - \text{جم } (ب-ج) \} + \frac{۱}{۲} \text{ جم } (ب+ج-۱۲)$$

$$= \text{جب } (ب-ج) \{ \text{جم } (ب+ج) - \text{جم } (ب-ج) \} + \frac{۱}{۲} \text{ جم } (ب+ج-۱۲)$$

اس میں رقم جب (ب-ج) جب (ب+ج-۱) جمع کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{جب } (ب-ج) \{ \text{جم } (ب+ج-۱۲) - \text{جم } (ب-ج) \}$$

$$\text{یعنی } ۲ \text{ جب } (ب-ج) \text{ جب } (ج-۱) \text{ جب } (۱-ب)$$

(۲)۔ ثابت کرو کہ

$$۳ \text{ جم } (ب-ج) \text{ جب } (ب+ج-۱)$$

$2 = \text{جب (ب-ج) جب (ج-ا) جب (ا-ب)}$
 اسکو مثال (۱) سے $\text{ا، ب، ج کو } 90^\circ - 90^\circ - 90^\circ$ ج
 میں تبدیل کر کے اخذ کیا جاسکتا ہے، یا بلا واسطہ مثال (۱) کی طرح ثابت
 کیا جاسکتا ہے۔
 مثالوں ذیل ثابت کرو:

- (۳) $\text{جب (ب-ج) جب (ج-ا) جب (ا-ب) = 0}$
 (۴) $\text{جب (ب+ج) جب (ج+ا) جب (ا+ب) = 0}$
 (۵) $\text{جب (ب-ج) جب (ج-ا) جب (ا-ب) = 0}$
 $\text{جب (ب+ج) جب (ج+ا) جب (ا+ب) = 0}$
 (۶) اگر $\text{ا+ب+ج} = 180^\circ$ ثابت کرو کہ

$\text{جب } 1 = \text{جب } 2 + \text{جب } 3 - \text{جب } 4$
 اور $\text{جب } 1 = 1 - \text{جب } 2 - \text{جب } 3 - \text{جب } 4$
 مثلثی مثالوں کی ایک کثیر تعداد اسی طرح کے حیرتی مثالوں کے ماثل ہے
 مثلاً حسب ذیل حیرتی مثالوں (۱) تا (۵) کے جواب میں: -
 $\text{جب (ب-ج) جب (ج-ا) جب (ا-ب) = 0}$
 (۱) اور (۲) کے جواب میں

- $\text{جب (ب-ج) جب (ج-ا) جب (ا-ب) = 0}$ کے جواب میں؛
 $\text{جب (ب+ج) جب (ج+ا) جب (ا+ب) = 0}$ کے جواب میں؛
 $\text{جب (ب-ج) جب (ج-ا) جب (ا-ب) = 0}$ کے جواب میں

لے ایسی مطابقت کی ایک کثیر تعداد ایم۔ گیلن (M. Gelin) نے "Mathesis" جلد دوم میں دی ہے۔

ہم ان مطابقات کا نظریہ ساتویں باب میں بیان کریں گے۔

ماس اور ماس التمام کے لئے جمع اور تفریق و ضابطے

۴۴۔ جب اور جب التمام کے جمع اور تفریق کے ضابطوں سے ہم دو زاویوں کے مجموعہ یا فرق کے ماس یا ماس التمام کے لئے ان زاویوں کے ماس یا ماس التمام کی رقوم میں ضابطے اخذ کر سکتے ہیں۔ مثلاً

$$\text{مس (ا + ب) = جب (ا + ب) = جب ا + جم ب} \\ \text{جم (ا + ب) = جم ا + جم ب = جب ا + جب ب}$$

پس اس کسر کے شمار کنندہ اور لب ناکو جم ا + جم ب سے تقسیم کرنے پر

$$\frac{\text{جب ا} \pm \text{جم ب}}{\text{جم ا} \pm \text{جم ب}} = \text{مس (ا + ب)} \\ \frac{\text{جب ا + جب ب}}{\text{جم ا + جم ب}} = ۱$$

اس لئے حسب ذیل دو ضابطے ملتے ہیں

$$\text{مس (ا + ب) = مس ا + مس ب} \quad (۹) \\ \text{مس ا + مس ب}$$

$$\text{مس (ا - ب) = مس ا - مس ب} \quad (۱۰) \\ \text{مس ا - مس ب}$$

اسی طرح اور دو ضابطے حاصل ہوتے ہیں (۴۵)

$$\text{مم (ا + ب) = مم ا + مم ب} \quad (۱۱) \\ \text{مم ا + مم ب}$$

$$\text{مم (ا - ب) = مم ا - مم ب} \quad (۱۲) \\ \text{مم ا - مم ب}$$



ضوابط (۹) تا (۱۲) ماس اور ماس التمام کے لئے جمع اور تفریق کے ضابطے

ہیں۔

مختلف ضوابط

۴۷۔ حسب ذیل ضابطے آن ضابطوں سے اخذ کئے جاسکتے ہیں جو ہم نے دو زاویوں کے لئے حاصل کئے ہیں۔
یہ ضابطے استتالات کو عمل میں لانے میں اکثر مفید ہوتے ہیں۔
طالب علم کو ہر ضابطہ کی تصدیق خود کر لینی چاہیئے۔

$$\text{جب } (ا + ب) \text{ جب } (ا - ب) = \text{جب } ا - \text{جب } ب = \text{جم } ا - \text{جم } ب \dots (۱۳)$$

$$\text{جم } (ا + ب) \text{ جم } (ا - ب) = \text{جم } ا - \text{جب } ب = \text{جم } ا - \text{جب } ب \dots (۱۴)$$

$$\text{جب } (ا + ب) \text{ جم } (ا - ب) = \text{جب } ا - \text{جم } ب = \text{جم } ا - \text{جم } ب \dots (۱۵)$$

$$\text{جم } (ا + ب) \text{ جب } (ا - ب) = \text{جب } ا - \text{جب } ب = \text{جم } ا - \text{جم } ب \dots (۱۶)$$

$$\text{جب } (ا + ب) = \frac{\text{مس } ا + \text{مس } ب}{\text{جب } (ا - ب)} \dots (۱۷)$$

$$\text{جم } (ا + ب) = \frac{\text{مس } ا - \text{مس } ب}{\text{جم } (ا - ب)} \dots (۱۸)$$

$$\text{مس } ا \pm \text{مس } ب = \frac{\text{جب } (ا \pm ب)}{\text{جم } ا \pm \text{جم } ب} \dots (۱۹)$$

دو جیب یا جیب التمام کے جمع اور تفریق کے ضابطوں سے ہمیں
ذرا حسب ذیل ضابطے حاصل ہوتے ہیں :-

$$\text{جب } ا + \text{جب } ب = \frac{\text{مس } \frac{ا + ب}{۲}}{\text{جب } ا - \text{جب } ب} \dots (۲۰)$$

$$\text{جب } ا - \text{جب } ب = \frac{\text{مس } \frac{ا - ب}{۲}}{\text{جم } ا + \text{جم } ب} \dots (۲۱)$$

$$۲ = جب ۱ (۱-۱) (جم + ج) - (۱-۱) (جم - ج) \{$$

$$= (۱-۱) ۱ = ۱$$

۴۔ اسی مفروض کے مطابق جو مثال (۳) میں فرض کیا گیا ہے ثابت کرو کہ

$$۱ + جم ۲ + ۱ + جم ۲ + ۱ + جم ۲ = (۱-۱) ۱ = ۱$$

متاثرات ذیل ثابت کرو:۔

$$۵۔ جب ۳ = ۱ + جب ۱ (۱+۱) (جم + ج) - (۱-۱) (جم - ج)$$

$$۶۔ جم ۳ = ۱ + جم ۱ (۱+۱) (جم + ج) - (۱-۱) (جم - ج)$$

$$۷۔ جب ۱ + جب ۱ + جب ۱ - جب ۱ (۱+۱) (جم + ج)$$

$$= ۱ + جب ۱ (۱+۱) (جم + ج) - (۱-۱) (جم - ج)$$

$$۸۔ جم ۱ + جم ۱ + جم ۱ + جم ۱ (۱+۱) (جم + ج)$$

$$= ۱ + جم ۱ (۱+۱) (جم + ج) - (۱-۱) (جم - ج)$$

$$۹۔ ۳ - جب ۱ + جب ۱ (۱+۱) (جم + ج) - جب ۱ + جب ۱ (۱+۱) (جم + ج)$$

$$= ۱ + جب ۱ (۱+۱) (جم + ج) - (۱-۱) (جم - ج)$$

$$۱۰۔ ۳ - جم ۱ + جم ۱ (۱+۱) (جم + ج) - جم ۱ + جم ۱ (۱+۱) (جم + ج)$$

$$= ۱ + جم ۱ (۱+۱) (جم + ج) - (۱-۱) (جم - ج)$$

$$۱۱۔ ۳ - جب ۱ + جب ۱ (۱+۱) (جم + ج) - جب ۱ + جب ۱ (۱+۱) (جم + ج)$$

$$= جب ۱ (۱+۱) (جم + ج) - (۱-۱) (جم - ج)$$

$$۱۲۔ ۳ - جم ۱ + جم ۱ (۱+۱) (جم + ج) - جم ۱ + جم ۱ (۱+۱) (جم + ج)$$

$$= جم ۱ (۱+۱) (جم + ج) - (۱-۱) (جم - ج)$$

مثالیں (۹) اور (۱۰) جبری متاثر

$$۱۳۔ ۳ - ۱ + جب ۱ (۱+۱) (جم + ج) - ۱ + جب ۱ (۱+۱) (جم + ج)$$

کے جواب میں ہیں اور (۱۱) اور (۱۲) متاثر

= جم اجم ب جم ج (ا-س ب س ج-س ج س ا-س ا س ب)
پس عمل تقسیم سے یہ ضابطہ حاصل ہوتا ہے

مس (ا+ب+ج)

= مس ا+مس ب+مس ج-مس ا س ب مس ج

ا-مس ب س ج-مس ج س ا-مس ا س ب

اسی طرح ضابطہ ذیل بھی حاصل ہو سکتا ہے

مم (ا+ب+ج)

مم ا مم ب مم ج-مم ا-مم ب-مم ج

(۲۶) = مم ب مم ج+مم ج مم ا+مم ا مم ب-ا

مثالیں

۱- ثابت کرو کہ مس (۵+۳) = مس (۵-۳) = ۲ مس ۲

۲- ثابت کرو کہ اگر ا+ب+ج = ن ۱۱ تو

مس ا+مس ب+مس ج-مس ا س ب مس ج = ۰

ا+ب+ج = (۱+۲) ۱۱ تو

مس ب مس ج+مس ج س ا+مس ا س ب = ۱

اور مماس اتمام کے لئے متناظر مسئلے بیان کرو۔

زاویوں کی کسی تعداد کے لئے جمع کے ضابطے

۴۹- یہ ظاہر ہے کہ اب ہم چار زاویوں کے حاصل جمع کے دائری

تغایلوں کے لئے ضابطے حاصل کر سکتے ہیں اور پھر پانچ زاویوں

کے حاصل جمع کے لئے اور علی ہذا۔ استقراء کے طریقہ سے ہم ثابت

کریں گے کہ ن زاویوں ا، ب، ج، د، ...، ن کے حاصل جمع کی جیب

اور جیب التمام کے لئے یہ ضابطے ہیں
جب $(\angle + \angle + \dots + \angle) = \angle - \angle + \angle - \dots - \angle$ (۲۸)

جم $(\angle + \angle + \dots + \angle) = \angle - \angle + \angle - \dots - \angle$ (۲۹)

جہاں \angle سے n زاویوں میں سے r کی جیوب اور باقی $n - r$ زاویوں کی جیوب التمام کے حاصل ضربوں کا مجموعہ تعبیر ہوتا ہے اور n زاویوں میں سے r زاوئے ہر ممکن طریقہ سے منتخب کئے گئے ہیں، پس

$$\angle = \text{جم } \angle \text{ جم } \angle \dots \text{ جم } \angle$$

$$\angle = \text{جب } \angle \text{ جم } \angle \text{ جم } \angle \dots \text{ جم } \angle + \text{جم } \angle \text{ جب } \angle \text{ جم } \angle \dots \text{ جم } \angle \dots \dots$$

ضوابط (۲۸) اور (۲۹) صورتوں $n = 2$ ، $n = 3$ کے لئے ضابطوں (۱)، (۲) اور (۲۳)، (۲۵) کے مطابق ہیں، یہ مان لو کہ یہ ضابطے n زاویوں کے لئے درست ہیں، ہم ثابت کریں گے کہ یہ، $(n + 1)$ زاویوں کے لیے بھی درست ہیں، اب

$$\text{جب } (\angle + \angle + \dots + \angle + \angle + 1)$$

$$= \text{جب } (\angle + \dots + \angle) \text{ جم } \angle + 1 + \text{جم } (\angle + \dots + \angle) \text{ جب } \angle + 1$$

$$= \text{جم } \angle + 1 (\angle - \angle - \dots - \angle) + \text{جب } \angle + 1 (\angle - \angle + \angle - \dots - \angle) \dots$$

فرض کرو کہ \angle سے r زاویوں میں سے r کی جیوب اور باقی $n + 1 - r$ زاویوں کی جیوب التمام کے حاصل ضربوں کا مجموعہ تعبیر ہوتا ہے جبکہ $n + 1$ زاویوں میں سے r زاوئے ہر ممکن طریقہ سے منتخب کئے گئے ہوں۔ تب

جون زاویوں کے مجموعہ کے ماس کو ان زاویوں کے ماسوں کی رقوم میں بیان کرتا ہے۔

ضابطہ (۳۰) کو بلا واسطہ بھی ثابت کیا جاسکتا ہے۔ مان لو کہ وہ ن زاویوں کے لئے درست ہے ہم ثابت کریں گے کہ وہ ن + ۱ زاویوں کے لئے بھی درست ہے۔ اس طرح

$$\frac{\text{ماس } (1 + 2 + \dots + n) + \text{ماس } (n + 1)}{\text{ماس } (1 + 2 + \dots + n) + \text{ماس } (n + 1)} =$$

$$\frac{(1 + 2 + \dots + n) + (n + 1)}{(1 + 2 + \dots + n) + (n + 1)} =$$

اب اگر ن + ۱ زاویوں میں سے راور زاویوں کے ماسوں کے حاصل ضربوں کا حاصل جمع م سے تعبیر ہو تو

$$م_1 = م_1 + م_1 + 1$$

$$م_2 = م_2 + م_2 + 1$$

$$م_3 = م_3 + م_3 + 1$$

$$\text{اس لئے ماس } (1 + 2 + \dots + n) + 1 = \frac{م_1 + م_2 + \dots + م_n}{م_1 + م_2 + \dots + م_n} =$$

اور چونکہ ضابطہ (۳۰) ن = ۲، ۳ کے لئے درست ہے اس لئے ن = ۴ کے لئے درست ہے اور اس لئے عام طور پر درست ہے۔

جیوب یا جیوب التمام کے حاصل ضرب کو جیوب یا جیوب التمام کے حاصل جمع کے طور پر بیان کرنا

(50)

۵۔ ہم ایسے ضابطے حاصل کر سکتے ہیں جو زاویوں کی کسی تعداد کی جیوب یا جیوب التمام کے حاصل ضرب کو ان زاویوں کی جیوب یا جیوب التمام

کے مجموعہ کے طور پر بیان کریں۔

مثلاً

$$\begin{aligned}
 ۲ \text{ جب } \angle \text{ جب } \angle &= \text{جم } (\angle - \angle) - \text{جم } (\angle + \angle) \\
 ۳ \text{ جب } \angle \text{ جب } \angle \text{ جب } \angle &= ۲ \text{ جب } \angle \text{ جب } \angle - \text{جم } (\angle - \angle) - \text{جم } (\angle + \angle) \\
 &= \text{جب } (\angle - \angle + \angle) + \text{جب } (\angle - \angle + \angle + \angle) \\
 &+ \text{جب } (\angle + \angle - \angle) - \text{جب } (\angle + \angle + \angle) \\
 &= \text{جب } (\angle - \angle + \angle + \angle) - \text{جب } (\angle + \angle + \angle) \\
 ۴ \text{ جب } \angle \text{ جب } \angle \text{ جب } \angle \text{ جب } \angle &= ۳ \text{ جب } (\angle - \angle + \angle) \text{ جب } \angle + \dots \\
 &- ۲ \text{ جب } (\angle + \angle + \angle) \text{ جب } \angle \\
 &= \text{جم } (\angle - \angle + \angle - \angle) - \text{جم } (\angle - \angle + \angle + \angle) \\
 &+ \text{جم } (\angle - \angle + \angle + \angle - \angle) - \text{جم } (\angle - \angle + \angle + \angle + \angle) \\
 &+ \text{جم } (\angle + \angle - \angle - \angle) - \text{جم } (\angle + \angle - \angle + \angle) \\
 &- \text{جم } (\angle + \angle + \angle - \angle) + \text{جم } (\angle + \angle + \angle + \angle) \\
 &= \text{جم } (\angle + \angle + \angle + \angle) - \text{جم } (\angle + \angle + \angle - \angle) \\
 &+ \frac{1}{2} \text{ جم } (\angle + \angle - \angle - \angle)
 \end{aligned}$$

اسی طرح

$$\begin{aligned}
 ۲ \text{ جم } \angle \text{ جم } \angle &= \text{جم } (\angle - \angle) + \text{جم } (\angle + \angle) \\
 ۳ \text{ جم } \angle \text{ جم } \angle \text{ جم } \angle &= ۲ \text{ جم } (\angle - \angle) \text{ جم } \angle + \text{جم } (\angle + \angle) \text{ جم } \angle \\
 &= \text{جم } (\angle - \angle + \angle + \angle) + \text{جم } (\angle - \angle + \angle) \\
 &+ \text{جم } (\angle + \angle - \angle - \angle) + \text{جم } (\angle + \angle + \angle)
 \end{aligned}$$

$$= ج_ن + ج_{ن-۱} + \dots + ج_{\frac{۱}{۲}(ن-۱)} \quad (۳۴)$$

ضابطوں (۳۱)، (۳۲)، (۳۳)، (۳۴) کو اوپر ن = ۲، ۳، ۴ کے لئے ثابت کیا جا چکا ہے اور اب ان کو استقراء کے طریقہ سے عام صورت کے لئے ثابت کیا جائے گا، مان لو کہ ضابطہ (۳۱) ن زاویوں کے لئے درست ہے، اس کو ۲ جب ل + ۱ سے ضرب دو اور کسی رقم ۲ ج_ن - ر جب ل + ۱ کی بجائے جوب کا مجموعہ رکھو تو حاصل ضرب

$$(۱-۲) ج_{\frac{۱}{۲}(ل+۱)} ج_{\frac{۱}{۲}(ل+۱)} \dots ج_{\frac{۱}{۲}(ل+۱)} ج_{\frac{۱}{۲}(ل+۱)}$$

کے لئے جب ذیل جملہ حاصل ہوتا ہے

$$ج_ن - ج_{ن-۱} + \dots + ج_{\frac{۱}{۲}(ن-۱)} ج_{\frac{۱}{۲}(ن-۱)} \quad (۳۵)$$

جہاں ج_ن حاصل جمع ہے ج_ن + ۱ زاویوں میں سے ر زاویوں کو مثبت اور باقی زاویوں کو منفی لیکر ان کے حاصل جمع کی جوب کو جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے، پس یہ وہی ہے جو ضابطہ (۳۲) ہو جاتا ہے جبکہ اس میں ن کو ن + ۱ میں بدلا جائے، پھر یہی عمل اس نتیجہ کے ساتھ کرو تو حاصل ضرب

$$(۱-۲) ج_{\frac{۱}{۲}(ل+۱)} ج_{\frac{۱}{۲}(ل+۱)} \dots ج_{\frac{۱}{۲}(ل+۱)} ج_{\frac{۱}{۲}(ل+۱)}$$

$$= ج_{ن+۲} - ج_{ن+۱} + \dots + ج_{\frac{۱}{۲}(ن+۱)} ج_{\frac{۱}{۲}(ن+۱)} \quad (۳۶)$$

جہاں ج_ن، ن + ۲ زاویوں کے لحاظ سے ہے، اس طرح ضابطہ (۳۱) قیمت ن + ۲ کے لئے ثابت ہو چکا اگر ہم قیمت ن کے لئے ضابطوں (۳۱) اور (۳۲) کو درست مان لیں۔ اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ ضابطہ (۳۲) ن + ۲ زاویوں کے لئے درست ہے، اور چونکہ یہ ضابطہ ن = ۲، ۳ کے لئے ثابت کئے جا چکے ہیں اس لئے وہ عام صورت

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} \text{ جب } n \text{ چار } (n=4) \dots (n=6)$$

یہ آخری ضابطے (۳۹) اور (۴۰) (۲۸) اور (۲۹) سے حاصل ہوتے ہیں، کیونکہ دہ ۴۹ میں چار ہیں اتنی ہی ارقام شامل ہوتی ہیں جتنی تعداد ان اجتماعوں کی ہے جو ان اشیاء میں سے اور اشیاء کو باہم لینے سے حاصل ہوتے ہیں، اور چار

$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} \text{ جب } n \text{ چار } (n=4) \dots (n=6)$$

ضابطوں (۳۹) اور (۴۰) کو اس شکل میں بھی لکھا جاسکتا ہے۔

$$\text{جب } n=1 \text{ جم } 1 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} \text{ مس } 1 + \dots$$

$$\text{جم } n=1 \text{ جم } 1 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} \text{ مس } 1 + \dots$$

نیز (۴۱) اور (۴۲) سے

$$\text{مس } 1 = \frac{\text{مس } 2}{1 - \text{مس } 1} \dots (41)$$

$$\text{مس } 2 = \frac{\text{مس } 3 - \text{مس } 1}{1 - \text{مس } 3} \dots (42)$$

$$\text{مس } n = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} \text{ مس } 1 + \dots$$

$$- \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} \text{ مس } 2 + \dots$$

اس طرح ہم نے ایک زاویہ کے ضلع کے دائری تغاٹوں کے لئے خود اس زاویہ کے دائری تغاٹوں کی رقوم میں ضابطے حاصل کئے ہیں۔

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ قوتوں

جب ۱، جب ۲، جب ۳،

جم ۱، جم ۲، جم ۳،

میں سے ہر ایک قوت متوالی (Recurring) ہے، کیونکہ

جب (۱+۱) = ۲ جم ۱ جب ۱ - جب (۱-۱) = ۱

جم (۱+۱) = ۲ جم ۱ جب ۱ - جم (۱-۱) = ۱

پس ہر ایک قوت کی ہر رقم اس طرح حاصل ہوتی ہے کہ اس سے ماقبل رقم کو ۲ جم ۱ سے ضرب دیکر حاصل ضرب میں سے اس ماقبل رقم کی پچھلی رقم کو تفریق کیا جائے اس طریقہ سے قوتوں کی ارقام یکے بعد دیگرے محسوب کیجا سکتی ہیں اگر ہم ضابطہ (۳۵) اور (۳۶) کو مان لیں -

اس لئے سلسلوں

۱+ لاجب ۱ + لاجب ۲ + لاجب ۳ + اور ۱+ لاجم ۱ + لاجم ۲ + لاجم ۳ +

میں سے ہر ایک کے ربط کا پیمانہ یہ ہے

۱-۲ لاجم ۱ + لاجم ۲

جیب یا جیب التمام کی قوتوں کے لئے ضعیفی زاویوں

کی جیب یا جیب التمام کی رقوم میں حملے

۵۲- کسی زاویہ کی جیب یا جیب التمام کی کسی قوت کے لئے خود زاویہ کے ضعیفوں کی جیب یا جیب التمام کی رقوم میں حملے حاصل کرنے کے لئے دفعہ (۵۰) کے ضابطوں میں تمام زاویوں کو ایک دوسرے کے مساوی رکھنا چاہیئے، اس طرح حسب ذیل ضابطے حاصل ہونگے۔

۲ جیب ۱ = ۱ - جم ۲

۴ جیب ۱ = ۳ جیب ۱ - جب ۳

۸ جیب ۱ = جم ۷ - جم ۵ + ۳

کی قیمتیں مقرر کرنے کے بعد ہو سکتا ہے۔ مزید براں اگر کسی ضابطہ میں (مثلاً) تین مقلوب تفاعل شامل ہوں اور ان میں سے دو کی صدر قیمتیں دی جائیں تو یہ ضروری نہیں ہے کہ تیسرے مقلوب تفاعل کی قیمت بھی صدر ہو مثلاً ضابطہ

$$\text{مس}^1 + \text{مس}^2 = \text{مس}^3 \quad (ا + ب) \quad (ا - ا - ب)$$

میں اگر مس^۱ اور مس^۲ اب دونوں مثبت ہوں اور ان کی قیمتیں صدر ہوں یعنی وہ قیمتیں جو صفر اور $\frac{1}{4}\pi$ کے درمیان ہیں، اور اگر ان کا مجموعہ $\frac{1}{4}\pi$ سے بڑا ہو تو یہ مجموعہ مقلوب تفاعل

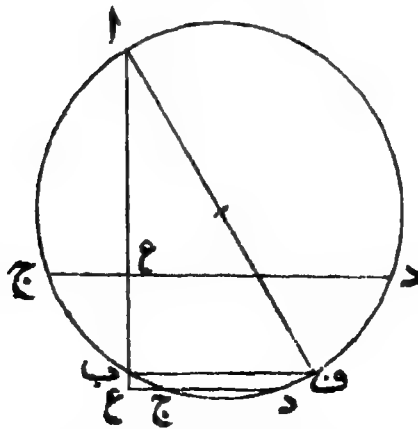
$$\text{مس}^1 \quad (ا + ب) \quad (ا - ا - ب)$$

کی صدر قیمت نہیں ہے؛ یہ صدر قیمت صفر اور $\frac{1}{4}\pi$ کے درمیان ایک زاویہ ہے جس کا ماس وہی ہے جو مس^۱ اور مس^۲ اب کا مجموعہ ہے۔

ضابطوں کے ہندسی ثبوت

۴۵۔ اس باب کے اکثر ضابطوں کے ہندسی ثبوت دئے جاسکتے ہیں، ایسے ثبوتوں کی صرف تین مثالیں دی جائیں گی۔ یہ یاد رکھنا چاہیے کہ بالعموم یہ ثبوت زاویوں کی صرف ایک محدود دست کے لئے درست ہوتے ہیں۔

(۱) ضابطہ مس^۱ (ا + ب) = مس^۲ (ا + ب) - مس^۳ (ا + ب) ثابت کرو۔



(56)

فرض کرو کہ ایک دائرے کے دو وتر ا ب، ج د ایک دوسرے کے علی القوا اٹھ ہیں۔ اور فرض کرو کہ زاویے ا د ع، ب د ع کو ل اور ب سے تعبیر کیا گیا ہے، تو چونکہ

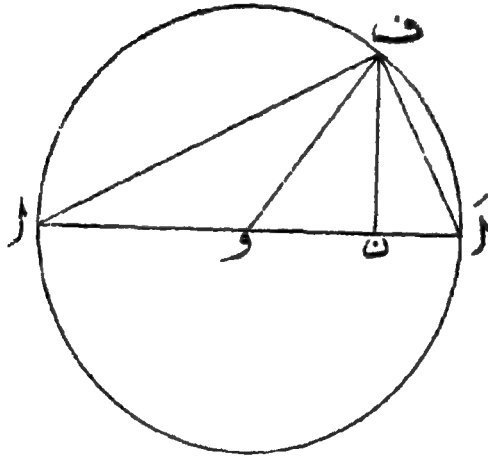
$$ا ع \times ب = ج ع \times د ع \quad \text{اس لئے}$$

$$\frac{ا ع \pm ج ب}{د ع} = \frac{ج ع \pm ا ب}{د ع} = \frac{ا ع \times ب}{ج ع \times د} = \frac{ب}{د}$$

$$\text{اس لئے} \quad \frac{\text{مس ل} \pm \text{مس ب}}{\text{ا پس اس ب}} = \text{مس (ل} \pm \text{ب)}$$

(۲) مضابطہ ج ب ل = ل = ج ب ل، جم ل،
اور جم ل = جم ل - ج ب ل

ثابت کرو۔



فرض کرو کہ ا د ل، دائرہ کا ایک قطر ہے اور ل ا = ل ب ف و ل = ل،
ف ن ل ل پر عمود نکالو۔

اس لئے $\frac{ا ب}{ب ع} = ۳ = ۱ - ۳ = ۳$ جب $ا$ ؛

پس جب ۳ $ا = ۱ = \frac{ب د}{ب ع} = \frac{ب د}{ا ب} \times \frac{ا ب}{ب ع} = ۳$ جب $ا = ۳$ جب $ا$ ؛

اور جب ۳ $ا = ۳ = \frac{د ع}{ب ع} = \frac{د ج}{ب ع} - \frac{ج ع}{ب ع} = \frac{د ج}{ب ج} - \frac{ج ع}{ب ج} = \frac{د ج}{ا ب} - \frac{ج ع}{ا ب}$

= جب $ا$ (۳ جب $ا$ - ۱) - ۲ جب $ا$ = ۳ جب $ا$ - ۳ جب $ا$

(۱) اور (۳) کے ثبوت مسٹر ہارٹ نے (Messenger of Mathematics) کی جلد چارم میں دئے تھے۔

مشالیں

ضوابط ایں کو ہندسی طور پر ثابت کرو۔

$$(۱) \text{ مس } ا = \frac{۱ - \text{جم } ا}{۱ + \text{جم } ا}$$

$$۲ \text{ مس } (۱ + ۲۵) - \text{مس } (۲۵) = ۱ = ۲ \text{ مس } ا$$

$$(۲) \text{ جب } ا \text{ جب } ب = \text{جب } ا \text{ جب } ب = \frac{۱}{۲} (۱ + ب) - \text{جب } ا \text{ جب } ب = \frac{۱}{۲} (۱ - ب)$$

$$(۳) \text{ جب } ا + \text{جب } ب = \text{جب } (د + ع) = ۲ - \text{جب } ع \text{ جب } ب = \text{جم } (ع + د)$$

$$(۴) \text{ مس } ا = \frac{م - ن}{م + ن} = \frac{ن}{م}$$

$$(۵) \text{ جم } ا + \text{جم } ب + \text{جم } ج = ۲ + \text{جم } ا \text{ جب } ب \text{ جب } ج = ۱$$

$$\text{جہاں } ا + ب + ج = ۱۸۰$$

$$(۶) \text{ جب } ا + \text{جب } ب - \text{جب } ج = \text{جب } ا \text{ جب } ب = \frac{۱}{۲} \text{ جب } ا \text{ جب } ب \text{ جب } ج = \frac{۱}{۲} \text{ جب } ا \text{ جب } ج$$

$$\text{جہاں } ا + ب + ج = ۱۸۰$$

$$(۸) \text{ مم ط } = \text{قم ط } + \text{مم ط }$$

$$(۹) \text{ جم } ۲۶ - \text{ جب } ۱۸ = \frac{۱}{۲}$$

چوتھے باب پر مثالیں

مثبتات آتا ۱۵ ثابت کرو۔

$$\begin{aligned} ۱ - \text{ جم } ۱ + \text{ جم } (۱۲۰ + ۱) + \text{ جم } (۱۲۰ - ۱) &= \frac{۳}{۲} \\ ۲ - \text{ جم } ۱ + \text{ جب } ۱ + ۲ + (\text{جم } ۱ - \text{ جب } ۱) &= ۳ - \text{ جم } ۱ \\ ۳ - \text{ جب } ۳ + \text{ جب } ۱ + \text{ جم } ۳ + \text{ جم } ۱ &= \text{ جم } ۲ \end{aligned}$$

$$۴ - \text{ جم } ۲ + \text{ جب } ۳ + \text{ جم } ۳ + \text{ جب } ۳ = ۳ - \text{ جب } ۳$$

$$۵ - \text{ جب } ۱ + \text{ جب } (۱۲۰ + ۱) - \text{ جب } (۱۲۰ - ۱) = \frac{۳}{۲} - \text{ جب } ۳$$

$$۶ - \frac{\text{ جب } ۱ + \text{ جب } ۳ + \text{ جب } ۵ + \text{ جب } ۷}{\text{ جم } ۱ + \text{ جم } ۳ + \text{ جم } ۵ + \text{ جم } ۷} = \text{ مس } ۲$$

$$۷ - ۱۶ \text{ جم } ۵ - \text{ جم } ۵ = ۵ \text{ جم } ۱ (۱ + ۲ \text{ جم } ۲)$$

$$۸ - \text{ قم } (م + ن) \text{ لا قم م لا قم ن لا} - \text{ مم } (م + ن) \text{ لا مم م لا مم ن لا}$$

$$= \text{ مم م لا} + \text{ مم ن لا} - \text{ مم } (م + ن) \text{ لا}$$

$$۹ - ۳ \text{ جم } ۱ (جم ۳ ب - جم ۳ ج)$$

$$= ۲ (جم ب - جم ج) (جم ج - جم ب) (جم ۱ - جم ب) (جم ۱ - جم ج) (جم ۱ + جم ب + جم ج)$$

$$۱۰ - ۳ \text{ جب } ۱ (جب ۳ ب + جب ۳ ج) (جب ب - جب ج)$$

$$= \text{ جب } (ب - ج) (جب ج - جب ب) (جب ۱ - جب ب) (جب ۱ - جب ج) (جب ۱ + جب ب + جب ج)$$

$$۱۱ - \text{ مس } (۱۰ + ۱) \text{ مس } (۱۰ - ۱) + \text{ مس } ۱ \text{ مس } (۱۰ + ۱) + \text{ مس } (۱۰ - ۱) \text{ مس } ۱$$

$$۳ - =$$

$$۱۲ - \text{ مم } (۱۰ + ۱) \text{ مم } (۱۰ - ۱) + \text{ مم } ۱ \text{ مم } (۱۰ + ۱) + \text{ مم } (۱۰ - ۱) \text{ مم } ۱$$

$$۳ - =$$

$$-۱۳ \quad \frac{\text{جم ۱۲}}{\text{جم ۱}} - \frac{\text{جم ۱۱}}{\text{جم ۲}} + \frac{\text{جم ۱۰}}{\text{جم ۳}} - \frac{\text{جم ۹}}{\text{جم ۴}}$$

$$= ۲ (\text{جم ۱۲} - \text{جم ۱۱} + \text{جم ۱۰} - \text{جم ۹})$$

$$-۱۴ \quad ۳ = \frac{\text{جب (ب + ج + د + ۱)}}{\text{جب (ب - ۱) جب (ب - ج) جب (د - ۱)}}$$

$$-۱۵ \quad \frac{\text{جم ۲ ب}}{\text{جم ۱ ب}} + \frac{\text{جب (ب - ۱) جب (ب - ج) جب (ب - د) جب (ب - ج)}}{\text{جم ۲ ج}} = ۸ \text{ جب (ب + ج) + ق م ا ق م ب ق م ج}$$

اگر ۱ ب + ج = ۳۲ تورابط از مثال ۱۶ تا ۲۷ ثابت کرد :-

$$-۱۶ \quad ۳ \text{ م ا م ب م ج} = ۳ \text{ س ۱} - ۲ \text{ م ۳}$$

$$-۱۷ \quad ۳ \text{ م ا} = \text{م ا م ب م ج} + \text{ق م ا ق م ب ق م ج}$$

$$-۱۸ \quad ۳ \text{ جب (ب - ج) م ۱} = \text{جب (ب - ج) جب (ب - ج) جب (ب - ج) جب (ب - ج)}$$

$$-۱۹ \quad ۳ \text{ (جب ب + جب ج) (جم ج + جم ۱) (جم ۱ + جم ب)}$$

$$= \text{جب (ب + جب ج) (جب ج + جب ۱) (جب ۱ + جب ب)}$$

$$-۲۰ \quad ۳ \text{ جب ۱ جم (ب - ج) (جم ۱ - ج)}$$

$$= ۳ \text{ جب ۱ جب ب جب ج + جب ۱ جب ۲ جب ۲ جب ۲ ج}$$

$$-۲۱ \quad ۳ \text{ جب ۲ جب ۲ ج} = ۴ \text{ جب ۱ جب ۱ جب ۱ جب ۱ جب ج + جم ۱ جم ۲ ب}$$

$$+ \text{جم ۲ ج + جم ۱ جم ب جم ج}$$

$$-۲۲ \quad ۳ \text{ جم ۲ (س ب - س ج)}$$

$$= ۲ \text{ جب (ب - ج) جب (ج - ۱) جب (ب - ۱) تظا ق ب ق ط ج}$$

$$\frac{\text{جب ع جب ذ}}{\text{جم ذ} \pm \text{جم ع}} = \text{مس ط}$$

۳۳۔ اگر $\text{ط} = \text{جم ب} + \text{جم}^2 \text{ب}$ ، $\text{ط} = \text{جب} = \text{جب ب} - \text{جب}^2 \text{ب}$
تو ثابت کرو کہ $\pm \text{جب} (\text{ب} - \text{ب}) = \text{جم}^2 \text{ب} = \frac{1}{\text{ط}}$

۳۴۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جم}^2 \text{ط} + \text{جم}^2 \text{ذ}}{\text{جم} (\text{ط} - \text{ذ}) - 1} = \frac{(\text{جم}^2 + \text{جم} (\text{ط} + \text{ذ})) - (\text{جب}^2 + \text{جب} (\text{ط} + \text{ذ}))}{1}$$

۳۵۔ اگر ط اور ذ مساوات

$$\text{جب ط} + \text{جب ذ} = \text{ط} = \text{جم} (\text{ط} - \text{جم}^2 \text{ط})$$

کو پورا کریں تو $\text{جب}^2 \text{ط} + \text{جب}^2 \text{ذ} = 1$

۳۶۔ ثابت کرو کہ $\text{مس} 20 = \text{مس} 24 + 20 \text{ مس} 4 + \text{مس} 10$

۳۷۔ اگر $\frac{\text{جم}^2 \text{ع}}{\text{جم}^2 \text{ب}} + \frac{\text{جب}^2 \text{ع}}{\text{جب}^2 \text{ب}} = 1$ تو

$$1 = \frac{\text{جم}^2 \text{ب}}{\text{جب}^2 \text{ب}} + \frac{\text{جب}^2 \text{ب}}{\text{جب}^2 \text{ب}}$$

۳۸۔ اگر $\text{جم} (\text{ب} + \text{ب}) = \text{جم} (\text{ج} + \text{د}) = \text{جم} (\text{ب} - \text{ب}) = \text{جم} (\text{ج} - \text{د})$

تو $\text{جم} \text{ب} \text{م} \text{ب} = \text{جم} \text{ج} = \text{جم} \text{د}$

۳۹۔ اگر $\text{ع} + \text{ب} + \text{ب} = \frac{1}{\text{ط}} = 1$ تو

$(\text{جم}^2 \text{ع} + \text{جب}^2 \text{ع}) (\text{جم}^2 \text{ب} + \text{جب}^2 \text{ب}) = (\text{جم}^2 \text{ج} + \text{جب}^2 \text{ج}) = (\text{جم}^2 \text{د} + \text{جب}^2 \text{د})$

$+ \text{جب}^2 \text{ط} = \text{جب}^2 \text{ب} + \text{جب}^2 \text{ج}$

۴۰۔ اگر $\text{ب} + \text{ج} = 1$ ، اور $\text{جم} \text{ب} = \text{جم} \text{ج}$

تو $\text{جم} \text{ب} \text{م} \text{ج} = \frac{1}{\text{ط}}$

۴۱۔ اگر $\text{جم}^2 \text{ع} + \text{جب}^2 \text{ع} = \text{جم}^2 \text{ج} + \text{جب}^2 \text{ج} + \text{جب}^2 \text{ب} + \text{جب}^2 \text{د}$

-۲ جب ۱ جب ۲ - ۲ جب ۳ جب ۴ - ۲ جب ۵ جب ۶ = .
تو ثابت کرو کہ $\frac{1}{n} \pm \frac{1}{n} \pm \dots$ کا ضعف ہے ۔

۴۴۔ اگر $\frac{\text{مس (ع + ب - ج)}}{\text{مس (ع - ب + ج)}} = \frac{\text{مس ج}}{\text{مس ب}}$ تو ثابت کرو کہ

جب ۲ ط + جب ۲ ب + جب ۲ ج =
 ۴م - اگر قطعه = قطعه قطعه + مس به مس به
 تو ثابت کرد که قطعه = قطعه قطعه + مس به مس به
 ۴م - اگر $\frac{\text{جب ط جم} - \text{جم ط جب} - \text{جب ج جم} - \text{جم ج جب}}{\text{جم ط مس} - \text{جم ج مس} - \text{جم ب مس} - \text{مس ب جم}} = \frac{\text{جم (ط + ج)}}{\text{جم (ط + ج)}}$
 تو $\frac{\text{جب ط جم} - \text{جم ط جب} - \text{جب ج جم} - \text{جم ج جب}}{\text{جم ط مس} - \text{جم ج مس} - \text{جم ب مس} - \text{مس ب جم}} = \frac{\text{جب ط جم} - \text{جم ط جب} - \text{جب ج جم} - \text{جم ج جب}}{\text{جم ط مس} - \text{جم ج مس} - \text{جم ب مس} - \text{مس ب جم}} = \frac{\text{جم (ط + ج)}}{\text{جم (ط + ج)}}$

۴۵۔ اگر 'ب' ج خبت زاوئے ہوں ایسے کہ (ا + ب + ج = ۹۰) ثابت کر دو کہ
 قطا قطب قطع + ۲ = مس ب مس ج = ۲

$$\frac{1 + \frac{\text{جم}(\text{ط} + \text{ع})}{\text{جم}(\text{ع} + \text{ب})}}{\frac{\text{جم}(\text{ط} + \text{ع})}{\text{جم}(\text{ع} + \text{ب})}} = \frac{1 + \frac{\text{جم}(\text{ب} + \text{ج})}{\text{جم}(\text{ط} + \text{ع})}}{\frac{\text{جم}(\text{ب} + \text{ج})}{\text{جم}(\text{ط} + \text{ع})}} = \frac{1 + \frac{\text{جم}(\text{ط} + \text{ع})}{\text{جم}(\text{ب} + \text{ج})}}{\frac{\text{جم}(\text{ط} + \text{ع})}{\text{جم}(\text{ب} + \text{ج})}}$$

توانست کرد که $\text{قم} (ب - ع) + \text{قم} (ج - د) + \text{قم} (د - ه) + \text{قم} (ه - و) = ۱$
 ۴- اگر $\text{جب} ط + \text{جب} ف = ۱۴$ $\text{جب} ط$ و $\text{جب} ف$ / اور $\text{جب} ط + \text{جب} ف = \text{جب} ط$
 توانست کرد که $\text{جب} ط = \text{جب} (ط + ۱۴) \pm \text{جب} (ط + ۱۴) / \text{یا} \text{جب} (ط + ۱۴) \pm \text{جب} (ط + ۱۴) / \text{جم} (ط + ۱۴) = ۱۴$
 ۵- اگر $\text{جم} (ا + ب + ج) = \text{جم} ا + \text{جم} ب + \text{جم} ج$

۴۹۔ اگر $مس ط$ + $مس ذ$ + $مس پ$ = $مس ط$ + $مس ذ$ + $مس پ$ = $مس (ط + ذ + پ)$
 تو یا زادیوں $ط$ ، $ذ$ ، $پ$ میں سے دو ادا کئے $م$ + $\frac{1}{2}م$ ، $ن$ + $\frac{1}{2}ن$ کے ضعف ہیں۔
 کے مساوی ہیں یا ان میں سے ایک اور نیز باقی دو کا مجموعہ $ن$ کے ضعف ہیں۔

$$۵۰۔ اگر جب (ب-ج) جم (ط-ع) + جب (ج-د) جم (ط-ب) + جب (د-ه) جم (ط-ج) =$$

$$= جب (ب-ج) جم (ج-د) جب (د-ه) جب (ه-ب)$$

تو ثابت کرو کہ جم ط = جم ع جم ب جم ج

$$۵۱۔ اگر د، ب، ج، ا، ع کوئی چار زادے ہوں اور ۲ ض = ع + ج + د + ض تو$$

$$جم ع جم ب جم ج جم ض + جب ع جب ب جب ج جب ض$$

$$= جم (ض-ع) جم (ب-ج) جم (ج-د) جم (د-ض)$$

$$+ جب (ض-ع) جب (ب-ج) جب (ج-د) جب (د-ض)$$

۵۲۔ ثابت کرو کہ

(61)

$$\{ مس ا = ۲ مس ا \} \{ قم مس ا = ۱ مس ا \}$$

۵۳۔ ثابت کرو کہ

$$\{ مس ا + ۲ مس ا = ۱ مس ا \} \{ جب ا = \frac{۲(۱+۱)(۱+۱)}{(۲+۱)(۱+۱)} \}$$

۵۴۔ ثابت کرو کہ

$$مس ا \left\{ \frac{۱}{۲} (جم ۲ قط ۲ + جم ۲ قط ۲) \right\} = مس ا \{ ۱ + ۲ (مس ا - ۱) \} + مس ا$$

۵۵۔ ثابت کرو کہ

$$مس ا + مس ا + مس ا = ۳ = ۲ (مس ا + مس ا + مس ا) + مس ا$$

$$۵۶۔ اگر جم ا + جم ا + جم ا = ۱$$

$$تو لا + ا + ا + ۲ لا م ا = ۱$$

$$۵۷۔ اگر مس ا = ۵ مس ا لا تو ما کو کے ایک جبری تفاعل کے طور پر معلوم کرو۔$$

$$اس لئے ثابت کرو کہ مس ا، مساوات ۵ لا، ۱۰ لا، ۱ = کی ایک$$

اصل ہے۔

۵۸۔ اگر ۲ = ع + ب + ج تو ثابت کرو کہ

$$\text{مست} \left(\frac{2 \text{ جم ع جم ب جم ج}}{1} \right) - \text{مست} [\text{س} \text{ ش مس} (\text{ش} - \text{ع}) \text{ مس} (\text{ش} - \text{ب}) \text{ س} (\text{ش} - \text{ج})]$$

= مست ۱

۵۹۔ ثابت کرو کہ

$$\text{مست} \left[\frac{1 (1 + \text{ب} + \text{ج})}{\text{ب ج}} \right] + \text{مست} \left[\frac{\text{ب} (1 + \text{ب} + \text{ج})}{\text{ج ۱}} \right] + \text{مست} \left[\frac{\text{ج} (1 + \text{ب} + \text{ج})}{\text{ب ۱}} \right] = \text{مست} \left[\frac{1 (1 + \text{ب} + \text{ج})}{\text{ب ج ۱}} \right]$$

۶۰۔ ثابت کرو کہ مساوات

جب ۱ = جب ۲ = جب ۳ = جب ۴ = ن (جہاں ن صحیح عدد ہے)
کا جبری ماثل حسب ذیل ہے

$$\{ ۳ (س - ما) (ما - س) (س - ی) (س - ی) (س - ی) - (لا + ما + ی) (لا + ی + ما) (لا + ما + ی) \} \\ \times \{ ۳ (س - لا) (لا - س) (س - ی) (س - ی) (س - ی) - (لا + ی + ما) (لا + ی + ما) (لا + ی + ما) \} \\ = \{ (ما - لا) (ی - لا) \}$$

جہاں ۲ س = لا + ما + ی + ۶

مثال ۶۱ تا ۶۷ کی مساواتیں حل کرو۔

۶۱۔ جب ۱ = ۲ جم ط = ۱

۶۲۔ جب ۵ ط = ۱۶ جب ۵ ط

۶۳۔ جب ط = جب ۳ ط = جب ۴ ط

۶۴۔ مس ۲ ط = ۸ جم ۲ ط = ۸ جم ط

۶۵۔ مس (۲۵ + ۱) = ۳ س (۲۵ - ۱)

۶۶۔ ۲ جب (ط - ف) = جب (ط + ف) = ۱

۶۷۔ قط ۴ ط = قط ۲ ط = ۲

(62)

$$۶۸ - \text{جب م ط} + \text{جب ن ط} + \text{جب (م + ن) ط} = ۰$$

$$۶۹ - \text{جب } \frac{۱+ن}{۲} \text{ ط} + \text{جب } \frac{۱-ن}{۲} \text{ ط} = \text{جم ط}$$

$$۷۰ - \text{مس ط} + \text{قط ۲ ط} = ۱$$

$$۷۱ - ۲ (\text{جب ط} + \text{جم ط}) = ۱$$

$$۷۲ - \text{س ط} + \text{مس ۳ ط} + \text{مس ۵ ط} = ۰$$

$$۷۳ - \text{م ۱ لا} - \text{م ۲ لا} = (۲ + لا) = ۹۵$$

$$۷۴ - \text{ا جب ۱ لا} + \text{ب جم ۱ ما} = \text{ع ۱}$$

$$\text{و جم ۱ لا} - \text{ب جب ۱ ما} = \text{چ ۱}$$

$$۷۵ - \text{ق ۱ م ع} - \text{ق ۲ م ط} = \text{م ۲ م ع} - \text{م ۳ م ط}$$

$$۷۶ - \text{تفاعلوں (۱) جب لا} + \text{جب ۲ لا}$$

$$\text{(ب) جم ۲ لا} \text{جم لا}$$

کی ترتیبات کیجیے۔

$$۷۷ - \text{مسادات (ا) جب ط} - \text{جم ع} = \text{ب (جب ع} - \text{جم ط)}$$

کے سب حل دریافت کرو۔

$$۷۸ - \text{اگر م صحیح عدد ہو اور لا} + \text{ب} + \text{ج} = ۱۱ \text{ تو ثابت کرو کہ}$$

$$\text{جب ۲ م لا} + \text{جب ۲ م ب} + \text{جب ۲ م ج} = (۱ - \text{ا}) \text{ 'م جب م ا جب م ب جب م ج'}$$

$$\text{جم ۲ م لا} + \text{جم ۲ م ب} + \text{جم ۲ م ج} = (۱ - \text{ا}) \text{ 'م جم م لا جم م ب جم م ج'}$$

$$۷۹ - \text{ثابت کرو کہ لا} + \text{ا لا ی} + \text{ب ی} = \text{م لا ما}$$

$$\text{جہاں لا} = \text{جب لا} + \text{جب ب} + \text{جب ج} ، \text{ا} = \text{جب ب جب ج} + \text{جب ج جب لا}$$

$$+ \text{جب لا جب ب} ، \text{ی} = \text{جب ا جب ب جب ج}$$

$$۸۰ - \text{اگر } \frac{\text{مس ب مس ج}}{\text{جم ا}} + \frac{\text{ا مس ج مس لا}}{\text{جم ب}} = \frac{\text{ا مس ا مس ب}}{\text{جم ج}}$$

تو ثابت کرو کہ یا تو مس (ا) مس ب، مس ج سلسلہ حسابیہ میں ہیں یا

ا + ب + ج = ۲۲ کا ایک صحیح عددی صفت ہے۔

۸۱۔ اگر جم (ا) = جم ط جب ف، جم با = جم ف جب پ، جم ج = جم پ جب ط

اور ا + با + ج = ۲۲ تو ثابت کرو کہ مس ط مس ف مس پ = ۱

۸۲۔ ان ساداتوں کو حل کرو۔

$$۴ (جم ۲ ط + جم ۴ ط) (جم ۳ ط + جم ۵ ط) = ۱$$

$$۴ (جم ۳ ط + جم ۵ ط) (جم ۶ ط + جم ۷ ط) = ۱$$

(63)

پانچواں باب

تحت ضلعی زاویوں کے دائری تفاعل

ضوابط

۵۵۔ اگر ہم گزشتہ باب کے ضابطہ (۴۳) میں $\frac{1}{p}$ کی بجائے $\frac{1}{e}$ لکھیں تو

جم $\frac{1}{e} =$ جم $\frac{1}{p} - e$ جب $\frac{1}{p} = e = 2$ جم $\frac{1}{e} = 1 - 1 = 0$ جب $\frac{1}{p} = 1$ اس لئے

۱۔ جم $\frac{1}{e} = 2$ جب $\frac{1}{p} = e$ ، ۱ + جم $\frac{1}{e} = 2$ جم $\frac{1}{p} = e$ ،

جذر المربع لینے سے جم $\frac{1}{p} = e$ اور جب $\frac{1}{p} = e$ کے لئے جم $\frac{1}{e}$ کی رقوم میں

حسب ذیل ضابطے حاصل ہوتے ہیں۔

$$\text{جب } \frac{1}{p} = e = \sqrt{\frac{1}{p} - 1} \text{ جم } e$$

$$\text{جم } \frac{1}{p} = e = \sqrt{\frac{1}{p} + 1} \text{ جم } e$$

ان میں سے پہلے ضابطہ کو دوسرے سے تقسیم کر دو

$$\text{مس } \frac{1}{p} = e = \sqrt{\frac{-1 \text{ جم } e}{+1 \text{ جم } e}}$$

ان تین ضابطوں میں علامت کا ابہام ہے، اب اگر e دیا گیا ہے تو

تفاعلوں جب $\frac{1}{p}$ ع، جم $\frac{1}{p}$ ع، مس $\frac{1}{p}$ ع میں سے ہر ایک کی ایک یگا قیمت ہے، اور اس لئے ان کے لئے جو جملے حاصل ہو گئے ان میں علامت کا ابہام نہیں ہو سکتا۔ محصلہ بالاتین جملوں میں علامت کا ابہام اس وجہ سے ہے کہ ان سے جب $\frac{1}{p}$ ع، جم $\frac{1}{p}$ ع، مس $\frac{1}{p}$ ع کی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں جب کہ جم ع کی قیمت دی گئی ہو، نہ کہ جب ع دیا گیا ہو۔ اب جیسا کہ ہم نے دفعہ ۳۳ میں ثابت کیا ہے زاویوں ۲ ن ۲ ع میں سے سب زاویوں کی جیب التمام وہی ہے جو ع کی ہے جبکہ ن ایک صحیح عدد ہو، اس لئے وہ ضابطے جو جب $\frac{1}{p}$ ع، جم $\frac{1}{p}$ ع، مس $\frac{1}{p}$ ع کو جم ع کی رقوم میں بیان کرتے ہیں ان سے نہ صرف خود جب $\frac{1}{p}$ ع، جم $\frac{1}{p}$ ع، مس $\frac{1}{p}$ ع کی قیمتیں حاصل ہونگی بلکہ ان سے ضابطے $\frac{1}{p}$ (۲ ن ۲ ع) میں شریک تمام زاویوں کے ان تفاعلوں کی قیمتیں حاصل ہونگی۔

(64) جب $\frac{1}{p}$ (۲ ن ۲ ع) کی جو قیمتیں ہو سکتی ہیں ان کو معلوم کرنے کے لئے ہمیں دو صورتوں پر غور کرنا چاہیے، ایک وہ صورت جبکہ ن جنت ہو اور دوسری وہ جبکہ ن طاق ہو۔ اگر ن = ۲ م تو

$$\text{جب } \frac{1}{p} (۲ م ۲ ع) = \text{جب } (\pm \frac{1}{p} ع) = \pm \text{جب } \frac{1}{p} ع$$

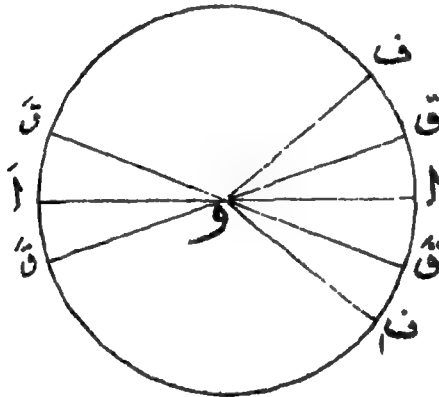
لیکن اگر ن = ۲ م + ۱ تو

$$\text{جب } \frac{1}{p} (۲ م ۲ ع + ۲ ن ۲ ع) = \text{جب } (\pm \frac{1}{p} ع) = \mp \text{جب } \frac{1}{p} ع$$

پس جب $\frac{1}{p}$ ع اور - جب $\frac{1}{p}$ ع کی قیمتیں اس ضابطے سے حاصل ہوتی ہیں جو جب $\frac{1}{p}$ ع کو جم ع کی رقوم میں بیان کرتا ہے۔

اسی طرح یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ $\frac{1}{p}$ (۲ ن ۱۱ ± ع) اور $\frac{1}{p}$ (۲ ن ۱۱ ± ع) کی قیمتیں ± جم $\frac{1}{p}$ ع ± مس $\frac{1}{p}$ ع ہیں، اور اس طرح اُن ضابطوں سے جو جم $\frac{1}{p}$ ع اور مس $\frac{1}{p}$ ع کو جم ع کی رقوم میں بیان کرتے ہیں جم $\frac{1}{p}$ ع ± جم $\frac{1}{p}$ ع اور مس $\frac{1}{p}$ ع ± مس $\frac{1}{p}$ ع کی قیمتیں علی الترتیب حاصل ہوتی ہیں۔ پس مذکورہ صدر تین ضابطوں میں علامت کا جواہام ہے اُس کی توضیح ہو چکی۔

۵۶۔ مصلد بالا تین ضابطوں میں علامت کا جواہام ہے اُس کی مہندسی توضیح بھی ہو سکتی ہے۔



اگر اوف = ع اور اوف = ع تو ہم اختتامی زاویوں کے دو جٹ (وا، وف)، (وا، وف) ہی وہ جٹ ہیں جن میں سے ہر زاوے کی جیب اتمام وہی ہے جو ع کی ہے، اگر زاویوں اوف، اوف کے ناصف علی الترتیب ق و ق، ق و ق ہوں تو زاویوں (وا، وف) کا ناصف وقی یا وق ہے، اس لئے جب $\frac{1}{p}$ ع، جم $\frac{1}{p}$ ع، مس $\frac{1}{p}$ ع کے ضابطوں سے جبکہ جم ع دیا گیا ہو ان تمام ہم اختتامی

زاویوں کی جیب، جیب التمام ماس حاصل ہوتے ہیں جو چار جٹوں (واوق) (واوق) (واوق) (واوق) میں شامل ہیں۔ پہلے اور چوتھے جٹوں کے زاویوں کی جیب، جب $\frac{1}{2}$ ع کے مساوی ہیں، اور دوسرے اور تیسرے جٹوں کے زاویوں کی جیب، جب $\frac{1}{2}$ ع کے مساوی ہیں، پہلے اور تیسرے جٹوں کے زاویوں کی جیب التمام، جم $\frac{1}{2}$ ع کے مساوی ہیں اور دوسرے اور چوتھے جٹوں کی جیب التمام، جم $\frac{1}{2}$ ع کے مساوی ہیں، پہلے اور دوسرے جٹوں کے زاویوں کے ماس، مس $\frac{1}{2}$ ع کے مساوی ہیں، اور تیسرے اور چوتھے جٹوں کے زاویوں کے ماس، مس $\frac{1}{2}$ ع کے مساوی۔

(65)

۵۶۔ اب ہم دفعہ ۵ کے تین ضابطوں سے علامت کے ابہامات دور کریں گے۔ تفاعل جب $\frac{1}{2}$ ع مثبت یا منفی ہے بموجب اس کے کہ $\frac{1}{2}$ ع، 2π اور $(1 + 2\pi)$ کے درمیان یا $(1 + 2\pi)$ اور 2π کے درمیان واقع ہو، یعنی بموجب اس کے کہ $\frac{1}{2}$ ع، 2π اور $2\pi + 1$ کے درمیان واقع ہو۔ اس لئے ہمیں ضابطہ

$$\text{جب } \frac{1}{2} \text{ ع} = (-1)^{\frac{1}{2}} (1 - \text{جم } \frac{1}{2} \text{ ع}) \dots \dots (1)$$

حاصل ہوتا ہے جس میں $\frac{1}{2}$ ع ایسا مثبت یا منفی صحیح عدد ہے جو جبری طور پر $\frac{1}{2}$ ع سے عین چھوٹا ہے۔ تفاعل جم $\frac{1}{2}$ ع مثبت یا منفی ہے بموجب اس کے کہ $\frac{1}{2}$ ع، 2π اور $2\pi + 1$ کے درمیان یا 2π اور $2\pi + 1$ کے درمیان واقع ہو۔

اور ۲ ن ۲ + ۳ کے درمیان واقع ہو یعنی بموجب اس کے کہ $\frac{1}{4}$ (۲ + ۳) کے ۲ ن اور ۲ ن + ۱ یا ۲ ن + ۱ اور ۲ ن + ۲ کے درمیان واقع ہو؛ اسلئے

$$\text{جم } \frac{1}{4} \text{ عہ} = (1 - \frac{1}{4}) \sqrt{\frac{1}{4} (\text{جم} + 1)} \dots \dots (2)$$

جس میں ق وہ صحیح عدد ہے جو $\frac{1}{4}$ (۲ + ۳) سے جبری طور پر عین چھوٹا ہے۔
اسی طرح
مس $\frac{1}{4} \text{ عہ} = (1 - \frac{1}{4}) \sqrt{\frac{1}{4} (\text{جم} + 1)}$ (۳)

جس میں عدد ف - ق ہمیشہ یا تو صفر ہے یا ± 1 ۔

۵۸۔ اگر جم گزشتہ باب کے ضابطہ (۳۵) میں ا کی بجائے $\frac{1}{4} \text{ عہ}$ لکھیں تو

جب عہ = ۲ جب $\frac{1}{4} \text{ عہ}$ جم $\frac{1}{4} \text{ عہ}$
اس لئے
مس $\frac{1}{4} \text{ عہ} = \frac{\text{جب } \frac{1}{4} \text{ عہ}}{\text{جم } \frac{1}{4} \text{ عہ}} = \frac{\text{جب } \frac{1}{4} \text{ عہ}}{\text{جم } \frac{1}{4} \text{ عہ}} = \frac{\text{جب } \frac{1}{4} \text{ عہ}}{\text{جب } \frac{1}{4} \text{ عہ}}$
اس طرح ہیں حسب ذیل دو ضابطے ملتے ہیں:-

مس $\frac{1}{4} \text{ عہ} = \frac{\text{جب عہ}}{1 + \text{جم عہ}} = \frac{1 - \text{جم عہ}}{\text{جب عہ}} \dots \dots (4)$

جن سے مس $\frac{1}{4} \text{ عہ}$ بغیر کسی ابہام کے حاصل ہوتا ہے۔ ان ضابطوں سے مس $\frac{1}{4} \text{ عہ}$ حاصل ہوگا جبکہ جب عہ اور جم عہ دونوں دئے جائیں؛ اب ضابطہ ۲ ن ۲ + ۳ میں وہ سب زاویے شامل ہیں جن کی جیب اور جیب التمام وہی ہیں جو عہ کی جیب اور جیب التمام ہیں، اس لئے مس $\frac{1}{4} \text{ عہ}$ کے مذکورہ بالا ضابطوں سے جو جب عہ اور جم عہ کی قوم میں بیان ہوئے ہیں زاویوں ۲ ن ۲ + ۳ میں سے سب زاویوں کے ماس حاصل ہوتے ہیں؛ اور

(66) یہ تمام زاوے ایک ہی ماس مس $\frac{1}{p}$ عہ رکھتے ہیں، اسی وجہ سے ضوابط (۴) میں علامت کا ابہام نہیں ہے۔

۵۹۔ اب ہم جب عہ کی رقوم میں جب $\frac{1}{p}$ عہ، جم $\frac{1}{p}$ عہ، مس $\frac{1}{p}$ عہ کے لئے ضابطے حاصل کریں گے۔ ہم جانتے ہیں کہ

$$+ \text{جب عہ} = +1 + \text{جب } \frac{1}{p} \text{ عہ جم } \frac{1}{p} \text{ عہ} = (\text{جب } \frac{1}{p} \text{ عہ} + \text{جم } \frac{1}{p} \text{ عہ})$$

$$\text{نیز } - \text{جب عہ} = -1 - \text{جب } \frac{1}{p} \text{ عہ جم } \frac{1}{p} \text{ عہ} = (\text{جب } \frac{1}{p} \text{ عہ} - \text{جم } \frac{1}{p} \text{ عہ})$$

$$\text{اس لئے } \text{جب } \frac{1}{p} \text{ عہ} + \text{جم } \frac{1}{p} \text{ عہ} = \pm \sqrt{+1 + \text{جب عہ}}$$

$$\text{جب } \frac{1}{p} \text{ عہ} - \text{جم } \frac{1}{p} \text{ عہ} = \pm \sqrt{-1 - \text{جب عہ}}$$

$$\text{اس لئے } \text{جب } \frac{1}{p} \text{ عہ} = \frac{1}{p} \{ \pm \sqrt{+1 + \text{جب عہ}} \pm \sqrt{-1 - \text{جب عہ}} \}$$

$$\text{جم } \frac{1}{p} \text{ عہ} = \frac{1}{p} \{ \pm \sqrt{+1 + \text{جب عہ}} \mp \sqrt{-1 - \text{جب عہ}} \}$$

مبہم علامتوں میں سے ہر علامت لیا جاسکتی ہے، اس لئے جب عہ کی رقوم میں جب $\frac{1}{p}$ عہ کی چار قسمیں ملتی ہیں۔ یہ ضابطے جو جب $\frac{1}{p}$ عہ اور جم $\frac{1}{p}$ عہ کو جب عہ کی رقوم میں بیان کرتے ہیں ان سے علی الترتیب ان تمام زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام حاصل ہوتی ہیں جو ضابطے $\frac{1}{p} (n + (-1)^n)$ عہ میں شامل ہیں، کیونکہ جیسا کہ ہم نے دفعہ (۳۳) میں بتا دیا ہے ان زاویوں کی جیوب جو $\frac{1}{p} (n + (-1)^n)$ عہ میں شامل ہیں جب عہ کے مساوی ہیں۔ زاویوں $\frac{1}{p} (n + (-1)^n)$ عہ کی جیب اور جیب التمام معلوم کرنے کے لئے ہمیں چار صورتوں پر غور کرنا چاہیے۔

$$(1) \text{ اگر } n = ۴ \text{ م تو}$$

$$\frac{1}{p} (n + (-1)^n) = \frac{1}{p} (۴ + ۱) = \frac{5}{p} \text{ عہ}$$

ان زاویوں کی جیب اور جیب التمام علی الترتیب جب $\frac{1}{p}$ عہ اور حجم $\frac{1}{p}$ عہ ہے
(۲) اگر $n = m + 1$ تو

$$\frac{1}{p} (n) + \pi (1 - \text{عہ}) = m^2 + \pi \frac{1}{p} + \pi \frac{1}{p} - \frac{1}{p} \text{ عہ}$$

ان زاویوں کی جیب اور جیب التمام علی الترتیب حجم $\frac{1}{p}$ عہ اور جب $\frac{1}{p}$ عہ ہے۔
(۳) اگر $n = m + 2$ تو

$$\frac{1}{p} (n) + \pi (1 - \text{عہ}) = m^2 + \pi + \pi \frac{1}{p} + \frac{1}{p} \text{ عہ}$$

ان زاویوں کی جیب اور جیب التمام علی الترتیب - جب $\frac{1}{p}$ عہ اور - حجم $\frac{1}{p}$ عہ ہے
(۴) اگر $n = m + 3$ تو

$$\frac{1}{p} (n) + \pi (1 - \text{عہ}) = (m+1)^2 + \pi \frac{1}{p} - \pi \frac{1}{p} - \frac{1}{p} \text{ عہ}$$

ان زاویوں کی جیب اور جیب التمام علی الترتیب - حجم $\frac{1}{p}$ عہ اور - جب $\frac{1}{p}$ عہ
کے مساوی ہے۔

اس طرح جب $\frac{1}{p}$ عہ کے ضابطے سے چار قیمتیں جب $\frac{1}{p}$ عہ حجم $\frac{1}{p}$ عہ،
- جب $\frac{1}{p}$ عہ، - حجم $\frac{1}{p}$ عہ حاصل ہوتی ہیں اور حجم $\frac{1}{p}$ عہ کے ضابطے سے چار قیمتیں
حجم $\frac{1}{p}$ عہ، جب $\frac{1}{p}$ عہ، - حجم $\frac{1}{p}$ عہ، - جب $\frac{1}{p}$ عہ -

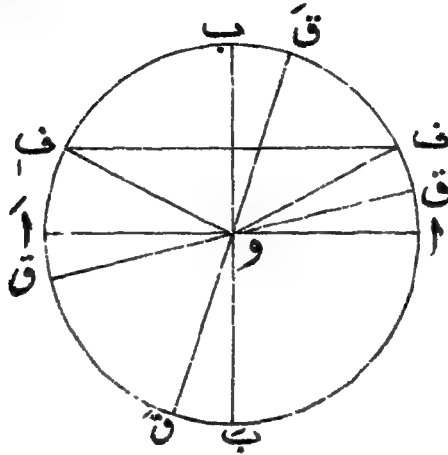
لا اور ما کی قیمتوں کے وہ چار جٹ جو مساواتوں

$$\begin{cases} (لا + ما)^2 = 1 + \text{جب عہ} \\ (لا - ما)^2 = 1 - \text{جب عہ} \end{cases}$$

کو پورا کرتے ہیں حسب ذیل ہیں

$$\begin{cases} لا = \text{جب } \frac{1}{p} \text{ عہ} \\ ما = \text{حجم } \frac{1}{p} \text{ عہ} \end{cases} ، \begin{cases} لا = \text{حجم } \frac{1}{p} \text{ عہ} \\ ما = \text{جب } \frac{1}{p} \text{ عہ} \end{cases} ، \begin{cases} لا = -\text{جب } \frac{1}{p} \text{ عہ} \\ ما = -\text{حجم } \frac{1}{p} \text{ عہ} \end{cases} ، \begin{cases} لا = -\text{حجم } \frac{1}{p} \text{ عہ} \\ ما = -\text{جب } \frac{1}{p} \text{ عہ} \end{cases}$$

۶۰۔ گزشتہ دفعہ کے ضابطوں کے ابہامات کی ہندی توضیح
حسب سابق ہو سکتی ہے۔ فرض کرو کہ $ف = ع$ ، $خ = د = ح$ ، $و = ع$ تو وہ



زاوئے جن کی جیب وہی ہے جو ع کی ہے ہم اختتامی زاویوں (و، ا، و، ف)،
(د، ا، و، ف) کے دو جٹ ہیں، پس اگر زاویوں ا، و، ف، ا، و، ف کے
نام صف ق و ق، ق و ق ہوں تو ہم اختتامی زاویوں (و، ا، و، ق)
(و، ا، و، ق)، (و، ا، و، ق)، (و، ا، و، ق) کے چار جٹ وہ زاوئے ہونگے
جن کی جیب اور جیب التمام ان ضابطوں سے حاصل ہوگی جو جب $\frac{1}{2}ع$
جم $\frac{1}{2}ع$ کو بیان کرتے ہیں جبکہ جب $\frac{1}{2}ع$ دیا گیا ہو۔ ہم دیکھتے ہیں کہ ق و ب
 $= \frac{1}{2}ع$ اور ق و ا $= \frac{1}{2}ع$ (۲۲-ع)، اس لئے ہم اختتامی زاویوں کے ان
چار جٹوں کی جیب جب $\frac{1}{2}ع$ ، جب $\frac{1}{2}ع$ ، جب $\frac{1}{2}ع$ ، جب $\frac{1}{2}ع$ ہیں۔
اور ان کی جیب التمام جم $\frac{1}{2}ع$ ، جم $\frac{1}{2}ع$ ، جب $\frac{1}{2}ع$ ، جب $\frac{1}{2}ع$ ہیں۔
ہیں۔ جب $\frac{1}{2}ع$ ، جم $\frac{1}{2}ع$ کی علی الترتیب چار قیمتیں ہیں جو اوپر کے دو
ضابطوں سے حاصل ہوتی ہیں۔

۶۱۔ چونکہ

$$\text{جب } \frac{1}{p} \text{ ع} + \text{جم } \frac{1}{p} \text{ ع} = 2r \left(\frac{1}{p} \text{ جب } \frac{1}{p} \text{ ع} + \frac{1}{p} \text{ ع} = \text{جم } \frac{1}{p} \text{ ع} \right) \\ 2r \text{ جب } \left(\frac{1}{p} \text{ ع} + \frac{1}{p} \text{ ع} \right) =$$

اور اسی طرح (68)

جب $\frac{1}{p} \text{ ع} - \text{جم } \frac{1}{p} \text{ ع} = 2r \text{ جب } \left(\frac{1}{p} \text{ ع} - \frac{1}{p} \text{ ع} \right)$
اس لئے جب $\frac{1}{p} \text{ ع} + \text{جم } \frac{1}{p} \text{ ع}$ مثبت ہے یا منفی ہو جب اس کے کہ $\frac{1}{p} \text{ ع}$
 $\frac{1}{p} + 2n$ اور $2n + 1$ کے درمیان واقع ہے یا $2n + 1$ اور $2n + 2$ کے درمیان۔
اور جب $\frac{1}{p} \text{ ع} - \text{جم } \frac{1}{p} \text{ ع}$ مثبت ہے یا منفی ہو جب اس کے کہ $\frac{1}{p} \text{ ع} - 2n$ اور $2n + 1$ کے درمیان واقع ہے یا $2n + 1$ اور $2n + 2$ کے درمیان۔
اس لئے

$$\text{جب } \frac{1}{p} \text{ ع} + \text{جم } \frac{1}{p} \text{ ع} = (-1)^f (1 + \overline{1}) \text{ جب ع} ،$$

$$\text{جب } \frac{1}{p} \text{ ع} - \text{جم } \frac{1}{p} \text{ ع} = (-1)^q (1 - \overline{1}) \text{ جب ع} ،$$

جہاں f مثبت یا منفی صحیح عدد ہے جو جبری طور پر $\frac{1}{p} \text{ ع} + \frac{1}{p} \text{ ع}$ سے عین چھوٹا ہے اور q صحیح عدد ہے جو جبری طور پر $\frac{1}{p} \text{ ع} - \frac{1}{p} \text{ ع}$ سے عین چھوٹا ہے۔ اس طرح ہیں یہ تین ضابطے ملتے ہیں

$$\text{جب } \frac{1}{p} \text{ ع} = \frac{1}{p} \left\{ (-1)^f (1 + \overline{1}) \text{ جب ع} + (-1)^q (1 - \overline{1}) \text{ جب ع} \right\} \quad (5)$$

$$\text{جم } \frac{1}{p} \text{ ع} = \frac{1}{p} \left\{ (-1)^f (1 + \overline{1}) \text{ جب ع} - (-1)^q (1 - \overline{1}) \text{ جب ع} \right\} \quad (6)$$

$$\text{مس } \frac{1}{p} \text{ ع} = \frac{\sqrt{(1-)}^{\text{ف}} + \sqrt{(1-)}^{\text{ق}}}{\sqrt{(1-)}^{\text{ف}} - \sqrt{(1-)}^{\text{ق}}} \text{ جب ع} \quad \dots (۷)$$

۶۲۔ جب $\frac{1}{p}$ ع، جم $\frac{1}{p}$ ع، مس $\frac{1}{p}$ ع کو مس ع کی رقوم میں بیان کرو۔ چونکہ

$$\text{جب } \frac{1}{p} \text{ ع} = \frac{1}{p} (1- \text{جم ع})$$

$$\frac{1}{p} = \left(\frac{1}{\sqrt{(1- \text{مس ع})}} - 1 \right)$$

$$\text{جم } \frac{1}{p} \text{ ع} = \frac{1}{p} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{(1- \text{مس ع})}} \right)$$

$$\text{اس لئے جب } \frac{1}{p} \text{ ع} = \sqrt{\frac{1}{p} \left(\frac{1}{\sqrt{(1- \text{مس ع})}} - 1 \right)}$$

$$\text{جم } \frac{1}{p} \text{ ع} = \sqrt{\frac{1}{p} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{(1- \text{مس ع})}} \right)}$$

$$\text{اور اس لئے مس } \frac{1}{p} \text{ ع} = \frac{\sqrt{(1- \text{مس ع})} + \sqrt{(1- \text{مس ع})}}{\text{مس ع}}$$

ان میں سے ہر ضابطہ میں علامت کے ایہامات ہیں۔ ہم ان کی بحث کو طالب علم پر چھوڑتے ہیں کیونکہ ان کی توضیح پچھلی صورتوں کی طرح ہو سکتی ہے۔

یہ تو جہ طلب ہے کہ مس $\frac{1}{p}$ ع کی قیمتیں، مس $\frac{1}{p}$ ع کی دو درجی مساوات

$$\text{مس ع} = \frac{2 \text{ مس } \frac{1}{p} \text{ ع}}{1 - \text{مس } \frac{1}{p} \text{ ع}}$$

(69)

کی اصلیں ہیں، یہ مساوات گزشتہ باب کے ضابطہ (۴۱) میں ۱ کی بجائے $\frac{1}{p}$ ع رکھنے سے حاصل کی گئی ہے۔

۶۳۔ تفاعل جب π ، $\frac{1}{2}\pi$ ، $\frac{3}{4}\pi$ اور π کے مساوی ہو تو تمام زاویے جن کا \cos وہی ہے جو $\frac{1}{2}\pi$ کے ساتھ متعلق ہیں، کیونکہ وہ تمام زاویے جن کا \sin وہی ہے جو $\frac{1}{2}\pi$ کے ساتھ متعلق ہیں، اور $\frac{1}{2}\pi$ یا $\frac{3}{2}\pi$ کے ساتھ متعلق ہیں جن کے تمام دائری تفاعل وہی ہیں جو π کے ہیں۔ پس

$$\frac{2 \text{ مس } \frac{1}{4} \text{ عه}}{1 \text{ مس } \frac{1}{4} \text{ عه}} = \frac{2 \text{ جب } \frac{1}{4} \text{ عه جم } \frac{1}{4} \text{ عه}}{\text{جم } \frac{1}{4} \text{ عه} + \text{جب } \frac{1}{4} \text{ عه}}$$

$$\frac{\text{جم} = \frac{1}{2} \text{ع} - \text{جب} \frac{1}{2} \text{ع}}{\text{جم} \frac{1}{2} \text{ع} + \text{جب} \frac{1}{2} \text{ع}} = \frac{1 - \text{مس} \frac{1}{2} \text{ع}}{1 + \text{مس} \frac{1}{2} \text{ع}}$$

اس لئے نیز $\frac{2\text{ مس } \frac{1}{2}\text{ ع}}{1\text{ مس } \frac{1}{2}\text{ ع}} = \text{مس ع}$

مثالیں

(۱)۔ اگر ۲ جرم $ط = ۱$ - جب $ط - ۱$ + جب $ط$ تو ثابت کرو کہ $ط$ کو

$$\frac{\pi}{\sqrt{e}}(e + \infty) \text{ اور } \frac{\pi}{\sqrt{e}}(e + \infty)$$

(۲) — ثابت کرو کہ

$$\text{قطر} = \frac{\text{جیب } \frac{1}{2}^\circ}{\sqrt{1 - \text{جیب } 1^\circ}} + \frac{\text{جیب } \frac{1}{2}^\circ}{\sqrt{1 + \text{جیب } 1^\circ}}$$

جس میں جذور مثبت اعداد کو تعبیر کرتے ہیں بشرطیکہ 'ا'

$$\pi\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \text{ و } \pi\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$$

کے درمیان واقع ہو جہاں ن ایک صحیح عدد ہے۔ دوسری صورتوں میں علامتیں کیا ہونی چاہئیں۔

$$(۳) - \text{ثابت کر دو کہ } \frac{\sqrt{1 - \text{جب لا}}}{\sqrt{1 + \text{جب لا}}} \text{ کی چار قیمتیں حسب ذیل ہیں:}$$

$$(۴) - \text{اگر جب م} = 1 \text{ تو ثابت کر دو کہ مس} 1 \text{ کی چار قیمتیں جلد}$$

$$\frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{2} (1 + 1) \right\} \left\{ 1 + \frac{1}{2} (1 - 1) \right\}$$

سے حاصل ہوتی ہیں۔

$$(۵) - \text{ضابطہ مس} \frac{1}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{1 + \text{مس} 1} - 1}{\text{مس} 1} \text{ میں ثابت کر دو کہ مشتبہ علامت}$$

کی بجائے (۱) رکھنے سے ابہام دور کیا جاسکتا ہے جہاں م، $\frac{90+1}{180}$ سے عین چھوٹا ایک صحیح عدد ہے۔

(70)

دئے ہوئے زاوئے کے ایک ثالث کے دائری تفاعل

۴۴۔ اگر ہم گزشتہ باب کے ضابطوں (۳۷)، (۳۸)، (۴۲) میں ا کی بجائے $\frac{1}{2}$ ع درج کریں تو ہمیں حسب ذیل تین مساواتیں ملتی ہیں

$$\text{جب ع} = 3 \text{ جب } \frac{1}{2} \text{ ع} - 2 \text{ جب } \frac{1}{2} \text{ ع} ، \dots \dots (۸)$$

$$\text{جم ع} = 4 \text{ جم } \frac{1}{2} \text{ ع} - 3 \text{ جم } \frac{1}{2} \text{ ع} ، \dots \dots (۹)$$

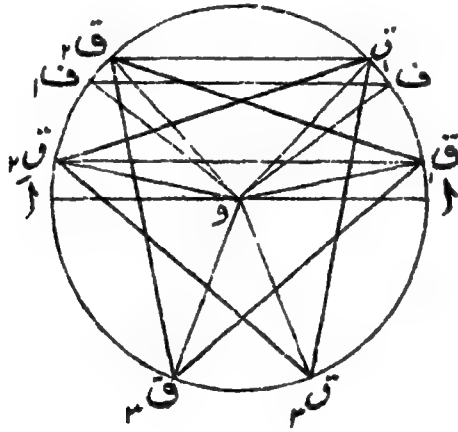
$$\text{مس ع} = 5 \text{ مس } \frac{1}{2} \text{ ع} - 4 \text{ مس } \frac{1}{2} \text{ ع} ، \dots \dots (۱۰)$$

$$1 - 3 \text{ مس } \frac{1}{2} \text{ ع}$$

اس طرح ہمیں ہر صورت میں ایک کبھی مساوات ملتی ہے جس سے $\frac{1}{2}$ ع کے دائری تفاعل کو ع کے دائری تفاعل کی رقوم میں معلوم

کیا جاسکتا ہے۔ پس اگر جب \angle دیا گیا ہے تو جب $\frac{1}{2}$ \angle کی تین الگ الگ قیمتیں حاصل ہوتی ہیں، اگر \angle دیا گیا ہے تو $\frac{1}{2}$ \angle کی تین قیمتیں الگ الگ حاصل ہوتی ہیں اور اگر \angle دیا گیا ہے تو $\frac{1}{2}$ \angle کی تین الگ الگ قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

(۱) ضابطہ (۸) کی صورت میں جب \angle دیا گیا ہے اور جب $\frac{1}{2}$ \angle کے لئے زاویوں (و، ا، و) (و، ا، و) میں سے سب کے ایک مثلث کی جیوب کی قیمتیں حاصل ہونگی، کیونکہ زاویہ (و، ا، و) اور (و، ا، و) کی جیب وہی ہے جو \angle کی ہے۔ فرض کرو کہ زاویوں (و، ا، و) کی مثلث



کرنے والے خطوط \angle ، \angle ، \angle ہیں اور اس طرح زاویہ \angle ، \angle ، \angle = $\frac{1}{2}$ \angle اور \angle ، \angle ، \angle ایک متساوی الاضلاع مثلث ہے اور

$$\angle = \frac{1}{2} \angle + \frac{1}{2} \angle = \angle \quad \angle = \frac{1}{2} \angle + \frac{1}{2} \angle = \angle$$

اسی طرح زاویوں (و، ا، و) کی مثلث کرنے والے خطوط \angle ، \angle ، \angle ہیں اور اس طرح \angle ، \angle ، \angle ایک متساوی الاضلاع مثلث ہے

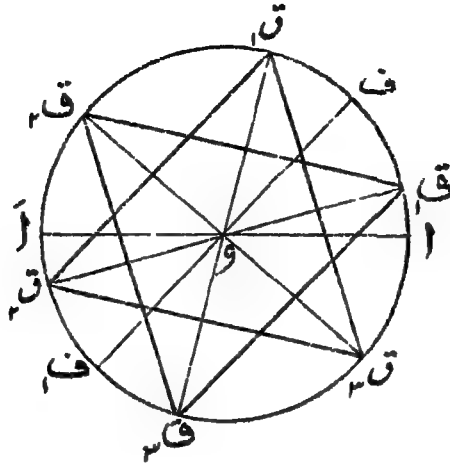
ق ق ق عمود ہیں واپر۔ زاویوں (وا، وق) (وا، وق) کے دو جٹوں کی جیوب التمام جم $\frac{1}{2}$ عہ ہیں، دو جٹوں (وا، وق) (وا، وق) کی جیوب التمام جم $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})$ عہ ہیں، اور دو جٹوں (وا، وق) (وا، وق) کی جیوب التمام جم $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})$ عہ ہیں۔ اس لئے جم $\frac{1}{2}$ عہ میں جو کبھی مساوات (۹) ہے اس کی تین اصلیں جم $\frac{1}{2}$ عہ، جم $(\frac{1}{2} - \frac{1}{2})$ عہ اور جم $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})$ عہ ہیں۔

(۳) ضابطہ (۱۰) کی صورت میں وہ زاوئے جن کا ماس وہی ہے جو عہ کا ہے (وا، وف) اور (وا، وف) ہیں۔ حسب سابق شکل صفحہ ۱۱۱ میں زاویوں کے پہلے جٹ کی تثلیث کرنے والے خطوط وق، وق، وق ہیں اور دوسرے جٹ کی تثلیث کرنے والے وق، وق، وق ہیں جہاں ق ق ق ایک متساوی الاضلاع مثلث ہے اور ق وا = $\frac{1}{2}$ (عہ + عہ)۔ ہم دیکھتے ہیں کہ ق، وق، وق، وق، اور ق، وق، وق دائرے کے قطر ہیں۔ جٹوں (وا، وق) (وا، وق) کے ماس مس $\frac{1}{2}$ عہ ہیں؛

(وا، وق) (وا، وق) کے ماس مس $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})$ عہ ہیں، اور (وا، وق) (وا، وق) کے ماس مس $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})$ عہ ہیں۔ اس لئے مس $\frac{1}{2}$ عہ کی کبھی مساوات (۱۰) کی اصلیں مس $\frac{1}{2}$ عہ، مس $(\frac{1}{2} - \frac{1}{2})$ عہ، مس $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})$ عہ ہیں۔

اس دفعہ کے نتیجوں کو ہم اس طرح بیان کر سکتے ہیں :- لایں کبھی

مساوات ۳ لا - ۳ لا = جب عہ
کی اصلیں حسب ذیل ہیں:



جب $\frac{1}{\text{م}}$ ع، جب $\frac{1}{\text{م}}$ (ع - ع) = جب $\frac{1}{\text{م}}$ (ع + ع) ؛
کبھی مساوات

$$۳ لا ۳ = لا ۳ = جم ع$$

کی اصلیں ہیں

جم $\frac{1}{\text{م}}$ ع، - جم $\frac{1}{\text{م}}$ (ع - ع) = جم $\frac{1}{\text{م}}$ (ع + ع)
اور کبھی مساوات

$$\text{مس ع} (۳ - ۱ لا) = ۳ لا - لا$$

کی اصلیں ہیں

مس $\frac{1}{\text{م}}$ ع، - مس $\frac{1}{\text{م}}$ (ع - ع) = مس $\frac{1}{\text{م}}$ (ع + ع)

بعض زاویوں کے دائری تفاعلوں کی تعیین

۶۵۔ اس باب کے ضابطے ایسے زاویوں کے دائری تفاعلوں کو معلوم کرنے میں استعمال کئے جاسکتے ہیں جو ان زاویوں کے کسری یا تحت ضلعی ہوں جن کے دائری تفاعل معلوم ہیں۔

$$(۱) چونکہ \quad \text{جب } \frac{1}{\text{م}} = ۲ = \text{جم } \frac{1}{\text{م}} = \frac{۱}{۲۱}$$

اس لئے دفعہ ۵ کے ضابطوں (۱) اور (۲) کی رو سے

$$\text{جب } \frac{1}{p} = \pi \frac{1}{8} \text{، جم } \frac{1}{p} = \pi \frac{1}{8} \text{، } \frac{1}{p} = \pi \frac{1}{8} \text{، } \frac{1}{p} = \pi \frac{1}{8}$$

$$\text{جب } \frac{1}{p} = \pi \frac{1}{4} \text{، جم } \frac{1}{p} = \pi \frac{1}{4} \text{، } \frac{1}{p} = \pi \frac{1}{4} \text{، } \frac{1}{p} = \pi \frac{1}{4}$$

اور اسی طرح عمل کو جاری رکھنے سے ہم جب $\frac{1}{p} = \pi$ اور جم $\frac{1}{p} = \pi$ کو محسوب کر سکتے ہیں۔

$$(۲) \text{ چونکہ جب } \frac{1}{p} = \pi \frac{1}{4} \text{، جم } \frac{1}{p} = \pi \frac{1}{4} \text{، } \frac{1}{p} = \pi \frac{1}{4}$$

اس لئے ضابطوں (۵) اور (۶) کی رو سے

$$\text{جب } \frac{1}{p} = \pi \frac{1}{16} \text{، جم } \frac{1}{p} = \pi \frac{1}{16} \text{، } \frac{1}{p} = \pi \frac{1}{16} \text{، } \frac{1}{p} = \pi \frac{1}{16}$$

یہ قیمتیں جب ۹، جم ۱۵ کے لئے دفعہ ۳۴ میں حاصل کی ہوئی قیمتوں کے مطابق ہیں۔ پس عمل کو اسی طرح جاری رکھنے سے ہم تمام زاویوں کی جیب اور جیب اتمام محسوب کر سکتے ہیں۔

$$(۳) \text{ — چونکہ جب } \frac{1}{p} = \pi \frac{1}{8} \text{، جم } \frac{1}{p} = \pi \frac{1}{8} \text{، } \frac{1}{p} = \pi \frac{1}{8}$$

(78)

$$\text{اور جب } \frac{1}{p} = \pi \frac{1}{8} \text{، جم } \frac{1}{p} = \pi \frac{1}{8} \text{، } \frac{1}{p} = \pi \frac{1}{8}$$

$$\text{اس لئے جب } \frac{1}{p} = \pi \frac{1}{8} \text{، جم } \frac{1}{p} = \pi \frac{1}{8} \text{، } \frac{1}{p} = \pi \frac{1}{8} \text{، } \frac{1}{p} = \pi \frac{1}{8}$$

$$\text{اب چونکہ جب } \frac{1}{p} = \pi \frac{1}{8} \text{، جم } \frac{1}{p} = \pi \frac{1}{8} \text{، } \frac{1}{p} = \pi \frac{1}{8}$$

$$\text{اس لئے جم } \frac{1}{p} = \pi \frac{1}{8} \text{، جب } \frac{1}{p} = \pi \frac{1}{8} \text{، } \frac{1}{p} = \pi \frac{1}{8}$$

$$\text{یا جب } \frac{1}{p} = \pi \frac{1}{8} \text{، جب } \frac{1}{p} = \pi \frac{1}{8} \text{، } \frac{1}{p} = \pi \frac{1}{8}$$

$$\text{یعنی جم } \frac{1}{p} = \pi \frac{1}{8} \text{، جب } \frac{1}{p} = \pi \frac{1}{8} \text{، } \frac{1}{p} = \pi \frac{1}{8}$$

نیز (جم $\frac{1}{2} \pi + \pi$ جب $\frac{1}{2} \pi = 1 + \frac{1}{2} \pi = \frac{3}{2} \pi$ ؛

اس لیے جم $\frac{1}{2} \pi + \pi$ جب $\frac{1}{2} \pi = \pi$ یا

یا جب $\frac{1}{2} \pi = \pi$ (یا $1 - \frac{1}{2} \pi$) جم $\frac{1}{2} \pi = 1 + \frac{1}{2} \pi$ (یا $1 + \frac{1}{2} \pi$)

اور اس لیے جم $\frac{1}{2} \pi = \pi$ (یا $1 + \frac{1}{2} \pi$) جب $\frac{1}{2} \pi = \pi$ یا $1 - \frac{1}{2} \pi$ ؛
یہ قیمتیں دفعہ ۳۲ میں دی ہوئی قیمتوں کے مطابق ہیں۔

یہ امر توجہ طلب ہے کہ اگر عہ کوئی زاویہ ہو جس کی جیب اور جیب التمام معلوم ہے اور م اور ن مثبت صحیح عدد ہوں تو شکل $\frac{1}{2} \pi$ کے تمام زاویوں کی جیب اور جیب التمام ایسی شکل میں معلوم کی جاسکتی ہیں جس میں صرف جذروں کے نکالنے کا عمل شامل ہوتا ہے، کیونکہ ہم نے یہ دکھا دیا ہے کہ شکل $\frac{1}{2} \pi$ کے تمام زاویوں کے دائری تفاعل کس طرح معلوم کیے جاسکتے ہیں اور جب یہ معلوم ہو جائیں تو گزشتہ باب کے ضابطوں کی مدد سے جب $\frac{1}{2} \pi$ اور جم $\frac{1}{2} \pi$ معلوم کیے جاسکتے ہیں۔

۶۶ - اب ہم ۳ سے شروع کر کے ۹ تک ان تمام زاویوں کے دائری تفاعل معلوم کر سکتے ہیں جن کا فرق ۳ یا $\frac{\pi}{4}$ ہے۔ چنانچہ

$$\text{جب } 3 = \text{جب } (18 - 9)$$

$$= \text{جب } 18 - \text{جم } 9 = \text{جم } 9 \text{ جب } 9$$

$$= \frac{1}{14} (18 + 9) - \frac{1}{14} (18 - 9) = \frac{1}{14} (27)$$

$$\text{اسی طرح جم } 3 = \frac{1}{14} (18 + 9) + \frac{1}{14} (18 - 9) = \frac{1}{14} (27)$$

$$9 = 30 - 21, 24 = 30 - 6, 12 = 30 - 18$$

$۳۰^\circ - ۳۰^\circ = ۰^\circ$	$۲۱^\circ - ۲۱^\circ = ۰^\circ$	$۲۳^\circ - ۲۳^\circ = ۰^\circ$	$۲۵^\circ - ۲۵^\circ = ۰^\circ$
$۳۰^\circ - ۲۵^\circ = ۵^\circ$	$۲۱^\circ - ۲۰^\circ = ۱^\circ$	$۲۳^\circ - ۲۲^\circ = ۱^\circ$	$۲۵^\circ - ۲۴^\circ = ۱^\circ$
اس لیے ہم زاویوں $۳۰^\circ, ۲۱^\circ, ۲۳^\circ, \dots, ۲۵^\circ$ کی جیب التام محسوب کر سکتے ہیں۔ اس سے آگے بڑھنا غیر ضروری ہے کیونکہ ۲۵° سے بڑے کسی زاویے کی جیب یا جیب التام اس کے متعم کی جیب التام یا جیب کے مساوی ہوتی ہے اور یہ متعم زاویہ ۲۵° سے کم ہوتا ہے۔ محسوب کردہ نتیجوں کی فہرست جدول ذیل میں دی گئی ہے۔			
جیب			

(74)

$\frac{1}{14} \{ (\overline{a} + a)(1 - \sqrt{3})^2 - (1 - \overline{a})(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \}$	$\pi \frac{1}{4} = ۳^\circ$
$\frac{1}{8} (1 - \overline{a} - \overline{a}\sqrt{2} - \sqrt{3})$	$\pi \frac{1}{3} = ۶^\circ$
$\frac{1}{8} (\overline{a} - \overline{a}^2 - \sqrt{2} + \sqrt{3})$	$\pi \frac{1}{4} = ۹^\circ$
$\frac{1}{8} (\sqrt{2} + \overline{a} - \overline{a}\sqrt{2} + \sqrt{3})$	$\pi \frac{1}{2} = ۱۲^\circ$
$\frac{1}{4} (\sqrt{2} - \sqrt{3})$	$\pi \frac{1}{3} = ۱۵^\circ$
$\frac{1}{4} (1 - \overline{a})$	$\pi \frac{1}{2} = ۱۸^\circ$
$\frac{1}{14} \{ (1 + \overline{a})(\sqrt{2} - \sqrt{3}) - \overline{a} - \overline{a}(1 + \sqrt{3})^2 \}$	$\pi \frac{5}{4} = ۲۱^\circ$
$\frac{1}{8} (\overline{a}^2 - \sqrt{3} - \sqrt{2} + \overline{a})$	$\pi \frac{1}{2} = ۲۴^\circ$
$\frac{1}{8} (\sqrt{2} + \sqrt{3} - \overline{a} + \overline{a}\sqrt{2})$	$\pi \frac{3}{4} = ۲۷^\circ$
$\frac{1}{4}$	$\pi \frac{1}{2} = ۳۰^\circ$
$\frac{1}{14} \{ \overline{a} + \overline{a}(1 - \sqrt{3})^2 + (1 - \overline{a})(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \}$	$\pi \frac{11}{4} = ۳۳^\circ$

$\overline{a} \sqrt{2-10} \cdot \frac{1}{r}$	$\pi \frac{1}{2} = 90^\circ$
$\left\{ \overline{a} - \overline{a} (1-3) \right\} \frac{1}{14}$	$\pi \frac{13}{4} = 99^\circ$
$(1+\overline{a} - \overline{a} 4+30) \cdot \frac{1}{8}$	$\pi \frac{6}{3} = 120^\circ$
$\overline{a} \cdot \frac{1}{r}$	$\pi \frac{1}{r} = 125^\circ$
$(3\overline{a} - 1\overline{a} + \overline{a} 2+10) \cdot \frac{1}{8}$	$\pi \frac{12}{10} = 128^\circ$
$(1+\overline{a}) (\overline{a} - \overline{a}) + \overline{a} - \overline{a} (1+3) \cdot \frac{1}{14}$	$\pi \frac{16}{4} = 151^\circ$
$(1+\overline{a}) \cdot \frac{1}{r}$	$\pi \frac{3}{1} = 152^\circ$
$(1-\overline{a}) (\overline{a} - \overline{a}) - \overline{a} + \overline{a} (1+3) \cdot \frac{1}{14}$	$\pi \frac{19}{4} = 154^\circ$
$3\overline{a} \cdot \frac{1}{r}$	$\pi \frac{1}{r} = 160^\circ$
$(\overline{a} - 10 + \overline{a} + \overline{a} 2) \cdot \frac{1}{8}$	$\pi \frac{6}{3} = 163^\circ$
$(1+\overline{a} + \overline{a} 4-30) \cdot \frac{1}{8}$	$\pi \frac{11}{3} = 164^\circ$
$\left\{ \overline{a} - \overline{a} (1-3) \right\} \frac{1}{14}$	$\pi \frac{23}{4} = 169^\circ$
$\overline{a} 2+10 \cdot \frac{1}{r}$	$\pi \frac{2}{2} = 172^\circ$
$(\overline{a} + \overline{a}) \cdot \frac{1}{r}$	$\pi \frac{5}{12} = 175^\circ$
$(1-\overline{a} + \overline{a} 4+30) \cdot \frac{1}{8}$	$\pi \frac{13}{3} = 178^\circ$
$(\overline{a} - \overline{a} 2 + \overline{a} 2+10) \cdot \frac{1}{8}$	$\pi \frac{19}{4} = 181^\circ$
$(3\overline{a} + \overline{a} 2-10 + 1\overline{a}) \cdot \frac{1}{8}$	$\pi \frac{6}{10} = 182^\circ$
$\left\{ (1-\overline{a}) (\overline{a} - \overline{a}) + \overline{a} + \overline{a} (1+3) \right\} \frac{1}{14}$	$\pi \frac{29}{4} = 184^\circ$
1	$\pi \frac{1}{r} = 190^\circ$

(75)

اس جدول میں زاویوں 90, 99, 120, 125, 128, 151, 152, 154, 160, 163, 164, 169, 172, 175, 178, 181, 182, 184, 190 کی جیب دی گئی ہیں۔

اور تمام زاویوں کی جیوب لینے سے جیوب التمام معلوم ہو سکتی ہیں۔ اوپر کے جملوں میں جو اعداد مجدد در ہیں ان کی قیمتیں اعشاریہ کے ۲۴ مقامات تک مسطر بنائی گئے۔ (میںجغرافیہ میں جلد ششم) میں دی ہیں۔ ان کی جدولوں میں ان کی قیمتیں اعشاریہ کے ۱۰ مقامات تک دی گئی ہیں۔ مکمل جدول جس میں ان زاویوں کے جاس قاطع، قاطع التمام منطق نسب ناوالی کسروں کی شکل میں درج ہیں گیلن (Gelin) کی کتاب ٹرگنومیٹری میں ملے گی۔

پانچویں باب پر مشالیں

اسئلہ: اتنا ہ کے رشتے ثابت کرو جن میں $a + b + c = 180$

$$(1) \quad \frac{\text{مس } \frac{1}{4} - \text{جم } 1 + \text{جم } 2 + \text{جم } 3}{\text{مس } \frac{1}{4} - \text{جم } 1 + \text{جم } 2 + \text{جم } 3} = \frac{\text{مس } \frac{1}{4}}{\text{مس } \frac{1}{4}}$$

(۱۳) اگر $۱ + ب + ج + د = ۲۶۰$ تو ثابت کرو کہ

$\frac{۱}{۲} \text{ جم} + \frac{۱}{۲} \text{ د جب} + \frac{۱}{۲} \text{ ب جب} + \frac{۱}{۲} \text{ ج جب} + \frac{۱}{۲} \text{ ب جم} + \frac{۱}{۲} \text{ ج جم} + \frac{۱}{۲} \text{ د جب} + \frac{۱}{۲} \text{ ب جب} = ۱۳۰$

$\frac{۱}{۲} \text{ جب} (۱ + ب) + \frac{۱}{۲} \text{ جب} (۱ + ج) + \frac{۱}{۲} \text{ جم} (۱ + د) = ۱۳۰$ ثابت کرو کہ

$\frac{۱}{۲} \text{ جب} (ب + ج) + \frac{۱}{۲} \text{ جب} (ج - ۱) + \frac{۱}{۲} \text{ جب} (۱ - ب)$

$+ ۲ \text{ جم} + \frac{۱}{۲} \text{ جب} (ب + ج) + \frac{۱}{۲} \text{ جم} (ج - ۱) + \frac{۱}{۲} \text{ جم} (۱ - ب) = ۲$

(۱۵) ثابت کرو کہ

$\frac{\text{جب} (ما - ی) + \text{جب} (ی - لا) + \text{جب} (لا - ا)}{۱ + \text{جم} (ا - ی) + \text{جم} (ی - لا) + \text{جم} (لا - ما)}$

$= \frac{\text{مس} \frac{۱}{۲} (ما - ی) + \text{مس} \frac{۱}{۲} (ی - لا) + \text{مس} \frac{۱}{۲} (لا - ا)}{۱ + \text{جم} (ا - ی) + \text{جم} (ی - لا) + \text{جم} (لا - ما)}$

(۱۶) دریافت کرو کہ $۱، ۲، ۳، ۴$ میں کیا رشتہ ہونا چاہئے کہ

$\text{جم} ۱ + \text{جم} ۲ + \text{جم} ۳ = ۱ + ۲ + ۳ \text{ جب} \frac{۱}{۲} + \text{جب} \frac{۱}{۲} + \text{جب} \frac{۱}{۲}$

(۱۷) اگر $۱ + ب + ج + د = ۳۶۰$ تو ثابت کرو کہ

$\text{جم} (ب + ج + د) + \text{جم} (ج + د + ۱) + \text{جم} (د + ۱ + ب) + \text{جم} (۱ + ب + ج)$

$= ۴ \text{ جم} + \frac{۱}{۲} \text{ جب} (۱ + ب) + \frac{۱}{۲} \text{ جب} (۱ + ج) + \frac{۱}{۲} \text{ جم} (۱ + د)$

(۱۸) اگر $\frac{\text{مس} \frac{۱}{۲} ط + \text{مس} \frac{۱}{۲} ذ}{\text{مس} ۲} = ۲$ اور $\frac{\text{مس} ۲}{\text{مس} ۲} = ۲$

تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{ط} + \text{ذ}}{۲} = ۲$

(۱۹) اگر جب $\frac{\text{س جب} (س - ط) + \text{جب} (س - ذ) + \text{جب} (س - پ)}{۴ \text{ جم} \frac{۱}{۲} ط + ۴ \text{ جم} \frac{۱}{۲} ذ + ۴ \text{ جم} \frac{۱}{۲} پ}$

تو ثابت کرو کہ

$\frac{\text{مس} \frac{۱}{۲} س + \text{مس} \frac{۱}{۲} س + \text{مس} \frac{۱}{۲} س}{\text{مس} \frac{۱}{۲} س + \text{مس} \frac{۱}{۲} س + \text{مس} \frac{۱}{۲} س} = ۱$

جہاں ۲ س = ط + فہ + پ
(۲۰) اگر ۱ + ب + ج + د = ۱۸۰ تو ثابت کرو کہ
جب ۱ + جب ب + جب ج - جب د

۲ = جم ۱ + (۱ + د) جم ۱ + (ب + د) جم ۱ + (ج + د)
(۲۱) اگر عہ + ہ + جہ = ۲۲ تو ثابت کرو کہ

جب ہ + (۱ + جم جہ) + جب جہ + (۱ + جم عہ) + جب عہ + (۱ + جم ہ)
۲ = جب ۱ + (جہ - ہ) جب ۱ + (عہ - جہ) جب ۱ + (ہ - عہ)
(۲۲) اگر ۲ س = ۱ + ب + ج تو ثابت کرو کہ

جم ۱ + س جم ۱ + (س - ۱) جم ۱ + (س - ب) جم ۱ + (س - ج)
+ جب ۱ + س جب ۱ + (س - ۱) جب ۱ + (س - ب) جب ۱ + (س - ج)
= جم ۱ + ۱ جم ۱ + ب جم ۱ + ج
(۲۳) اگر عہ + ہ + جہ = ۲۲ تو

(۱ + مس ۱ + عہ) (۱ + مس ۱ + ہ) (۱ + مس ۱ + جہ)
= (۱ + مس ۱ + عہ) (۱ + مس ۱ + ہ) (۱ + مس ۱ + جہ)
(۲۴) اگر عہ + ہ + جہ = ۲۲ تو ثابت کرو کہ

جم ۱ + ۳ + ہ + جہ - ۲ + جم ۱ + ۳ + جہ + عہ - ۲ + جم ۱ + ۳ + عہ + ہ - ۲
۲ = جم ۱ + ۳ + عہ - ۲ + جم ۱ + ۳ + جہ - ۲ + جم ۱ + ۳ + ہ - ۲
(۲۵) اگر جم ۲ ط = جم ۱ عہ ۴ جم ۲ ط = جم ۱ عہ ۴ جم ۲ ط = جم ۱ عہ ۴

اور مس ط پس ط = مس عہ پس عہ

تو ثابت کرو کہ مس ۱ + عہ مس ۱ + عہ = مس ۱ + عہ

(۲۶) اگر $\text{جم} = \text{ع} = \text{جم} + \text{د} = \text{جم} + \text{د} = \text{جم} + \text{د} = \text{جم} + \text{د}$ اور جب $\text{ع} = ۲$ جب $\frac{۱}{۲}$ د جب $\frac{۱}{۲}$ د
تو ثابت کرو کہ $\pm \text{مس} \frac{۱}{۲} \text{ع} = \text{مس} \frac{۱}{۲} \text{ب} \text{مس} \frac{۱}{۲} \text{ب}$

(۲۷) اگر $۱ + \text{ب} + \text{ج} = ۱۸۰$ اور $\text{مس} \frac{۳}{۲} ۱ = \text{مس} \frac{۳}{۲} \text{ب} = \text{مس} \frac{۳}{۲} \text{ج}$ تو
ثابت کرو کہ

$\text{مس} \frac{۳}{۲} ۱ + \text{مس} \frac{۳}{۲} \text{ب} + \text{مس} \frac{۳}{۲} \text{ج} = \text{مس} \frac{۳}{۲} ۱ + \text{مس} \frac{۳}{۲} \text{ب} + \text{مس} \frac{۳}{۲} \text{ج}$
(۲۸) اگر $\text{مس} \frac{۱}{۲} (۱ + \text{ی}) + \text{مس} \frac{۱}{۲} (۱ + \text{لا}) + \text{مس} \frac{۱}{۲} (۱ + \text{لا}) = ۰$
تو ثابت کرو کہ جب $۱ + \text{ب} + \text{ج} + \text{ی} = ۳$ جب $(۱ + \text{لا} + \text{ی}) = ۰$
(۲۹) ثابت کرو کہ

$\text{جم} + \text{ج} \frac{۱}{۲} (ط + \text{ع}) + \text{ج} \frac{۱}{۲} (ب - \text{ج}) + \text{جم} + \text{ج} \frac{۱}{۲} (ط + \text{ب}) + \text{ج} \frac{۱}{۲} (ب - \text{ج}) =$
 $+ \text{جم} + \text{ج} \frac{۱}{۲} (ط + \text{ب}) + \text{ج} \frac{۱}{۲} (ب - \text{ج})$
 $= ۲ \text{ جب } \frac{۱}{۲} (ب - \text{ج}) + \text{ج} \frac{۱}{۲} (ب - \text{ج}) + \text{ج} \frac{۱}{۲} (ب - \text{ج}) + \text{ج} \frac{۱}{۲} (ب - \text{ج})$
(۳۰) حل کرو مساواتیں

$$\frac{۱}{۲} = \text{مس} \frac{۱}{۲} + \text{مس} \frac{۱}{۲}$$

$$\text{مس} \frac{۱}{۲} = \text{مس} \frac{۱}{۲} + \text{مس} \frac{۱}{۲}$$

(۳۱) اگر $\text{جب} (ف + \text{ع}) + \text{جب} (ف - \text{ع}) = \text{جب} (ف + \text{ب}) + \text{جب} (ف - \text{ب}) = \text{جب} \frac{۱}{۲} (ب - \text{ج})$
 $\text{جب} \left(\frac{۲ + \text{ع}}{۲} + \frac{۲ + \text{ط}}{۲} \right) = \text{جب} \left(\frac{۲ + \text{ب}}{۲} - \frac{۲ + \text{ط}}{۲} \right)$
تو ثابت کرو کہ $\text{جم} \frac{۱}{۲} \text{ع} + \text{جم} \frac{۱}{۲} \text{ب} - \text{جم} \frac{۱}{۲} \text{ط} = \frac{۱}{۲}$

(۳۲) اگر $\text{مس} \left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} \right) = \text{مس} \left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} \right)$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{جب} \text{ط} = \text{جب} \text{د} \frac{(۱ + \text{ع} \text{ جب} \text{د})}{(۱ + \text{ب} \text{ جب} \text{د})} \frac{(۱ + \text{ب} \text{ جب} \text{د})}{(۱ + \text{ب} \text{ جب} \text{د})}$$

اور عہ پر معلوم کرو۔

(۳۳) اگر عہ + ب + ج = π تو ثابت کرو کہ

سن (اس ۱/۲ ہس ۱/۲ ج) + سن (اس ۱/۲ جس ۱/۲ ع) + سن (اس ۱/۲ عس ۱/۲ ب)

$$= \text{سن} \left\{ 1 + \frac{8 \text{ جب } 1/2 \text{ ع جب } 1/2 \text{ ب جب } 1/2 \text{ ج}}{\text{جب } 1/2 \text{ ع} + \text{جب } 1/2 \text{ ب} + \text{جب } 1/2 \text{ ج}} \right\}$$

(۳۴) ثابت کرو کہ تین مقداروں

$$\frac{\text{جم } 1/2 \text{ ج} - \text{جم } 1/2 \text{ ب}}{\text{جم } 1/2 \text{ ب جم } 1/2 \text{ ج} + \text{جم } 1/2 \text{ ج جب } 1/2 \text{ ب} + \text{جم } 1/2 \text{ ب جب } 1/2 \text{ ج}}$$

$$\frac{\text{جم } 1/2 \text{ ب} - \text{جم } 1/2 \text{ ع}}{\text{جم } 1/2 \text{ ع جب } 1/2 \text{ ب} + \text{جم } 1/2 \text{ ب جب } 1/2 \text{ ع}}$$

$$\frac{\text{جم } 1/2 \text{ ع} - \text{جم } 1/2 \text{ ج}}{\text{جم } 1/2 \text{ ج جب } 1/2 \text{ ع} + \text{جم } 1/2 \text{ ع جب } 1/2 \text{ ج}}$$

کا حاصل جمع ان کے مسلسل حاصل ضرب کے مساوی ہے۔

(۳۵) ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جم } 1/2 \text{ (ب + ج)}}{\text{جم } 1/2 \text{ (ب - ج)}} + \frac{\text{جم } 1/2 \text{ (ج + ع)}}{\text{جم } 1/2 \text{ (ج - ع)}} + \frac{\text{جم } 1/2 \text{ (ع + ب)}}{\text{جم } 1/2 \text{ (ع - ب)}}$$

$$= \frac{\text{جم } 1/2 \text{ (ب + ج) جم } 1/2 \text{ (ج + ع) جم } 1/2 \text{ (ع + ب)}}{\text{جم } 1/2 \text{ (ب - ج) جم } 1/2 \text{ (ج - ع) جم } 1/2 \text{ (ع - ب)}}$$

$$= \frac{\text{جم } 1/2 \text{ (ب + ج + ج + ع + ع + ب + ب + ج)}}{\text{جم } 1/2 \text{ (ب - ج - ج - ع - ع - ب - ب - ج)}}$$

(۳۶) اگر

$$\frac{\text{جب } 1/2 \text{ ع} + \text{جب } 1/2 \text{ ب} + \text{جب } 1/2 \text{ ج}}{\text{جب } 1/2 \text{ (ع + ب + ج)}} = \frac{\text{جم } 1/2 \text{ ع} + \text{جم } 1/2 \text{ ب} + \text{جم } 1/2 \text{ ج}}{\text{جم } 1/2 \text{ (ع + ب + ج)}}$$

تو ثابت کرو کہ ہر کسر

$$\text{حم (بہ + جہ) + جم (جہ + عہ) + حم (عہ + بہ)}$$

کے مساوی ہے اور نیز

$$\left\{ \text{مس عہ} - \text{مس} \right\} \div \left\{ \text{بہ + جہ} \right\} \setminus \left\{ \text{مس عہ} + \text{مس} \right\} \div \left\{ \text{بہ + جہ} \right\}$$

کے مساوی ہے۔



بجھٹا باب

مختلف مسئلے

(78)

۶۷۔ اس باب میں ہم ان جملوں کو مستحیل کرنے کی مختلف مثالیں دینگے جن میں دائری تفاعل شامل ہوتے ہیں۔ ان میں سے بعض مسئلے خود دلچسپ ہیں اور باقی دوسرے ان طریقوں کی خاطر دیے گئے ہیں جو انھیں ثابت کرنے میں استعمال ہوئے ہیں۔ ان جملوں کو جن میں دائری تفاعل شامل ہوتے ہیں مستحیل کرنے میں مہارت صرف بہت مشق سے ہی پیدا ہو سکتی ہے، تاہم ان طریقوں کا اعتناء سے مطالعہ کرنے سے جوہم نے مختلف صورتوں میں استعمال کئے ہیں طالب علم کو اس قسم کے تفاعلوں کے برتنے کی قابلیت حاصل کرنے میں بہت مدد ملے گی۔

متماثلات اور استحالات

مثالیں

- ۶۸

(۱) ثابت کرو کہ

جب ۲ جب (بہ - ج) + جب ۲ جب (جہ - عہ) + جب ۲ جب (عہ - ہہ) (ہہ - ہہ)

= {جب (بہ + جہ) + جب (جہ + عہ) + جب (عہ + ہہ) + جب (ہہ + ہہ)} \times

{جب (جہ - یہ) + جب (بہ - عہ) + جب (عہ - جہ) }

اس مساوات کی بائیں جانب جو اجزائے ضربی ہیں وہ علی الترتیب دو مقداروں جب جہ جم بہ + جب عہ جم جہ + جب بہ جم عہ اور جم جہ جب بہ + جم عہ جب جہ + جم بہ جب عہ کے حاصل جمع اور حاصل تفریق کے مساوی ہیں؛ اس لیے ان اجزائے ضربی کا حاصل ضرب

(جب جہ جم بہ + جب بہ جم عہ + جب عہ جم جہ) - (جم جہ جب بہ + جم بہ جب عہ + جم عہ جب جہ) کے مساوی ہے۔ اب چونکہ جب جہ جم بہ = جم بہ جب عہ = جب عہ جب جہ ہے اس لیے مربع ارقام کا جبری مجموعہ صفر ہے؛ باقی رقمیں

= ۲ جب عہ جم عہ (جب بہ جم جہ - جم بہ جب جہ) + ۲ جب بہ جم بہ (جب جہ جم عہ - جم عہ جب جہ) + ۲ جب جہ جم جہ (جب عہ جم بہ - جم بہ جب عہ)

= ۲ جب عہ جب (بہ - جہ) + ۲ جب بہ جب (جہ - عہ) + ۲ جب جہ جب (عہ - بہ)؛
اس طرح متماثلہ

۳ جب عہ جب (بہ - جہ) = ۳ جب (بہ + جہ) ۳ جب (جہ - بہ) ثابت ہو چکی۔

(۲۱) پچھلی مثال میں عہ، بہ، جہ کی بجائے علی الترتیب $\frac{1}{\pi}$ ، $\frac{1}{\pi}$ ، $\frac{1}{\pi}$ + بہ رکھو تو متماثلہ ذیل حاصل ہوگی :-

۳ جم عہ جب (بہ - جہ) = ۳ جم (بہ + جہ) ۳ جب (جہ - بہ) (۳) ثابت کرو کہ

۳ جب عہ جب (بہ - جہ) = ۳ جب (عہ + بہ + جہ) جب (بہ - جہ) جب (عہ - جہ) جب (جہ - بہ)

اس صورت میں بہت سی دیگر صورتوں کی طرح ہم مساوات کی دائیں جانب کی مقداروں جب عہ، جب بہ، جب جہ کی بجائے ان کے مماثل جن یعنی زاویوں کی جیب کی رقوم میں جو جملے ہیں ان کو رکھتے ہیں؛ تب دائیں جانب کا جملہ

ہو جاتا ہے

$$\frac{1}{p} \text{ جب } e \text{ جب } (b-j) - \frac{1}{p} \text{ جب } 3 \text{ جب } e \text{ جب } (b-j)$$

$$یا - \frac{1}{p} \text{ جب } 3 \text{ جب } e \text{ جب } (b-j) \text{، بموجب مثال (۳) دفعہ ۲۵ -}$$

اب ہم جیب کے حاصل ضربوں کی بجائے جیب التمام کے فرق رکھتے ہیں

تو جملہ ہو جاتا ہے

$$\frac{1}{p} \{ \text{جم } (3 + e - b - j) - \text{جم } (3 - e + b + j) + \text{جم } (3 + b + j - e) \}$$

$$- \text{جم } (3 - b - j + e) + \text{جم } (3 + b + j - e) - \text{جم } (3 - e - b - j) \}$$

اور خطوط وحدانی کے اندر پہلی اور آخری رقموں کا مجموعہ ہے

$$2 \text{ جب } 2 (ج-ع) \text{ جب } (ع + ب + ج)$$

اسی طرح دوسری اور تیسری رقموں، چوتھی اور پانچویں رقموں کو ایک ساتھ

لینے سے جملہ بالا ہو جاتا ہے

$$- \frac{1}{p} \text{ جب } (ع + ب + ج) \text{ جب } 2 (ج-ع)$$

$$یا - \text{جب } (ع + ب + ج) \text{ جب } (ب-ج) \text{ جب } (ج-ع) \text{ جب } (ع-ب)$$

بموجب مثال (۳) دفعہ ۲۷ -

(۴) ثابت کرو کہ

$$\text{ج. جم } e \text{ جب } (b-j) = \text{جم } (ع + ب + ج) \text{ جب } (ب-ج) \text{ جب } (ج-ع) \text{ جب } (ع-ب)$$

(۵) ثابت کرو کہ

$$\text{ج. جب } e \text{ جب } (b-j) = 3 \text{ جب } e \text{ جب } b \text{ جب } j \text{ جب } (ب-ج) \text{ جب } (ج-ع) \text{ جب } (ع-ب)$$

مطلوبہ نتیجہ اس امر واقع سے مستنبط ہوگا کہ لا + ما + ی - ۳ لا ما ی کا ایک جزو

ضربی لا + ما + ی ہے -

$$\text{رکھو لا} = \text{جب } e \text{ جب } (ب-ج) \text{، لا} = \text{جب } b \text{ جب } (ج-ع) \text{، ی} = \text{جب } j \text{ جب } (ع-ب)$$

تو لا + ما + ی = .

(۶) ثابت کرو کہ

جب (ع + ہ) جب (ع - ہ) جب (ج + ض) جب (ج - ض) + جب (ہ + ج) جب (ہ - ج)
+ جب (ع + ض) جب (ع - ض) + جب (ج + ع) جب (ج - ع) جب (ہ + ض) جب (ہ - ض) = .

جملہ (لا - ما) (ی - و) + (ما - ی) (لا - و) + (ی - لا) (و - ی)

تمثالاً صفر ہوتا ہے۔ پس رکھو لا = جب ع، ما = جب ہ، ی = جب ج، و = جب ض

تو چونکہ

جب ع - جب ہ = جب (ع + ہ) جب (ع - ہ)

اس لیے مسئلہ بالا حاصل ہو جاتا ہے۔

(۷) ثابت کرو کہ

۱ (جم ہ جم ج - جم ع) (جم ہ جم ع - جم ہ) (جم ع جم ہ - جم ج) +

جب ع جب ہ جب ج - جب ع (جم ہ جم ج - جم ع) جب ہ (جم ج جم ہ - جم ع) -

- جب ہ (جم ع جم ہ - جم ج) = ۱ (جم ع - جم ہ - جم ج) + ۲ جم ع جم ہ جم ج

(80)

یہ مسئلہ اخذ ہوتا ہے اس مشہور مسئلہ سے کہ مقطع

گ	ب	ج
ف	ب	ج
ج	ف	گ

$$\begin{vmatrix} ب ج - ف & ف گ - ج & ف ب - ج \\ ف گ - ج & ج ا - گ & گ ب - ا \\ ف ب - ج & گ ا - ف & ا ب - ج \end{vmatrix} =$$

رکھو ۱ = ب = ج = ا، ف = جم ع، گ = جم ہ، ب = جم ج، و =

ب ج - ف = جب ع - جب ہ، وغیرہ

پھر مقطع کو پھیلاؤ تو مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوگا۔

(۸) ثابت کرو کہ

$$\text{جم } ۲ \text{ عم } \frac{۱}{۲} (\text{ج} - \text{ع}) \text{ عم } \frac{۱}{۲} (\text{ع} - \text{ب}) + \text{جم } ۲ \text{ عم } \frac{۱}{۲} (\text{ع} - \text{ب}) \text{ عم } \frac{۱}{۲} (\text{ب} - \text{ج})$$

$$+ \text{جم } ۲ \text{ عم } \frac{۱}{۲} (\text{ب} - \text{ج}) \text{ عم } \frac{۱}{۲} (\text{ج} - \text{ع})$$

$$= \text{جم } ۲ \text{ عم } + \text{جم } ۲ \text{ عم } + \text{جم } ۲ \text{ عم } + \text{جم } ۲ \text{ عم } + \text{جم } ۲ \text{ عم } + \text{جم } ۲ \text{ عم}$$

ضابطہ عم $\frac{۱}{۲} \text{ ط} = \frac{۱ + \text{جم } \text{ط}}{\text{جب } \text{ط}}$ کے ذریعہ دائیں جانب کے ہر محاسن التمام کو تبدیل کرو اور پھر پورے جملہ کا مشترک نسب ناجب (ب-ج) جب (ج-ع) جب (ع-ب) تبدیل کرو تو شمار کنندہ ہو جاتا ہے

$$\text{جم } ۲ \text{ جب } (\text{ب} - \text{ج}) \{ ۱ + \text{جم } (\text{ج} - \text{ع}) \} \{ ۱ + \text{جم } (\text{ع} - \text{ب}) \}$$

$$+ \text{جم } ۲ \text{ جب } (\text{ب} - \text{ج}) + \text{جم } ۲ \text{ جب } (\text{ب} - \text{ج}) \text{ جم } (\text{ج} - \text{ع}) \text{ جم } (\text{ع} - \text{ب})$$

$$+ \text{جم } ۲ \text{ جب } (\text{ب} - \text{ج}) \{ \text{جم } (\text{ج} - \text{ع}) + \text{جم } (\text{ع} - \text{ب}) \}$$

$$\{ ۱ + \text{جم } (\text{ب} - \text{ج}) \} \text{ جم } ۲ \text{ جب } (\text{ب} - \text{ج}) - \frac{۱}{۲} \text{ جم } ۲ \text{ جب } ۲ (\text{ب} - \text{ج})$$

$$+ \text{جم } ۲ \text{ جب } (\text{ب} - \text{ج}) \text{ جم } (\text{ج} - \text{ع}) \text{ جم } (\text{ع} - \text{ب})$$

$$\text{اب } ۱ + \text{جم } (\text{ب} - \text{ج}) = \text{جم } ۲ \text{ جب } (\text{ب} - \text{ج}) \text{ جم } (\text{ج} - \text{ع}) \text{ جم } (\text{ع} - \text{ب})$$

بحسب مثال ۴ دفعہ ۴؛

$$\text{اور } \text{جم } ۲ \text{ جب } (\text{ب} - \text{ج}) = \text{جم } (\text{ب} + \text{ج}) \text{ جب } (\text{ج} - \text{ب})$$

$$= \text{جم } ۲ \text{ جب } (\text{ب} - \text{ج}) \text{ جب } (\text{ج} - \text{ع}) \text{ جب } (\text{ع} - \text{ب}) \text{ جم } (\text{ب} + \text{ج})$$

$$\text{نیز } \text{جم } ۲ \text{ جب } ۲ (\text{ب} - \text{ج}) = ۰$$

رکھو لا = ک. جم ط، ما = ک. جم فہ، ی = ک. جم پہ، تب

جم^۱ فہ + جم^۲ پہ - ۲. جم فہ. جم پہ. جم عہ = ۱ - جم عہ،

(جم عہ - جم فہ. جم پہ) = جب^۱ فہ جب^۲ پہ

یا اس لیے جم عہ = جم (فہ ± پہ)؛ اسی طرح ہم بتا سکتے ہیں کہ جم پہ = جم (پہ ± ط) جم جہ = جم (ط ± فہ) اس لیے عمومییت کے نقصان کے بغیر ہم رکھ سکتے ہیں عہ = فہ ± پہ پہ = پہ ± ط جہ = ط ± فہ - اس غرض سے کہ یہ مساواتیں موافق ہو سکیں یہیں تمام مبہم علامتوں کو مثبت لینا چاہیے، یا دو کو منفی اور ایک کو مثبت۔ پہلی صورت میں ط = کس - عہ، فہ = س - پہ، پہ = س - جہ؛ دوسری صورت میں قیمتوں کے حسب ذیل تین جٹ ملتے ہیں

$$\left\{ \begin{array}{l} ط = س \\ فہ = س - جہ \\ پہ = س - جہ \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} ط = جہ - س \\ فہ = س \\ پہ = س - جہ \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} ط = س - جہ \\ فہ = س - جہ \\ پہ = س \end{array} \right\}$$

اس طرح دی ہوئی چار مساواتوں میں سے ایک ہمیشہ پوری ہوتی ہے۔

مساواتوں کا حل

۶۹ — مثالیں

(۱) حل کرو مساوات

جب ۲ ط قط ۴ ط + جم ۲ ط = جم ۶ ط

یہ مساوات لکھی جاسکتی ہے

جب ۲ ط قط ۴ ط + جم ۲ ط - جم ۶ ط = ۰

جب ۲ ط قط ۴ ط + ۲ جب ۴ ط جب ۲ ط = ۰

جب ۲ ط = ۲ یا قط ۴ ط + ۲ جب ۴ ط = ۰

جب ۸ ط = ۱

یا
پس
یعنی

اس لیے حل ہیں

$$n = \frac{1}{p} m \pi \text{ ط } = \frac{1}{p} \{ n \pi - (1 - \frac{1}{p}) \pi \}$$

(۲) حل کرو مساوات

$$جم \text{ ع } ق \text{ ط } لا + جب \text{ ع } ق \text{ م } لا = ۱ \text{ ع } لا \text{ کے لیے}$$

یہ مساوات لکھی جاسکتی ہے

$$جم \text{ ع } جب لا + جب \text{ ع } جم لا = جب لا جم لا$$

$$یا جب \text{ ع } جم لا - جم \text{ ع } جب لا = جب لا (جم لا - جم \text{ ع } لا)$$

(83)

$$پس جب \text{ ع } جب (ع - لا) = جب لا (جم لا - جم \text{ ع } لا)$$

اس مساوات کی طرفین جب $\frac{1}{p}$ (ع - لا) سے تقسیم پذیر ہیں، اس لیے اس جزو ضربی کو نکال دینے سے

$$۲ جب \text{ ع } جم \frac{1}{p} (ع - لا) = ۲ جب لا جب \frac{1}{p} (ع + لا)$$

$$جم \frac{1}{p} (لا - ع) - جم \frac{1}{p} (۲ لا + ع) =$$

$$جم \frac{1}{p} (۳ لا + ع) = جم \frac{1}{p} (لا - ع) + جم \frac{1}{p} (۲ ع)$$

$$یا جم \frac{1}{p} (۳ لا + ع) = جم \frac{1}{p} (لا + ۲ ع) + جم \frac{1}{p} (لا - ۵ ع)$$

جس کو لکھا جاسکتا ہے

$$جم \frac{1}{p} (۳ لا + ع) - جم \frac{1}{p} (لا + ۲ ع) = جم \frac{1}{p} (لا - ۵ ع) - جم \frac{1}{p} (۳ لا + ع)$$

$$اس لیے جب \frac{1}{p} (لا - ع) جب (لا + ع) = جب (لا - ع) جب \frac{1}{p} (لا + ۳ ع) + جب \frac{1}{p} (۳ لا + ع)$$

پھر مشترک جزو ضربی جب $\frac{1}{p}$ (لا - ع) کو خارج کر دینے سے

$$جب (لا + ع) = ۲ - جم \frac{1}{p} (لا - ع) جب \frac{1}{p} (لا + ۳ ع)$$

$$= - \{ جب (لا + ع) + جب ۲ ع \}$$

لہ یہ مثال واسطی ہوم کے مسئلوں سے لی گئی ہے۔

اس لیے جب (لا + ع) = - جب ع جم ع
اس لیے حل ہیں

$$\text{لا} = ۲\text{ن} + \pi\text{ع} \text{ اور لا} = \text{ن} - \pi\text{ع} + (۱ - \text{ن}) \text{ جب } ۱ \text{ (جب ع جم ع)}$$

(۳) حل کرو مساواتیں

$$\begin{cases} \text{وجب (لا + لا) - ب جب (لا - لا) = ۲ م جم لا} \\ \text{وجب (لا + لا) + ب جب (لا - لا) = ۲ ن جم لا} \end{cases}$$

ان سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{۱}{\text{ن}} \{ \text{وجب (لا + لا) + ب جب (لا - لا) \} - \frac{۱}{\text{م}} \{ \text{وجب (لا + لا) - ب جب (لا - لا) \} = ۲ \text{ (جم لا - جم لا)}$$

$$\text{فرض کرو جب (لا + لا) = ت تو حسب ذیل دو درجی مساوات سے}$$

ملے گا

$$\begin{aligned} & \text{و ت}^۲ \left(\frac{۱}{\text{ن}} - \frac{۱}{\text{م}} \right) + ۲ \text{ ت} \{ \text{وب (ن) + (م) - ۲} \} \\ & + \text{ب}^۲ \left(\frac{۱}{\text{ن}} - \frac{۱}{\text{م}} \right) = ۰ \end{aligned}$$

اس مساوات کی دونوں اصلوں کو ت سے تعبیر کرنے سے

$$\text{ت} = \frac{\text{جب (لا + لا)}}{\text{جب (لا - لا)}} = \frac{\text{مس لا + مس لا}}{\text{مس لا - مس لا}}$$

$$\text{اس لیے } \frac{\text{مس لا}}{\text{مس لا}} = \frac{\text{ت} + ۱}{\text{ت} - ۱}$$

نیز دی ہوئی مساواتوں میں سے ایک کو دوسرے سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{\text{م جم لا}}{\text{ن جم لا}} = \frac{\text{وت - ب}}{\text{وت + ب}}$$

اور پھر ان دو مساواتوں اور رشتہ قط' ما میں $ا = ۱$ کے ذریعہ ما کو ساقط کرنے سے

$$\frac{ن}{م} \left(\frac{اوت - ب}{اوت + ب} \right)^2 \text{ قط' لا} - \left(\frac{ا - ت}{ا + ت} \right)^2 \text{ مس' لا} = ۱$$

جس سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{مس' لا} = \pm \left\{ ۱ - \frac{ن}{م} \left(\frac{اوت - ب}{اوت + ب} \right)^2 \right\}^{\frac{۱}{۲}} \left\{ \frac{ن}{م} \left(\frac{اوت - ب}{اوت + ب} \right)^2 \right\}^{\frac{۱}{۲}} - \left(\frac{ا - ت}{ا + ت} \right)^2$$

اس سے مس لا کی چار قیمتیں ملتی ہیں جن میں سے دو، دو اُس دو درجی مساوات کی ہر اصل کے جواب میں ہیں جو ت میں ہے۔ اس طرح لا معلوم ہو چکا اور پھر ما اس مساوات

$$\text{مس' لا} = \frac{ا - ت}{ا + ت}$$

سے مل جاتا ہے۔

استقاط

(84)

۴۔ — مثالیں —

(۱) مساواتوں $\frac{\text{جم' ط}}{\text{جم' (ع-ط)}} = \frac{\text{جب' ط}}{\text{جب' (ع-ط)}}$ سے م سے ط ساقط کرو۔

چونکہ $م = \frac{\text{جب' ط جم' ط} + \text{جب' ط جم' ط}}{\text{جب' (ع-ط)}} = \frac{\text{جب' ط جم' ط}}{\text{جب' (ع-ط)}}$

اس لیے $\frac{۱}{م} = \frac{\text{جب' ع-م ط} - \text{جم' ط}}{\text{جم' ط}}$

نیز $م = \frac{\text{جم' ط جم' (ع-ط)} - \text{جب' ط جب' (ع-ط)}}{\text{جم' ط}}$

$= \frac{\text{جم' ع-م ط} + \text{جب' ع-م ط}}{\text{جم' ط}}$

پس $\left(\frac{1}{2}م + جم\right) (جم - \frac{1}{2}م) = جب^۲$

یا $۲م^۲ - ۱ = م. جم$
اور یہ مطلوبہ حاصل اسقاط ہے۔

(۲) ثابت کرو کہ مساواتوں

$$\frac{جم. ۳ (ط - ط) = جم. ۳ (ط + ط - ط) = جم. ۳ (ط - ط)}{جم. ۳ (ط - ط) = جم. ۳ (ط + ط - ط) = جم. ۳ (ط - ط)}$$

سے ط کو ساقط کرنے سے جو نتیجہ حاصل ہوتا ہے وہ ہر سے آزاد ہے۔
مساوات

$$\frac{جم. ۳ (لا - لا) = جم. ۳ (لا - لا)}{جم. ۳ (لا - لا) = جم. ۳ (لا - لا)}$$

میں لا کو پورا کرنے والی تین غیر تابع قیمتیں ط، جہ - ط، اور صفر ہیں۔ اسلئے
جم. ۳ لا، جم. ۳ جہ، جب ۳ لا، جب ۳ جہ = ک، (جم. لا، جم. ۳ جہ + جب ۳ لا، جب ۳ جہ)
جہاں ک = جم. ۳ لا، جم. ۳ جہ، جم. ۳ لا، جب ۳ لا، جب ۳ جہ کی قیمتیں علی الترتیب
جم. لا، جب ۳ لا، جب ۳ جہ میں رکھنے اور پھر پوری مساوات کو جم. لا سے تقسیم کرنے سے
میں لا (= ت) میں حسب ذیل کبھی مساوات ملتی ہے

$$جم. ۳ لا، جم. ۳ جہ، جب ۳ لا، جب ۳ جہ = ک، (جم. لا، جم. ۳ جہ + جب ۳ لا، جب ۳ جہ)$$

$$= ک (جم. ۳ جہ + ت جب ۳ جہ) (ت + ۱)$$

یا $ت (ک جب ۳ جہ + جب ۳ جہ) + ت (ک جم. ۳ جہ + جم. ۳ جہ) =$

ت (ک جب ۳ جہ - ۳ جب ۳ جہ) + ک جم. ۳ جہ = ۰

اس لیے دو درجی مساوات

$$ت^۲ (ک جب ہ + جب ۳ ع) + ت (ک جم ہ + جم ۳ ع) + ک جب ہ$$

$$- ۳ جب ۳ ع = ۰$$

کی اصلیں مس ط اور مس (جہ - ط) ہیں؛

$$اس لیے \quad مس ط + مس (جہ - ط) = \frac{ک جم ہ + جم ۳ ع}{ک جب ہ + جب ۳ ع}$$

$$اور \quad مس ط مس (جہ - ط) = \frac{ک جب ہ - ۳ جب ۳ ع}{ک جب ہ + جب ۳ ع}$$

$$پس \quad مس جہ = \frac{ت (ک جم ہ + جم ۳ ع) - ۳ جب ۳ ع}{ک جب ہ + جب ۳ ع} = - ۳ ع$$

$$یا \quad ج - ۳ ع = \frac{۱}{۲} (۱ + ۲) = \frac{۱}{۲}$$

(85) جہاں کوئی صحیح عدد ہے۔ اس طرح حاصل اسقاط بہ پر منحصر نہیں ہے۔

(۳) مساواتوں

$$\frac{لا جم ط}{ب} + \frac{ما جب ط}{ب} = \frac{ا ک لا جب ط - ما جم ط}{ب} = (ا ک جب ط + ب ا جم ط)$$

سے ط ساقط کرو۔

ہر مساوات کا مربع لو اور مس ط = ت رکھو تو مساواتیں ہو جاتی ہیں

$$ت^۲ (۱ - \frac{ا}{ب}) - ۲ ت \frac{لا}{ب} + (۱ - \frac{لا}{ب})^۲ = ۰$$

$$ت^۲ (۱ - \frac{لا}{ب}) + ۲ ت (۱ - \frac{لا}{ب}) + (۱ - \frac{لا}{ب})^۲ = ۰$$

ان مساواتوں سے ت کو ساقط کرنا ہے۔ ان کو ت اور ت کے لیے حل کرنے سے

$$\frac{ت^۲ (۱ - \frac{لا}{ب}) + ۲ ت (۱ - \frac{لا}{ب}) + (۱ - \frac{لا}{ب})^۲}{ت} = \frac{ت^۲ (۱ - \frac{لا}{ب}) - ۲ ت \frac{لا}{ب} + (۱ - \frac{لا}{ب})^۲}{ت}$$

پس

$$\left\{ \frac{2}{b} - \frac{2}{a} \right\} \left\{ \frac{2}{b} - \frac{2}{a} \right\} = \left\{ \frac{2}{b} - \frac{2}{a} \right\} \left\{ \frac{2}{b} - \frac{2}{a} \right\}$$

$$= \left[\frac{2}{b} + \left\{ \frac{2}{b} - \frac{2}{a} \right\} \right] \left\{ \frac{2}{b} - \frac{2}{a} \right\}$$

$$\text{اس لیے } \frac{2}{a} + \frac{2}{b} = \frac{2}{b}$$

حاصل استقاط ہے۔

(۴) مساواتوں

$$\text{لا جب ط} + \text{ما جم ط} = ۲ \text{ ر جب ط}$$

$$\text{لا جم ط} - \text{ما جب ط} = ۲ \text{ ر جم ط}$$

سے ط ساقط کرو۔

لا اور ما کے لیے حل کرنے سے

$$\text{لا} = ۲ \text{ ر جم ط} - \text{ما} = ۲ \text{ ر جب ط} - \text{ما}$$

$$\text{یا } \text{لا} = ۲ \text{ ر جم ط} + \text{ما} = ۲ \text{ ر جب ط} + \text{ما}$$

$$\text{ایسے } \text{لا} + \text{ما} = ۲ \text{ ر (جم ط + جب ط)}$$

$$\text{پس } \text{لا} + \text{ما} = ۲ \text{ ر (جم ط + جب ط)} = ۲ \text{ ر (لا + ما)}$$

اور حاصل استقاط ہے

$$\frac{2}{a} = \frac{2}{b} (1 - \frac{2}{a}) + \frac{2}{b} (1 + \frac{2}{a})$$

مساواتوں کی اصلوں کے درمیان رشتے

۱۔ — مثالیں —

(۱) مساوات $زحم ط + سبب ط = ج = ج$

پرغور کرو۔

فرض کرو کہ طے کی دو الگ الگ قیمتیں طے بہ ہیں جو اس مساوات کو پورا کرتی ہیں، تب

$$1. \text{م} + \text{ب} \text{ جب } \text{ع} = \text{ج}$$

۱- حم به + ب جب به = ج'

اس لیے

(86)

$$\frac{\text{ج}}{\text{جب (ب-ع)}} = \frac{\text{ب}}{\text{جم-ع.جمب}} = \frac{\text{ا}}{\text{جبب-جب-ع}}$$

پس

$$\frac{u}{r} = (u + v) \frac{1}{r} \mu$$

اور نیز $\frac{1}{c} \text{ جم } = \frac{1}{(e - c)} = \frac{1}{c} \text{ جب } = \frac{1}{(e + c)} = \frac{1}{c} \text{ جم } = \frac{1}{(e + c)}$
ان رشتوں کو حسب ذیل طریقہ پر بھی معلوم کیا جاسکتا ہے :- رکھوس $\frac{1}{p} = ط$
تو دی بروئی مساوات لکھی جاسکتی ہے

$$J(t+1) = J(t) + \alpha (J(t) - J(t-1))$$

$$= 1 - c + t - (1 + c)^2$$

اس دو درجہ کی اسیلین مس $\frac{1}{4}$ عہ مس $\frac{1}{4}$ بہ ہیں، اس لیے

$$\frac{1-j}{1+j} = \frac{1}{1} \angle -\frac{\pi}{4} = 1 \angle -\frac{\pi}{4}$$

اس لیے ربط حاصل ہوتا ہے

$$\frac{z}{y} = \frac{(x-y) \frac{1}{y} \rho^2}{(x+y) \frac{1}{y} \rho^2}$$

庄

$$\frac{b_2}{1+j} = \frac{1}{2} \mu + \frac{1}{2} \mu$$

جس سے دوسرا ربط حاصل ہو سکتا ہے۔

(۳) اگر

جب $\text{عہ} \cdot \text{جم} (\text{ط} + \text{عہ}) = \text{مس} ۲ \cdot \text{جم} (\text{ط} + \text{بہ}) = \text{بب} \cdot \text{جم} (\text{ط} + \text{جہ}) = \text{مس} ۲ \cdot \text{جم}$
 $= \text{جب} \cdot \text{ضہ} \cdot \text{جم} (\text{ط} + \text{ضہ}) = \text{مس} ۲ \cdot \text{ضہ}$

اور $\text{عہ} \cdot \text{بہ} \cdot \text{جہ} \cdot \text{ضہ}$ میں سے کسی دو زاویوں میں π کے ضعف کا فرق نہ ہو تو ثابت
 کرو کہ $\text{عہ} + \text{بہ} + \text{جہ} + \text{ضہ} + \text{ط} \cdot \pi$ کا ضعف ہے۔

مساوی مقداروں میں سے ہر مقدار کو ک کے مساوی رکھو تو $\text{عہ} \cdot \text{بہ} \cdot \text{جہ} \cdot \text{ضہ}$

مساوات

جب $\text{لا} \cdot \text{جم} (\text{ط} + \text{لا}) = \text{مس} ۲ \cdot \text{لا} = \text{ک}$

کی اصلیں ہیں۔ یہ مساوات لکھی جاسکتی ہے

$\text{مس} ۲ \cdot \text{لا} (\text{جم} \cdot \text{ط} - \text{جب} \cdot \text{ط} \cdot \text{مس} \cdot \text{لا}) = \text{ک} (۱ - \text{مس} ۲ \cdot \text{لا})$

پس $\frac{\text{مس} ۲ \cdot \text{عہ}}{\text{ک}} = \frac{\text{بب} \cdot \text{ط}}{\text{ک}} \cdot \frac{\text{مس} \cdot \text{عہ}}{\text{مس} \cdot \text{بہ}} = \frac{\text{جم} \cdot \text{ط}}{\text{ک}}$

$\frac{\text{مس} \cdot \text{عہ}}{\text{مس} \cdot \text{بہ}} = \frac{\text{مس} \cdot \text{عہ}}{\text{مس} \cdot \text{بہ}} = \frac{\text{مس} \cdot \text{جہ}}{\text{مس} \cdot \text{ضہ}} = ۱$

اس لیے $\text{مس} (\text{عہ} + \text{بہ} + \text{جہ} + \text{ضہ}) = \frac{\text{ک} \cdot \text{جب} \cdot \text{ط}}{\text{ک} - \text{جم} \cdot \text{ط} - \text{ک}} = \text{مس} \cdot \text{ط}$

پس $\text{عہ} + \text{بہ} + \text{جہ} + \text{ضہ} + \text{ط} \cdot \pi$ کا ضعف ہے۔

(۴) اگر $\text{عہ} \cdot \text{بہ} \cdot \text{جہ}$ غیر مساوی زاویے ہوں ہر ایک π سے کم تو ثابت

کرو کہ مساواتیں

$\text{جم} (\text{عہ} + \text{ط}) \cdot \text{قط} ۲ = \text{جم} (\text{ط} + \text{بہ}) \cdot \text{قط} ۲ = \text{جم} (\text{ط} + \text{جہ}) \cdot \text{قط} ۲$

ایک ساتھ موجود نہیں ہو سکتیں جب تک کہ

$\text{جم} (\text{بہ} + \text{جہ}) + \text{جم} (\text{جہ} + \text{عہ}) + \text{جم} (\text{عہ} + \text{بہ})$

صفر کے مساوی نہ ہو۔

ہر مساوی مقدار کو ک کے مساوی رکھنے سے

$$\text{جم } ۰۰ = ۰ \text{ جب } ۰۰ = ۰ \text{ جب } ۰۰ = ۰$$

$$\text{جم } ۰۰ = ۰ \text{ جب } ۰۰ = ۰ \text{ جب } ۰۰ = ۰$$

$$\text{جم } ۰۰ = ۰ \text{ جب } ۰۰ = ۰ \text{ جب } ۰۰ = ۰$$

جم ۰ اور جب ۰ کو ساقط کرنے سے

پس

$$۰ = ۰ \text{ جب } ۰ = ۰$$

$$۰ = ۰ \text{ جب } ۰ = ۰ \text{ جب } ۰ = ۰ \text{ بموجب مثال (۲) دفعہ ۱۸}$$

یا

$$۰ = ۰ \text{ جب } ۰ = ۰ \text{ بموجب اس صورت میں جب کہ } ۰ = ۰$$

پس

$$\text{جبکہ جب } ۰ = ۰ \text{ جب } ۰ = ۰ \text{ جب } ۰ = ۰$$

یعنی

یہ مثال بھی مثال (۳) کی طرح حل ہو سکتی ہے۔

اعظم اور اقل قیمتیں - لاتساویات

۲۔ مثالیں -

$$(۱) \text{ جم } ۰ + ۰ \text{ جب } ۰$$

کی بڑی سے بڑی قیمت ہے $\frac{۰}{۰+۰}$

$$\text{رکھو } \frac{۰}{۰} = \text{مس } ۰ \text{ تو } ۰ = ۰ + ۰ \text{ جب } ۰ = ۰ + ۰ \text{ جم } ۰$$

$$\text{اس طرح } ۰ \text{ جم } ۰ + ۰ \text{ جب } ۰ = ۰ + ۰ \text{ جم } (۰ - ۰)$$

اب چونکہ جم (۰ - ۰) ہمیشہ \pm کے درمیان واقع ہوتا ہے اس لیے $\frac{۰}{۰+۰}$ جم ۰ کے درمیان واقع ہوگا۔

$$(۲) \text{ اگر } ۰ = ۰ + ۰ \text{ جم } ۰ + ۰ \text{ جب } ۰ + ۰ \text{ جب } ۰ \text{ جم } ۰$$

تو 'ر + ب اور لا ما (ر + ب) کے درمیان واقع ہوگا۔

فرض کرو لا = ر + جم ط + ب جب ط = $\frac{1}{4}(ر + ب) + \frac{1}{4}(ر - ب)$ جم ط (88)

تب ع = لا + ما (ر + ب - لا)

$$ع = ر + ب + ۲ ما (ر + ب - لا) - \frac{1}{4}(ر + ب - لا) - \frac{1}{4}(ر - ب - لا)$$

بس ع بڑے سے بڑا ہے جبکہ لا = $\frac{1}{4}(ر + ب)$ باء کی بڑی سے بڑی قیمت

ما (ر + ب) سے نیز ع کم سے کم ہے جبکہ $\frac{1}{4}(ر + ب) - لا$

بڑے سے بڑا ہو یعنی جبکہ لا کم سے کم ہو اور یہ اس وقت ہوگا جبکہ جم ط = ۱ -

اور اس صورت میں لا = ب اور تب ع = ر + ب اس لیے یہ کی کم سے کم قیمت ہے۔

(۳) اگر ط، صفر اور π کے درمیان واقع ہو تو ثابت کرو کہ

$$م \frac{1}{4} ط - مم ط < ۲$$

چونکہ

$$م \frac{1}{4} ط - مم ط = \frac{م - ۳}{۴} = \frac{م - ۳}{۴} = \frac{م - ۳}{۴} = \frac{م - ۳}{۴}$$

بس مم $\frac{1}{4} ط - مم ط = مم ط + مم \frac{1}{4} ط$:

اب اگر ط، صفر اور π کے درمیان واقع ہے تو مم ط اور مم $\frac{1}{4} ط$ ہر ایک اکائی سے

ہرگز کم نہیں ہو سکتا اس لیے مم $\frac{1}{4} ط - مم ط < ۲$ ،

(۴) اگر n زاویوں کا جن میں سے ہر ایک ثبت ہے اور $\frac{1}{n} \pi$ سے کم ہے مجموعہ دیا جائے تو بتاؤ کہ ان زاویوں کی جیب کا حاصل جمع یا حاصل ضرب بڑے سے بڑا ہوگا جب کہ زاویے سب کے سب مساوی ہوں۔

جیب التمام کے لیے بھی ایسا ہی ایک مسئلہ درست ہے۔
فرض کرو کہ $\text{عم} = \text{عم}'$ ، $\text{عن} = \text{عن}'$ اور ان کا حاصل جمع ص ہے۔

تب جب $\text{عر} + \text{عن} = 2$ جب $\frac{1}{n} \pi$ ($\text{عر} + \text{عن}$) جم ($\text{عر} - \text{عن}$) اور
چونکہ جم $\frac{1}{n} \pi$ ($\text{عر} - \text{عن}$) ایک سے کم ہے سوائے اس صورت کہ جبکہ $\text{عر} = \text{عن}$

اس لیے جب $\text{عر} + \text{عن} > 2$ جب $\frac{1}{n} \pi$ ($\text{عر} + \text{عن}$)

اگر $\text{عر} \neq \text{عن}$ ، اس لیے اگر $\text{عم} = \text{عم}'$ ، $\text{عن} = \text{عن}'$ سے کوئی دو زاویے غیر مساوی ہوں تو ہم ان دو زاویوں میں سے ہر ایک کی بجائے ان کے حسابی اوسط کو درج کر کے $\frac{1}{n} \pi$ جب عر کو بڑھا سکتے ہیں، پس $\frac{1}{n} \pi$ جب عر سے بڑا ہے جب سب زاویے مساوی ہوں؛

اس لیے $\frac{1}{n} \pi$ جب $\text{عر} < \frac{1}{n} \pi$ جب $\frac{1}{n} \pi$ -

نیز جب $\text{عر} + \text{عن} = \frac{1}{n} \pi$ {جم ($\text{عر} - \text{عن}$) - جم ($\text{عر} + \text{عن}$)}

اور یہ $\frac{1}{n} \pi$ {جم ($\text{عر} - \text{عن}$) - جم ($\text{عر} + \text{عن}$)} $> \frac{1}{n} \pi$ {جم ($\text{عر} + \text{عن}$) - جم ($\text{عر} - \text{عن}$)}

$> \frac{1}{n} \pi$ جب $\frac{1}{n} \pi$ ($\text{عر} + \text{عن}$)

یا

اگر $\text{عر} \neq \text{عن}$ ۔ پس حسب سابق اگر حاصل ضرب جب $\text{عم} = \text{عم}'$ جب $\text{عن} = \text{عن}'$ کوئی دو زاویے غیر مساوی ہوں تو ہم ان زاویوں میں سے ہر ایک کی بجائے ان کے اوسط حسابی کو درج کر کے حاصل ضرب کو بڑھا سکتے ہیں؛ اس لیے نتیجہ نکلتا ہے کہ جب $\text{عم} = \text{عم}'$ ، جب $\text{عن} = \text{عن}'$ سے بڑا ہے جبکہ $\text{عم} = \text{عم}'$ ، $\text{عن} = \text{عن}'$ اور اس

حاصل ضرب کی بڑی سے بڑی قیمت (جب $\frac{1}{n} \pi$) ہے۔

(۵) پچھلی مثال کی شرطوں کے تحت ثابت کرو کہ زاویوں کے قاطع التماموں کا حاصل جمع کم سے کم ہے جب سب زاویے مساوی ہوں۔
ہونکہ
قم عمر + قم عی

$$= \text{جب } \frac{1}{4} (\text{عمر} + \text{عی}) \left\{ \frac{1}{4} (\text{عمر} - \text{عی}) - \frac{1}{4} (\text{عمر} + \text{عی}) \right\}$$

$$+ \frac{1}{4} (\text{عمر} - \text{عی}) + \frac{1}{4} (\text{عمر} + \text{عی})$$

پس عمر + عی کی دی ہوئی قیمت کے لیے قم عمر + قم عی کی کم سے کم قیمت ہے جبکہ
قم $\frac{1}{4} (\text{عمر} - \text{عی}) = 1$ یا جبکہ عمر = عی۔ اس کے بعد استدلال کی صورت دی ہوگی
جو پچھلی مثال کی ہے۔

(89)

(۶) پچھلی دو مثالوں کی شرطوں کے تحت ثابت کرو کہ زاویوں کے تماموں
یا ماس التماموں کا حاصل جمع کم سے کم ہے جبکہ سب زاویے مساوی ہوں۔
(۷) اگر $a + b + c = \pi$ تو ثابت کرو کہ

$$\sin a + \sin b + \sin c \leq \frac{3}{2}$$

مساواتوں کے استنباطی نظام

۷۳ — مساواتوں کے نظام کو استنباطی کہا جائیگا جب کہ مساواتیں
باہم موافق نہ ہوں الا آنکہ ہر ایک خاص رشتہ کو پورا کریں۔
جب یہ رشتہ پورا ہو تو مساواتوں کے حل تعداد میں لا متناہی ہونگے۔

نظام

$$\text{و.جم} + \text{ب.جم} + \text{ب.جب} + \text{ج.جب} + \text{و.جب} + \text{ب.ب} + \text{جم.ب} + \text{جم.ج} \\ + \text{ج.جب} (\text{ب} + \text{ج}) = ۰$$

$$\text{و.جم} + \text{جم.ع} + \text{ب.جب} + \text{ج.جب} + \text{ع.ج} + \text{و.ج} + \text{ب.ب} + \text{جم.ج} + \text{جم.ع} \\ + \text{ج.جب} (\text{ج} + \text{ع}) = ۰$$

$$\text{و.جم} + \text{جم.ب} + \text{ب.جب} + \text{ع.جب} + \text{ج.ج} + \text{و.ج} + \text{ب.ب} + \text{جم.ع} + \text{جم.ب} \\ + \text{ج.جب} (\text{ب} + \text{ع}) = ۰$$

تین استنباطی مساواتوں کا ایک نظام ہے۔

مساوات

$$\text{و.جم} + \text{جم.ط} + \text{ب.جب} + \text{ع.جب} + \text{ط.ج} + \text{و.ج} + \text{ب.ب} + \text{جم.ع} + \text{جم.ط} \\ + \text{ج.جب} (\text{ط} + \text{ع}) = ۰$$

پہرہ کر دو۔ یہ مساوات پوری ہوتی ہے $\text{ط} = \text{ب}$ اور $\text{ط} = \text{ج}$ سے۔ اس کو $\text{مس} = \frac{1}{4}\text{ط}$ کی مساوات کے طور پر لکھو، اس طرح :

$$\text{م}^۲ - (\text{و.جم} + \text{ج.ج} + \text{و.جب} + \text{ب.جم} + \text{ع.ب} - \text{ج.جب} + \text{ع.ج}) \\ + ۲\text{م} (\text{ب.جب} + \text{و.ج} + \text{و.جم} + \text{ع.ج}) + (\text{و.جم} + \text{ج.ج} + \text{و.جب} + \text{ب.ب} + \text{جم.ب} + \text{جم.ع}) \\ + \text{ج.جب} (\text{ع} + \text{ب}) = ۰$$

اس مساوات سے ہم معلوم کرتے ہیں

$$\text{مس} = \frac{1}{4}\text{ب} + \text{مس} = \frac{1}{4}\text{ج} \text{ اور } \text{مس} = \frac{1}{4}\text{ط}$$

$$\text{پس } \text{مس} = \frac{1}{4}(\text{ب} + \text{ج}) = \frac{۲(\text{ب.جب} + \text{و.ج} + \text{و.جم} + \text{ع.ج}) + ۲(\text{و.جم} + \text{ج.ج} + \text{و.جب} + \text{ب.ب} + \text{جم.ب} + \text{جم.ع})}{۲}$$

اسی طرح ہمیں حاصل ہونا چاہیے

$$\text{مس} = \frac{1}{4}(\text{ع} + \text{ج}) = \frac{\text{ب.جب} + \text{و.ج} + \text{و.جم} + \text{ع.ج} + \text{و.جم} + \text{ب.ب} + \text{جم.ب} + \text{جم.ع}}{۲}$$

اب ہم $\frac{1}{4}$ (ع - ب) کی قیمت اخذ کر سکتے ہیں؛ یہ قیمت ایک کسر ہوگی جس کا شمار کنندہ ہے

$$(ب جب ب + ا + ج جم ب) (ا جم ع + ب + ج جب ع) - (ب جب ع + ا + ج جم ع) \\ \times (ا جم ب + ب + ج جب ب)$$

$$۲ جب \frac{1}{4} (ع - ب) \{ (ج - ا ب ا جم \frac{1}{4} (ع - ب) + (ا ج - ب ب) جم \frac{1}{4} (ع + ب) \} \\ - (ا ا - ب ج) جب \frac{1}{4} (ع + ب) \{$$

(90) اور نسب نما ہے

$$(ب جب ع + ا + ج جم ع) (ب جب ب + ا + ج جم ب) + (ا جم ع + ب + ج جب ع) \\ (ا جم ب + ب + ج جب ب)$$

$$(ا + ج) جم ع جم ب + (ب + ج) جب ع جب ب + (ا + ب) جم ع جب ب + \\ + (ا ب + ب ج) (ب جب ع + ج جب ب) + (ا ج + ا ب) (جم ع + جم ب) \\ + (ا + ب) (ج جب ع + ب)$$

اس کسر کو جب $\frac{1}{4}$ (ع - ب) سے تقسیم کر د تو یہ نسب نما

$$= (ج - ا ب) \{ ا جم ع (ع - ب) \} + (ا ج - ب ب) (جم ع + جم ب) - (ا ا - ب ج) (ب جب ع + جب ب) \\ پس$$

$$(ا + ب) \{ ا جم ع جم ب + ب جب ع جب ب + ج + ا (ب جب ع + جب ب) \\ + ب (جم ع + جم ب) + ج جب ع + ب (جم ع + ب) \}$$

$$= ج - ا - ب + ج + ا + ج - ب - ا ب$$

(91)

اسی طرح ہمیں حاصل ہوگا

$$\text{جب } \text{ع} + \text{جب } (\text{ع} + \text{ب}) + \text{جب } (\text{ع} + \text{ب} + \text{ا}) + \dots + \text{جب } (\text{ع} + (\text{ن} - 1) + \text{ب})$$

$$= \text{جب } (\text{ع} + \frac{\text{ن} - 1}{2} + \text{ب}) \text{ جب } \frac{\text{ن} - 1}{2} \text{ رقم } \frac{\text{ن}}{2} \dots \dots (2)$$

اس حاصل جمع کو (۱) میں ع کی بجائے ع + $\frac{1}{2}$ درج کر کے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

(۱) میں ب کی بجائے ب + $\frac{1}{2}$ رکھو تو سلسلہ

$$\text{جم } \text{ع} - \text{جم } (\text{ع} + \text{ب}) + \text{جم } (\text{ع} + \text{ب} + \text{ا}) - \dots + (\text{ن} - 1) + \text{جم } (\text{ع} + (\text{ن} - 1) + \text{ب})$$

کا حاصل جمع ہوگا

$$\text{جم } (\text{ع} + \frac{\text{ن} - 1}{2} + \text{ب}) \text{ جم } \frac{\text{ن} - 1}{2} \text{ قط } \frac{\text{ن}}{2} \text{ یا جب } (\text{ع} + \frac{\text{ن} - 1}{2} + \text{ب}) \text{ جب } \frac{\text{ن} - 1}{2} \text{ قط } \frac{\text{ن}}{2}$$

بموجب اس کے کہ ن طاق ہو یا جفت۔

سلسلہ

$$\text{جب } \text{ع} - \text{جب } (\text{ع} + \text{ب}) + \text{جب } (\text{ع} + \text{ب} + \text{ا}) - \dots$$

کا حاصل جمع، (۲) سے اسی طرح معلوم کیا جاسکتا ہے۔

امثلہ

(۱) ثابت کرو کہ

$$\left\{ 2 = \frac{\text{جب } \text{ن} + \text{ع}}{\text{جب } \text{ب}} \right\} = \text{جم } (\text{ن} - 1) + \text{ع} + \text{جم } (\text{ن} - 3) + \text{ع} + \text{جم } (\text{ن} - 5) + \text{ع} + \dots$$

نیز جم ن ع جم ع کے لیے اسی طرح کا جملہ معلوم کرو۔

(۲) جمع کرو سلسلہ

$$\text{جم } \text{ع} + \text{جم } (\text{ع} + \text{ب}) + \dots + \text{جم } (\text{ع} + (\text{ن} - 1) + \text{ب})$$

چونکہ $\text{جم}^۲ = \frac{۱}{۴} (۱ + \text{جم}^۲) = \frac{۱}{۴} (۱ + ۲\text{جم} + ۲) = \frac{۱}{۴} (۳ + ۲\text{جم})$...
اس لیے مطلوبہ حاصل جمع ہے

$\frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} \text{جم}^۲ + \frac{۱}{۴} (۱ - ۱) = \frac{۱}{۴} \text{جم}^۲$ جب n بہ رقم بہ
اسی طرح سلسلوں (۱) اور (۲) کی رقموں کی کسی مثبت صحیح عددی قوتوں کا مجموعہ
معلوم کیا جاسکتا ہے۔

(۳) جمع کرو سلسلہ $\text{قم}^۲ + \text{قم}^۲ + \text{قم}^۲ + \dots + \text{قم}^۲$
چونکہ $\text{قم}^۲ = \text{جم}^۲ - \text{جم}^۲ = \text{قم}^۲ - \text{جم}^۲ = \text{قم}^۲ - \text{جم}^۲ = \dots$
 $\text{قم}^۲ = \text{جم}^۲ - \text{جم}^۲ = \text{قم}^۲ - \text{جم}^۲$

اس لیے مطلوبہ حاصل جمع ہے $\text{جم}^۲ - \text{جم}^۲$
(۴) جمع کرو سلسلہ

$$\frac{\text{جم}^۳ - \text{جم}^۳}{\text{جم}^۳} + \dots + \frac{\text{جم}^۳ - \text{جم}^۳}{\text{جم}^۳} + \frac{\text{جم}^۳ - \text{جم}^۳}{\text{جم}^۳}$$

چونکہ $\text{مس}^۳ - \text{جم}^۳ = \frac{۱}{۳} \text{مس}^۳$

$$= \frac{\text{جم}^۳ - \text{جم}^۳}{\text{جم}^۳} = \frac{\text{جم}^۳ - \text{جم}^۳}{\text{جم}^۳}$$

$$= \frac{\text{جم}^۳ - \text{جم}^۳}{\text{جم}^۳} = \frac{\text{جم}^۳ - \text{جم}^۳}{\text{جم}^۳}$$

(92)

$$= \frac{\text{جم}^۳ - \text{جم}^۳}{\text{جم}^۳} = \frac{\text{جم}^۳ - \text{جم}^۳}{\text{جم}^۳}$$

(۲) جمع کرو سلسلہ

جم ۱ + جم (۱ + ب) + جم (۲ + ب) + ... + جم (ن + ب) + جم (ن + ۱ - ب) {
 یہ سلسلہ کچھلی مثال کے سلسلہ میں تحویل ہو جائیگا اگر اس کو (۱ - جم ب) سے ضرب دیا جائے۔

۷۶ — سلسلے

جم ۱ + لا جم (۱ + ب) + لا جم (۲ + ب) + ... + لا جم (ن + ب) + لا جم (ن + ۱ - ب) {
 جب ۱ + لا جب (۱ + ب) + لا جب (۲ + ب) + ... + لا جب (ن + ب) + لا جب (ن + ۱ - ب) {
 متوالی سلسلے میں جن کے ربط کا پیمانہ (scale of relation) ۲ - ۱ لا جم ب + لا ہے
 کیونکہ

جم (۱ + ب) + جم (۲ + ب) = جم (۱ - ۱ + ب) {
 اور جب (۱ + ب) + جب (۲ + ب) = جب (۱ - ۱ + ب) {
 اس لیے ان کو متوالی سلسلوں کے جمع کرنے کے معمری قاعدہ سے جمع کیا جاسکتا
 ہے۔ اگر اس سے پہلے سلسلہ کا حاصل جمع تعبیر ہو تو
 س (۱ - ۲ لا جم ب + لا)

= جم ۱ - لا جم (۱ - ب) - لا جم (۲ + ب) + لا + جم (۱ + ب) + جم (ن + ۱ - ب) {
 اگر لا > اتون کو لا انتہا بڑا کرنے سے لا تنہا ہی سلسلہ

جم ۱ + لا جم (۱ + ب) + لا جم (۲ + ب) + ...

کے حاصل جمع کی انتہائی قیمت حسب ذیل حاصل ہوتی ہے

$$\frac{\text{جم ۱} - \text{لا جم (۱ - ب)}}{۲ - ۱ \text{ لا جم ب} + \text{لا}}$$

رکھو $e = 0$ تو

$$1 + \text{لا.جم} + \text{لا.جم} + \text{لا.جم} + \dots + \infty = \frac{1 - \text{لا.جم}}{1 - \text{لا.جم}}$$

اس لیے نیز

$$1 + 2 + \text{لا.جم} + 2 + \text{لا.جم} + \dots + \infty = \frac{1 - \text{لا.جم}}{1 - \text{لا.جم}}$$

بعض صورتوں میں سلسلہ کا مجموعہ ایک شکل کے ذریعہ معلوم کیا جاسکتا ہے۔ ہم مثلاً دفعہ ۴ کے سلسلوں (۱) اور (۲) کو لیتے۔ فرض کرو کہ $1, 1, 1, 1, 1, \dots$ ایک دائرے کے مساوی وتر ہیں اور فرض کرو کہ $1, 1, 1, 1, 1, \dots$ کے درمیان زاویہ ہے جہاں 1 دائرہ کا مرکز ہے، خط مستقیم 1 کھینچو ایسا کہ $1 = e$ تب $1, 1, 1, 1, 1, \dots$ کے یکن 1 کے ساتھ علی الترتیب ہیں

$$e + e + e + e + e + \dots + (1 - n) + e$$

اور 1 کا میلان $e + \frac{1}{n} (1 - n) + e$ ہے، نیز اگر دائرہ کا قطر 1 ہو تو

$$1 = \frac{1}{n} \text{ جب } 1 = \frac{1}{n} \text{، } 1 = \frac{1}{n} \text{ جب } 1 = \frac{1}{n}$$

اب دلاؤ $1, 1, 1, 1, 1, \dots$ کے غلطوں کا مجموعہ ہے

$$1 + \text{جم} (e) + 1 + \text{جم} (e + e) + \dots + 1 + \text{جم} \{e + (1 - n)\}$$

$$1 + \frac{1}{n} \{ \text{جم} (e + \text{جم} (e + e) + \dots + \text{جم} (e + (1 - n)) \}$$

اور یہ مجموعہ 1 کے غلطوں کے مساوی ہونا چاہیے جو یہ ہے

$$1 + \text{جم} \{e + \frac{1}{n} (1 - n)\}$$

یا ق جب $\frac{1}{p}$ ن بہ حجم $\{e + \frac{1}{q}(n-1)\}$

اس لیے

$$\{ \text{م} + \text{ع} + (1 - \text{ع}) + \text{ع} \} \text{م} + \dots + (\text{ع} + \text{ع}) \text{م} + \text{ع}$$
$$= \text{مجم} \left\{ \frac{1}{4} (1 - n) : \text{حب} \frac{1}{4} n : \text{فم} \frac{1}{4} : \right.$$

اگر ہم دلا کے عمود دار خط مستقیم پر خلیں تو میوب کے سلسلہ کا حاصل جمع ملے گا۔

۱۳

(۱) ایک دائرہ کا قطر ۱ ہے، اس کے محیط 'و'، 'ف'، 'ق'... نقطے ہیں ایسے کہ زاویوں 'ف'، 'ا'، 'و'، 'ق'، 'ا'، 'ف'... میں سے ہر ایک ۷۰ ہے، 'ا'، 'ف'، 'ا'، 'و'، 'ق'، 'ا'، 'ف'... ویرے اس سے 'ق' پر ملتے ہیں۔ اس شکل کے ذریعہ سلسلہ قط (م) + ۱ + قط (م) + ۱ + قط (م) + ۲ + ... (ن) نمونہ تک کا مجموعہ معلوم کرو۔

(۲) ہندی طور پر ثابت کرو کہ اگر e, b, c ، ... کے زاویوں کی کوئی تعداد ہو تو

قط ع قط (ع + ب) جب ب + قط (ع + ب) قط (ع + ب + ج) جب ج

+ قط (ع + ب + ج) قط (ع + ب + ج + د + هـ) قط (ع + ب + ج + د + هـ + ز) ...

$$= \text{قطبہ قطبہ} (ع + ب + ج + د + \dots + ک) \text{ جب } (ب + ج + د + \dots + ک)$$

چھٹے باب پر مثالیں

(۱) مساواتوں $\text{جم}^2 + \text{اجم ط} = \text{ب}^2 \text{جب}^2 + \text{اجب ط} = \text{ج}^2$

سے ملے سا قہ کرو۔

(۲) مساواتوں $(ا + ب) \sin (ط - ذ) = (ا - ب) \sin (ط + ذ)$ سے $ط$ مساقل کرو۔
 $(ا \sin ۲۰ + ب \sin ۲۰) = ج$

(۳) ثابت کرو کہ

(95)

$(ا \sin ذ + ب \sin ذ) (ا \sin ب + ب \sin ب) \sin (ذ - ب)$

$+ (ا \sin ب + ب \sin ب) (ا \sin ط + ب \sin ط) \sin (ط - ب)$

$+ (ا \sin ط + ب \sin ط) (ا \sin ذ + ب \sin ذ) \sin (ط - ذ)$

$+ (ا + ب) (ا \sin ذ + ب \sin ذ) \sin (ط - ذ) = ۰$

اور اس مساوات کی ہندسی طور پر توضیح کرو۔

(۴) مساوات $ا \sin ط - ج \sin ۲۰ = ج \sin ط - (ا \sin ط + ب \sin ط) \sin (ط - ج)$ سے $ط$ مساقل کرو۔
 کو سادہ ترین شکل میں تبدیل کرو اور اس کو حل کرو۔

(۵) ثابت کرو کہ تین حادہ زاویوں $ا$ ، $ب$ ، $ج$ کا مجموعہ ۹۰ سے کم ہے جبکہ یہ زاویے رشتہ $ا + ب + ج = ۱۸۰$ میں ہیں۔

(۶) اگر $ا + ب + ج = ۹۰$ تو ثابت کرو کہ $ا \sin ا + ب \sin ب + ج \sin ج$ کی کم سے کم قیمت ایک ہے۔

(۷) مساواتوں

$ا \sin ط + ب \sin ذ + ج \sin ۲۰ = ا \sin ۲۰ + ب \sin ط + ج \sin ذ$

$ط + ذ = ۲۰$

سے $ط$ اور $ذ$ معلوم کرو۔

(۸) اگر $ا + ب + ج = ۱۸۰$ تو ثابت کرو کہ

$ا \sin ا + ب \sin ب + ج \sin ج$

(۹) اگر

$$\frac{\text{لا جب ط} + \text{ما جب ذ} + \text{ی جب پ}}{\text{لا جم ط} + \text{ما جم ذ} + \text{ی جم پ}} = \frac{\text{م جب ط جب ذ جب پ} + \text{جب (ط + ذ + پ)}}{\text{م جم ط جم ذ جم پ} - \text{جم (ط + ذ + پ)}}$$

$$\frac{\text{لا جب پ} + \text{ذ + پ - ط} + \text{ما جب پ} + \text{پ + ط - ذ} + \text{ی جب پ} + \text{پ + ذ - ط}}{\text{لا جم پ} + \text{ذ + پ - ط} + \text{ما جم پ} + \text{پ + ط - ذ} + \text{ی جم پ} + \text{پ + ذ - ط}} = \text{ثوابت کرو کہ}$$

$$\frac{\text{م جب پ} + \text{ذ + پ - ط} + \text{جب (ط + ذ + پ)}}{\text{م جم پ} + \text{ذ + پ - ط} + \text{جم (ط + ذ + پ)}} = \frac{\text{م جب ط} + \text{ذ + ط - پ} + \text{جب (ط + ذ + پ)}}{\text{م جم ط} + \text{ذ + ط - پ} + \text{جم (ط + ذ + پ)}}$$

$$(۱۰) \text{ ثوابت کرو کہ } \frac{\text{ح جب ۳ ع جب (ب - ج)}}{\text{ح جب ۲ (ج - ب)}} = \text{جب (ع + ب + ج)}$$

اور عام صورت میں جبکہ ن کوئی طاق عدد ہو

$$\frac{\text{ح جب ن ع جب (ب - ج)}}{\text{ح جب ۲ (ج - ب)}} = \{ \text{جب (ف + ق + ب + ر ج)} \}$$

جہاں ف، ق، ر کوئی طاق اعداد ہیں جن کا مجموعہ ن ہے۔

(۱۱) اگر

$$۱. \text{ جم ع جم ب} + ۱ + \{ \text{جب ع} + \text{جب ب} \} = ۰$$

$$۲. \text{ جم ع جم ج} + ۱ + \{ \text{جب ع} + \text{جب ج} \} = ۰$$

ثوابت کرو کہ

$$۳. \text{ جم ب جم ج} + ۱ + \{ \text{جب ب} + \text{جب ج} \} = ۰$$

جہاں ب، ج کم ہیں ۳ سے۔

(۱۲) اگر ط کی دو قیمتیں ط، ط ہوں جو مساوات

$$1 = \frac{\text{جب ط جب فہ}}{\text{جب ط فہ}} + \frac{\text{جم ط جم فہ}}{\text{جم ط فہ}}$$

کو پورا کرتی ہیں تو ثابت کرو کہ اس مساوات میں اگر ط، فہ کی بجائے ط اور ط درج کئے جائیں تو وہ مساوات کو پورا کرینگے۔

(۱۳) اگر

$$\begin{aligned} & \text{جم فہ جم فہ} + \text{ب جب فہ ب جب فہ} = \text{ج} \\ & \text{جم فہ جم فہ} + \text{ب جب فہ ب جب فہ} = \text{ج} \\ & \text{جم فہ جم فہ} + \text{ب جب فہ ب جب فہ} = \text{ج} \end{aligned}$$

تو ثابت کرو کہ

$$\left(\frac{1}{\text{ط}} + \frac{1}{\text{فہ}}\right) \left(\frac{1}{\text{ج}} + \frac{1}{\text{ب}}\right) = \frac{1}{\text{ج}} + \frac{1}{\text{ب}} + \frac{1}{\text{ط}}$$

جہاں زاویے سب کے سب غیر مساوی، اور صفر اور ۲ کے درمیان ہیں۔

(۱۴) اگر

$$\text{جب (ط + فہ)} = \text{جب (فہ + ج)} = \text{جب فہ}$$

$$\text{اور } \text{جب (ط + فہ)} + \text{ب جب (ط - فہ)} = \text{ج}$$

تو ثابت کرو کہ یا

$$\text{جب (ط + فہ)} = \text{ج} \text{، یا } \text{جب (ط + فہ)} = \text{ب جب (ط - فہ)} = \text{ج}$$

$$(15) \text{ اگر مساوات } \text{جب (ط + فہ)} + \text{ب جب (ط - فہ)} = \text{ج}$$

درست رہے جبکہ ن = اتو ثابت کرو کہ وہ درست رہیگی جبکہ ن کوئی مثبت صحیح عدد ہو۔

(۱۶) مساواتوں

$$\begin{aligned} & ۲ (جم ع جم ط + جم ذ) (جم ع جب ط + جب ذ) \\ & = ۲ (جم ع جم ط + جم پی) (جم ع جب ط + جب پی) = (جم ذ - جم پی) (جم ذ - جب پی) (جم ذ - جب پی) \\ & سے ط ساقط کرو، اور ثنابت کرو کہ جم (ذ - پی) = ۱، یا جم ۲ ع
 \end{aligned}$$

$$(۱۷) \text{ اگر } \frac{مس ا}{مس ب} = \frac{جب (لا - ع)}{جب ع} \text{ اور } \frac{مس ا}{مس ب} = \frac{جب (لا - ع)}{جب ع} = \frac{جب (لا - ع)}{جب ع}$$

$$\text{تو ثنابت کرو کہ } \frac{مس ا}{جب ب} = \frac{جب لا}{جب ع} = \frac{جم لا}{جم ۲ ع - جم ۲ ب}$$

(۱۸) اگر ع، ب، ج، غیر مساوی ہوں اور ہر ایک سے کم تو ثنابت کرو کہ مساواتوں کا نظام

$$\frac{جب (۲ - ب - ج)}{جم (۲ + ع + ج)} = \frac{جب (۲ - ب - ج)}{جم (۲ + ع + ج)} = \frac{جب (۲ - ب - ج)}{جم (۲ + ع + ج)}$$

ایک واحد مساوات

$$۰ = جم ۲ (ب + ج) + جم ۲ (ع + ج) + جم ۲ (ع + ب)$$

کے مائل ہے۔

$$(۱۹) \text{ اگر } ۲ = لا جم ۲ (ب - ج) + جم (ط + ع) + جم (ط - ع)$$

$$= ۲ جم (ج - ع) + جم (ط + ب) + جم (ط - ب)$$

$$= ۲ جم (ع - ب) - جم (ط + ج) - جم (ط - ج)$$

تو ثنابت کرو کہ لا = جب ط اگر زادیوں ع، ب، ج میں سے کسی دو کا فرق نہ معلوم ہو اور نہ ۲ کے کسی ضعف کے مساوی ہو۔

$$(۲۰) \text{ اگر } ۱ + ب + ج = ۱۸۰ \text{ اور اگر}$$

$$\text{جب } (۱ + ن) \text{ ا جب } (ب - ج) = ۰$$

جہاں ن ایک صحیح عدد ہے تو ثابت کرو کہ

$$\text{جب } (ن - ۱) \text{ ا جب } (۱ + ن) (ب - ج) = ۰$$

$$(۲۱) \text{ اگر } مم \frac{۱}{۲} (ع + ز) (جم - ج) + مم \frac{۱}{۲} (ع + ج) (جم - ج) = ۰$$

$$+ مم \frac{۱}{۲} (ع + ج) (جم - ج) = ۰$$

اور کوئی دو زاویے مساوی نہ ہوں، یا کسی دو زاویوں میں π کے ضعف کا فرق نہ ہو تو ثابت کرو کہ

$$مم \frac{۱}{۲} (ع + ج) (جم - ج) + مم \frac{۱}{۲} (ع + ج) (جم - ج) = ۰$$

$$+ مم \frac{۱}{۲} (ع + ج) (جم - ج) = ۰$$

$$(۲۲) \text{ اگر } \frac{جم (ع + ط) + جب (ع + ط)}{جب (ع + ط) + جم (ع + ط)} = \frac{جم (ع + ط) + جب (ع + ط)}{جب (ع + ط) + جم (ع + ط)}$$

تو ثابت کرو کہ یا تو $ع$ اور $ب$ میں $\frac{۱}{۲} \pi$ کے طاق ضعف کا فرق ہے، یا $ط$ اور $ز$ میں π کے جفت ضعف کا فرق ہے۔

$$(۲۳) \text{ اگر } جم (ع + ط) + جب (ع + ط) + ب جم (ع - ط) + ج = ۰$$

$$جم (ع + ط) + جب (ع + ط) + ب جم (ع - ط) + ج = ۰$$

$$جم (ع + ط) + جب (ع + ط) + ب جم (ع - ط) + ج = ۰$$

اور اگر $ط$ ، $ع$ ، $ز$ سب غیر مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ $ا - ب^۲ + ۲ ب ج = ۰$

$$(۲۴) \text{ اگر } \frac{جم (ع + ط) + جب (ع + ط)}{جم (ع + ط) + جب (ع + ط)} = \frac{جم (ع + ط) + جب (ع + ط)}{جم (ع + ط) + جب (ع + ط)}$$

اور ب، ج، غیر مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ مساوات بالا کا ہر رکن

$$\frac{\text{جم} : \text{ب} + \text{ج} + \text{ط}}{\text{جب} : \text{ب} + \text{ج} + \text{جم}} =$$

$$\text{اور } \frac{\text{جم} : \text{ط}}{\text{جم} : \text{ب} + \text{ج} + \text{جم}} = \frac{\text{جب} : \text{ب} + \text{ج} + \text{جب} : \text{ج} + \text{ط} + \text{جم} : \text{ج} + \text{ط} + \text{جم}}{\text{جم} : \text{ب} + \text{ج} + \text{جم} : \text{ج} + \text{ط} + \text{جم} : \text{ج} + \text{ط} + \text{جم}}$$

(۲۵) اگر ۱، ب، ج، ثابت نہ اویے ہوں جن کا مجموعہ ۱۸۰ ہے تو ثابت کرو کہ

$$\text{جم} : ۱ + \text{جم} : \text{ب} + \text{جم} : \text{ج} < ۱ \text{ اور } \frac{۳}{۴}$$

(۲۶) حل کرو مساوات

$$۶۴ \text{ جب } \text{ط} + \text{جب} : \text{ط} = ۰$$

(۲۷) اگر ۲ س = لا + ا + ی تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس} : \text{س} - \text{لا} + \text{مس} : \text{س} - \text{ا} + \text{مس} : \text{س} - \text{ی} = \text{مس} : \text{س}$$

$$\frac{\text{م} : \text{جب} : \text{لا} : \text{جب} : \text{ما} : \text{جب} : \text{ی}}{\text{ا} : \text{جم} : \text{لا} : \text{جم} : \text{ما} : \text{جم} : \text{ی} - ۲ : \text{جم} : \text{لا} : \text{جم} : \text{ما} : \text{جم} : \text{ی}} =$$

نیز مس : (س - لا) + مس : (س - ا) + مس : (س - ی) = مس : س

$$\frac{۱۶ \text{ لا} : \text{ا} : \text{ی}}{\text{مس} : \text{لا} : \text{ا} : \text{ی} + \text{مس} : \text{لا} : \text{ا} : \text{ی} + \text{مس} : \text{لا} : \text{ا} : \text{ی} - ۴ : \text{مس} : \text{لا} : \text{ا} : \text{ی}} =$$

$$(۲۸) \text{ اگر } \frac{\text{جم} : \text{ط}}{\text{جم} : \text{ب} + \text{ج} + \text{جم}} + \frac{\text{جب} : \text{ط}}{\text{جب} : \text{ب} + \text{ج} + \text{جم}} = ۱$$

تو ثابت کرو کہ

$$۰ = ۱ + \frac{\text{جب} : \text{ط} : \text{جب} : \text{ب} : \text{ج}}{\text{جم} : \text{ط} : \text{جم} : \text{ب} : \text{ج}}$$

(۲۹) اگر ۲ جب $ع$ جم $(ط + ف) = ۲$ جم $(ط - ف) + جم^۲ ع$

اور ۲ جب $ع$ جم $(ط + پ) = ۲$ جم $(پ - ط) + جم^۲ ع$

تو ثابت کرو کہ ۲ جب $ع$ جم $(ف + پ) = ۲$ جم $(ف - پ) + جم^۲ ع$

(۳۰) اگر $جم (ا - ی) + جم (ی - لا) + جم (لا - ما) = - \frac{۳}{۴}$

تو ط کی تمام قیمتوں کے لیے ثابت کرو کہ

$جم (لا + ط) + جم (ما + ط) + جم (ی + ط) - ۳ جم (لا + ط) - جم (ما + ط) - جم (ی + ط) = ۰$

(۳۱) اگر

$$\frac{جم (۲ + ل) جب}{ن} = \frac{جم (۱ + ل) جب}{م} = \frac{جم ل جب}{ل}$$

تو ثابت کرو کہ

$$\frac{جم (۲ + ل) جب}{ن} = \frac{جم (۱ + ل) جب}{م} = \frac{جم ل جب}{ل}$$

(۳۲) ثابت کرو کہ مساواتیں

$$(لا + \frac{۱}{ل}) جب ع = \frac{۱}{ل} + \frac{۱}{م} + جم ع$$

$$(ما + \frac{۱}{م}) جب ع = \frac{۱}{م} + \frac{۱}{ن} + جم ع$$

$$(ی + \frac{۱}{ن}) جب ع = \frac{۱}{ن} + \frac{۱}{ل} + جم ع$$

غیر صالح نہیں ہیں اور وہ

$$لا + ما + ی = \frac{۱}{ل} + \frac{۱}{م} + \frac{۱}{ن} = - جب ع$$

کے مماثل ہیں -

۳۳ - ثابت کرو کہ جملہ

۲ جم (بہ۔ جہ) جم (ط + بہ) جم (ط + جہ) ۲ جم (جہ۔ عہ) جم (ط + جہ) جم (ط + جہ) ۲ جم (عہ۔ جہ) جم (ط + جہ) ۱۔
 طہ پر منحصر نہیں ہے، اس کی قیمت جیوب التمام کے حاصل ضرب کے طور پر ظاہر کرو۔
 (۳۴) اگر مساوات

مس (ط + $\frac{1}{\pi}$) = ۳ مس ۳
 کے چار حل عہ، بہ، جہ، ضد ہوں اور ان میں سے کسی دو کے ماس مساوی نہ ہوں تو ثابت کرو کہ
 مس عہ + مس بہ + مس جہ + مس ضد = ۰
 مس ۲ عہ + مس ۲ بہ + مس ۲ جہ + مس ۲ ضد = $\frac{4}{3}$
 (۳۵) اگر ۶ مس (ر + لا) = ۳ مس (ر + لا) = ۲ مس (ر + ی)
 تو ثابت کرو کہ ۳ جب (لا۔ ما) + ۵ جب (ما۔ ی) - ۲ جب (ی۔ لا) = ۰
 (۳۶) حل کرو مساواتیں

$$\begin{cases} \text{جب لا۔ جب ما} = \frac{2}{3} \pi \\ \text{جم لا۔ جم ما} = \frac{1}{\pi} \pi \end{cases}$$

(۳۷) ثابت کرو کہ مسلسل کسر

$$2 \text{ مس عہ} + 2 \text{ مس عہ} + \frac{1}{2 \text{ مس عہ}} + \dots$$

کا نواں مستحق ہے

$$\frac{(2 \text{ مس عہ} + \text{قطع}^{\text{ن}}) - (2 \text{ مس عہ} - \text{قطع}^{\text{ن}})}{(2 \text{ مس عہ} + \text{قطع}^{\text{ن}}) - (2 \text{ مس عہ} - \text{قطع}^{\text{ن}}) + 1}$$

(۳۸) مساواتوں

$$\begin{cases} 3 \text{ جم ط} + 1 \text{ جم ۳ ط} = ۴ لا \\ 2 \text{ جب ط} - 1 \text{ جب ۳ ط} = ۴ ما \end{cases}$$

سے ط ساقط کرو۔

(۳۹) اگر
$$\frac{\text{مس (ط-ع)}}{\text{ف}} = \frac{\text{مس (ذ-ع)}}{\text{ق}} = \frac{\text{مس (پ-ع)}}{\text{ر}}$$

تو ثابت کرو کہ

ف (ق-ر) جم (ذ-پ) + ق (ر-ف) جم (پ-ط) + ر (ف-ق) جم (ط-ذ) = ۰

(۴۰)
$$\frac{1}{1 + ۱. جم ط + ب جب ط}$$
 کو اس شکل

$$1 + ۱. جم (ط-ع) + ۱. جم ۲ (ط-ع) + \dots$$

کے ایک سلسلہ میں پھیلاؤ۔

(۴۱) مساوات مس ۳ ط - مس ۲ ط - مس ط = ۰ کو حل کرو۔

اگر (۴۲)

جم ۲ لا + جم ۲ ما = جم ۳ ع، جب ۲ لا + جب ۲ ما = جب ۳ ع اور لا + ما = ۲ ب

تو ثابت کرو کہ

۸ جب ۳ (ع + ب) = ۲ ع جب ۲ ب جب ۲ جم ۳ (ع + ب)

(۴۳) اگر
$$۱. جم ذ جم پ + ب جب ذ جب پ = ج$$

$$۱. جم پ جم ط + ب جب پ جب ط = ج$$

$$۱. جم ط جم ذ + ب جب ط جب ذ = ج$$

تو ثابت کرو کہ
$$ب ج + ج ۱ + ۱ ب = ۰$$
، لہٰذا آنکہ $۱ ب = ج$

(۴۴) حل کرو مساوات

$$\pi \frac{۲}{۳} = \left(\frac{۱}{۲} - ۱\right) جم ۱ + ۱ جم ۱ + \left(\frac{۱}{۲} + ۱\right) جم ۱$$

(۴۵) مساواتوں

$$\begin{aligned} & \text{و} \text{ا} \text{جیب ذ} + \text{ب}^2 \text{لاجم ذ} + \text{ر ب} (\text{ر}^2 \text{جیب}^2 \text{ذ} + \text{ب}^2) \text{جم ذ} = \text{ر}^2 \text{ب}^2 \\ & \text{ر}^2 \text{لاقط ذ} - \text{ب}^2 \text{ماقم ذ} = \text{ر}^2 - \text{ب}^2 \\ & \text{سے نہ ساقط کرو۔} \end{aligned}$$

(۴۶) حل کرو مساوات

$$\begin{aligned} & \text{جم}^2 \text{ط} + \text{جم}^2 \text{ط} + \text{جم}^2 \text{ط} + \text{جم}^2 \text{ط} = \frac{1}{4} \\ & \text{مساواتوں} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{ر}^2 \text{جم}^2 \text{ط} + \text{جم}^2 \text{ط} = 2 (\text{ر}^2 \text{جم}^2 \text{ط} - \text{لا}) \\ & \text{ر}^2 \text{جیب}^2 \text{ط} + \text{جیب}^2 \text{ط} = 2 (\text{ر}^2 \text{جیب}^2 \text{ط} - \text{ما}) \end{aligned}$$

سے ط ساقط کرو۔

(۴۸) ثابت کرو کہ مساوات ۳ لا + ما = ن (جہاں ن صحیح عدد ہے) کے حل مثبت صحیح اعداد میں (بشمول صفر) معلوم کیے جائیں تو ان کی تعداد ہے

$$\left[\frac{\pi (1+n^2) \frac{1}{4} \text{جم}^2 \text{ط}}{\pi \frac{1}{4} \text{جم}^2 \text{ط}} \right] \frac{1}{3} \quad (1-n) + 2 + (n-1)$$

(۴۹) حل کرو مساوات

$$4 \text{جم}^2 \text{ط} - \text{جیب}^2 \text{ط} - 10 \text{جم}^2 \text{ط} + 5 \text{جیب}^2 \text{ط} + 22 \text{جم}^2 \text{ط} - 5 \text{جیب}^2 \text{ط} = 10$$

$$\frac{\text{قم}^2 \text{ط} - \text{مس}^2 \text{ط}}{\text{جم}^2 \text{ط} + \text{مس}^2 \text{ط} - 1} \quad (50)$$

کی بڑی قیمت معلوم کرو۔

(۵۱) ثابت کرو کہ کسر مسلسل

(100)

$$\begin{aligned} & \text{قط}^2 \text{ع} - 2 \text{جیب}^2 \text{ع} = \frac{\text{قط}^2 \text{ع}}{-3} \\ & \text{جیب}^2 \text{ع} = \frac{2 \text{جیب}^2 \text{ع} (1 + \text{ع}^2 \text{جم}^2 \text{ع})}{-3} \end{aligned}$$

..... ر خارج قسمتوں تک

(۶۲) اگر مس ۲ ط = مس ۲ فہ - مس فہ = مس ۲ پہ - مس پہ
تو ثابت کرو کہ ط + فہ + پہ = $\frac{1}{4}\pi$ کا ایک طاق ضعیف ہے بشرطیکہ مس ط،
مس فہ، مس پہ سب غیر مساوی ہوں۔

(۶۳) اگر

$$\text{لا.جم.ع.د.} + \text{ما.جب.ع.د.} + \text{ی.} + \text{جم.۲.ع.د.} = ۰$$

$$\text{لا.جم.ب.د.} + \text{ما.جب.ب.د.} + \text{ی.} + \text{جم.۲.ب.د.} = ۰$$

$$\text{لا.جم.ج.د.} + \text{ما.جب.ج.د.} + \text{ی.} + \text{جم.۲.ج.د.} = ۰$$

تو ثابت کرو کہ

$$\text{لا.جم.فہ.د.} + \text{ما.جب.فہ.د.} + \text{ی.} + \text{جم.۲.فہ.د.}$$

$$= ۸ \text{ جب } \frac{1}{4}\pi (\text{ع.د.} + \text{ب.د.} + \text{ج.د.} + \text{فہ.د.}) \text{ جب } \frac{1}{4}\pi (\text{ع.د.} + \text{ب.د.} + \text{ج.د.} + \text{فہ.د.})$$

(۶۴) مساواتوں

$$\text{مس ط} + \text{مس فہ} = ۱$$

$$\text{قط ط} + \text{قط فہ} = ۱$$

$$\text{قم ط} + \text{قم فہ} = ۱$$

سے ط اور فہ ساقط کرو اور ثابت کرو کہ اگر ب اور ج ہم علامت ہوں تو

$$۱۲ < ۱$$

(۶۵) ثابت کرو کہ مساواتوں

$$\frac{\text{جم. (ط-۳.ع.د.)}}{\text{جم.}^3} = \frac{\text{جم. (ط-۳.ب.د.)}}{\text{جم.}^3} = \frac{\text{جم. (ط-۳.ج.د.)}}{\text{جم.}^3}$$

سے ط کو ساقط کیا جائے تو نتیجہ حاصل ہوتا ہے

$$\text{جب (ب-ج.د.) جب (ب-ج.د.) جب (ب-ج.د.)} = \text{جم. (ع.د.} + \text{ب.د.} + \text{ج.د.}) - \text{جم. (ع.د.} + \text{ب.د.} + \text{ج.د.}) = ۰$$

(۶۶) اگر (۱-لا+لا۲) کو لا کی قوتوں میں پھیلایا جائے تو ثابت کرو کہ لا کا سر

$$\text{جب } \frac{1}{3}\pi (۱+۱) \text{ جب } \frac{1}{3}\pi -$$

(۶۷) ثابت کرو کہ $\Sigma \text{جم.}^2 \text{ع.د. جب (ب+ج.د.) جب (ب-ج.د.)}$

$$= ۸ - \text{جب (ب-ج.د.) جب (ب-ج.د.) جب (ب-ج.د.) جب (ب-ج.د.) جب (ب-ج.د.) جب (ب-ج.د.) جب (ب-ج.د.) جب (ب-ج.د.)}$$

(۶۸) ثابث کرو کہ

$$ج^۲ = (ب + ج - د) (ج - ب - د) (ج - د)$$

$$= ۸ (ج - ب - د) (ج - ب - د) (ج - د) (ج - د) (ج - د) (ج - د)$$

(۶۹) اگر $۱ (ج - ب - د) (ج - ب - د) (ج - د) (ج - د) (ج - د) (ج - د) = ۱ (ج - ب - د) (ج - ب - د) (ج - د) (ج - د) (ج - د) (ج - د)$

ثوابت کرو کہ مساوات کا ہر رکن

$$= (۱ - \frac{ب}{ج}) (۱ - \frac{د}{ج}) (۱ - \frac{ب}{ج} + \frac{د}{ج})$$

(۷۰) $ج (ج - ب - د) + ج (ج - د) + ج (ج - د) = ۱ (ج - ب - د) (ج - ب - د) (ج - د) (ج - د) (ج - د) (ج - د)$
کی بڑی سے بڑی قیمت معلوم کرو۔

۱۱ حل کرو مساوات (102)

$$ج (ج - لا - ۱) (ج - لا - ب) (ج - لا - ج)$$

$$= ج (ج - لا - ب) (ج - لا - ج) (ج - لا - ج) (ج - لا - ج) (ج - لا - ج)$$

۱۲ حل کرو مساوات

$$ج (ج - لا - ۱) (ج - لا - ب) (ج - لا - ج) (ج - لا - ج) (ج - لا - ج) (ج - لا - ج) = ۲ (ج - لا - ج) (ج - لا - ج) (ج - لا - ج) (ج - لا - ج) (ج - لا - ج) (ج - لا - ج)$$

۱۳ حل کرو مساوات

$$ج^۲ = ج (ج - لا - ۱) (ج - لا - ب) (ج - لا - ج) (ج - لا - ج) (ج - لا - ج) (ج - لا - ج)$$

۱۴ مساواتوں

$$۱ (ج - لا - ۱) (ج - لا - ب) (ج - لا - ج) (ج - لا - ج) (ج - لا - ج) (ج - لا - ج)$$

$$۲ (ج - لا - ۱) (ج - لا - ب) (ج - لا - ج) (ج - لا - ج) (ج - لا - ج) (ج - لا - ج)$$

سے ط ساقط کرو۔

(۷۵) اگر $۱ + ب + ج = ۱۸۰$ ثوابت کرو کہ

$$ج (ج - لا - ۱) (ج - لا - ب) (ج - لا - ج) (ج - لا - ج) (ج - لا - ج) (ج - لا - ج) = ۱ (ج - لا - ج) (ج - لا - ج) (ج - لا - ج) (ج - لا - ج) (ج - لا - ج) (ج - لا - ج)$$

$$۱ (ج - لا - ۱) (ج - لا - ب) (ج - لا - ج) (ج - لا - ج) (ج - لا - ج) (ج - لا - ج)$$

(۷۶) مساواتوں

$$۴۷ = ۵۱ - ۴۸$$

$$۴۸ = ۵۱ - ۴۷$$

سے ط ساقط کرو۔

(۷۷) اگر ۲ جب $(۲ - ۳)$ ق $(۲ + ۳)$

$$= ۲ \text{ جب } (۲ - ۳) \text{ ق } (۲ + ۳) = ۲ \text{ جب } (۲ - ۳) \text{ ق } (۲ + ۳)$$

تو ثابت کرو کہ

$$۰ = ۲ \text{ جب } ۲ + ۳ + ۴$$

$$۰ = ۲ \text{ جب } (۲ + ۳) + (۲ + ۳) + ۲ \text{ جب } (۲ + ۳) = ۰$$

(۷۸) ثابت کرو کہ

$$\sum_{m=1}^{\infty} \text{جم} (م + ۲) = \text{جم} \left(\frac{1}{4} م + ۲ \right) \text{ جب } \frac{1}{4} (م + ۱) \text{ ق } \frac{1}{4} م$$

$$\text{اور } \sum_{m=1}^{\infty} \text{جم} (م + ۲) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{جم} (م + ۲) + \sum_{p=1}^{\infty} \text{جم} (م + ۲) + \dots$$

$$= \text{جم} \left(\frac{1}{4} م + ۲ \right) \text{ جب } \frac{1}{4} (م + ۱) \text{ ق } \frac{1}{4} م + \dots$$

امثلہ ۷۹ تا ۹۳ کے حسب ذیل سلسلوں کو ن رقموں تک جمع کرو:-

$$(۷۹) \text{ جب } ۱ + \text{جب } ۲ + \text{جب } ۳ + \dots + \text{جب } ۱۰$$

$$(۸۱) \text{ جب } ۱ + \text{جب } ۲ + \text{جب } ۳ + \dots + \text{جب } ۱۰ + ۱$$

$$(۸۱) \text{ ق } ۱ + \text{ق } ۲ + \text{ق } ۳ + \dots + \text{ق } ۱۰ + \text{ق } ۱۱$$

$$+ \dots + \text{ق } \{ (۱ - ۱۰) + ۱ \} \text{ ق } (۱ + ۱۰)$$

(۸۲) جب لا جب ۲ لا جب ۳ لا + جب ۲ لا جب ۳ لا جب ۴ لا + ...

+ جب ن لا جب (ن+۱) لا جب (ن+۲) لا

(۸۳) جب ۳ ع + $\frac{۱}{۳}$ جب ۳ ع + $\frac{۱}{۳}$ جب ۳ ع + ... + $\frac{۱}{۳}$ جب ۳ ع - ا

(۸۴) مس ط - ۳ ط + مس ۲ ط مس ۲ ط + ... + مس ن ط مس (ن+۲) ط

(۸۵) مس ط ق ط ۲ ط + مس ۲ ط ق ط ۲ ط + ... + مس ۱ ط ق ط ۲ ط (108)

(۸۶) مس لا + $\frac{۱}{۴}$ مس $\frac{۱}{۴}$ + $\frac{۱}{۴}$ مس $\frac{۱}{۴}$ + ... + $\frac{۱}{۴}$ مس $\frac{۱}{۴}$

(۸۷) مس لا ق ط ۲ لا + $\frac{۱}{۴}$ مس $\frac{۱}{۴}$ ق ط ۲ لا + $\frac{۱}{۴}$ مس $\frac{۱}{۴}$ ق ط ۲ لا + ...

+ $\frac{۱}{۴}$ مس $\frac{۱}{۴}$ ق ط ۲ لا

(۸۸) ا + ج جم ط جم ف + ج جم ۲ ط جم ۲ ف + ... + ج جم ۱ ط جم (ن-۱) ف

(۸۹) $\frac{\text{جم ۲ ط}}{\text{جب ۲ ط}} + \frac{\text{جم ۲ ط}}{\text{جب ۲ ط}} + \frac{\text{جم ۲ ط}}{\text{جب ۲ ط}} + \dots + \frac{\text{جم ۱ ط}}{\text{جب ۱ ط}}$

(۹۰) $\frac{\text{جب ط}}{\text{جم ط + جم ۲ ط}} + \dots + \frac{\text{جب ط}}{\text{جم ط + جم ۲ ط}}$

(۹۱) $\frac{\text{جم ۲ ع}}{\text{ا - جم ۲ ع ق ط ۲ ع}} + \dots + \frac{\text{جم ۳ ع}}{\text{ا - جم ۳ ع ق ط ۲ ع}}$

(۹۲) $\frac{\pi}{ن} \times ۱ \text{ جب } ۳ + \frac{\pi}{ن} \times ۳ \text{ جب } ۵ + \dots + \frac{\pi}{ن} \times (۱+۲) \text{ جب } (۱+۲)$

(۹۳) $۳ \times ۳ \text{ جب } ۵ + ۲ \times ۲ \text{ جب } ۳ + \dots + (۲+۲) \text{ جب } (۳+۳)$

(۹۴) اگر مساوات

جب (ط+ع) + جب (ط+ب) + جب (ع+ب) = ۰

کے دو ضلع ط، ط، ہوں جہاں ط، ط، ط، ع، ہ میں سے ہر ایک ۲ π سے کم ہے تو ثابت کرو کہ

$$\text{جب } (\text{ط} + \text{ط}) + (\text{ط} + \text{ط}) + (\text{ط} + \text{ط}) = 0 \quad (۹۵) - \text{ثابت کرو کہ}$$

$$\pi \frac{1}{4} = \frac{1 + \sqrt{3}}{3} \frac{1}{4} + \frac{1 + \sqrt{3}}{3} \frac{1}{4}$$

$$\pi \frac{1}{4} = \frac{1 + \sqrt{3}}{3} \frac{1}{4} - \frac{1 + \sqrt{3}}{3} \frac{1}{4} \quad \text{اور}$$

(۹۶) اگر ط کی چار غیر مساوی قیمتیں ع، ہ، ج، ض، ہر ایک ۲ π سے کم ہو اور وہ مساوی

$$\text{جم } ۲ (ل - ط) + \text{جم } (م - ط) + \text{جم } ن = 0$$

کو پورا کریں تو ثابت کرو کہ

$$\text{ع} + \text{ہ} + \text{ج} + \text{ض} - ل = ۲ \pi$$

$$\text{اور جب } \frac{1}{4} (\text{ہ} + \text{ج} + \text{ض} - ع - ۲ م) + \text{جب } \frac{1}{4} (\text{ج} + \text{ض} + ع - ہ - ۲ م})$$

$$+ \text{جب } \frac{1}{4} (\text{ض} + ع + ہ - ج - ۲ م}) + \text{جب } \frac{1}{4} (\text{ع} + ہ + ج - ض - ۲ م}) = 0$$

سر ہے اُس کے مساوی ہے جہاں لا کو ایک سے بڑا فرض کیا گیا ہے ؟
اس لیے یہ سر، اُس سر کے مساوی ہے جو $(1 - \frac{1}{n})^{n-1} - \frac{1}{n}$ کے $(1+r)$ کے
پھیلاؤ میں لا کا ہے۔ یہ آخری سر

$$+ (1+r)(n-2) + 1 \left\} \frac{(1+r)^{n-1} \dots (1-r)^{n-1}}{1} = \right. \\ \left. \left\{ \dots + (2+r) \frac{(1-r)^{n-2} (n-2)}{1} \right. \right.$$

(10b)

اور یہ

$$\left\{ \frac{(1+r)^{n-1} \dots (1-r)^{n-1}}{1} + \frac{(1+r)^{n-2} \dots (1-r)^{n-2}}{(1+r)} + \dots + \frac{(1-r)^{n-1}}{(1+r)^{n-1}} \right\} = \\ = \frac{n(1-r)^{n-1} \dots (1+r)^{n-1}}{1} =$$

جم ط کا سر $\frac{1}{n} \{ (1+r)^{n-1} + (1-r)^{n-1} \}$ یعنی $\frac{1}{n}$ حاصل ہوتا ہے۔ جم ط

کا سر $(1+r)^{n-1} (1 - \frac{1}{n})^{n-1}$ کے پھیلاؤ میں اُس رقم کے مساوی ہے جس میں
لا شامل نہیں ہوتا اور یہ رقم ہے $(1+r)^{n-2} + (1-r)^{n-2} (1+r)$ یا

$\frac{n}{2} \times \frac{n-1}{2}$
پس

$$\text{جم } n \text{ ط} = \frac{n}{2} \times \frac{n-1}{2} \text{ جم ط} + \frac{n(n-1)}{2} \text{ جم ط} + \dots + (1)$$

اس کی عام رقم ہے $(1-r)^{n-1} \dots (1+r)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} \text{ جم ط}$

جبکہ ن طاق ہو۔

جیب یا جیب التمام کی صعودی قوتوں میں سلسلے

۸۰۔ — جم ن ط، جب ن ط کے پھیلاؤ جم ط یا جب ط کی صعودی قوتوں میں معلوم کرنے کے لیے ہم ان چہر سلسلوں کو جو اوپر حاصل کیے گئے ہیں اُلٹی ترتیب میں لکھ سکتے ہیں۔ تاہم مطلوبہ سلسلوں کو بالراست معلوم کرنا بہتر ہوگا۔

اول فرض کرو کہ ن جفت ہے تو

$$\text{جم ن ط} = (1 - \text{جب ط}) \frac{\text{ن} (1 - \text{ن})}{2} - \frac{1}{4} \text{جب ط}^2$$

$$+ \frac{\text{ن} (1 - \text{ن}) (1 - \text{ن}) (2 - \text{ن}) (3 - \text{ن})}{24} - \frac{1}{4} \text{جب ط}^2 - \dots$$

اب مسئلہ ثنائی کے ذریعہ ۱۔ جب ط کی ہر قوت کو پھیلانے سے

$$\text{جم ن ط} = 1 - \left\{ \frac{\text{ن} (1 - \text{ن})}{2} + \frac{\text{ن} (1 - \text{ن})}{4} \right\} + \frac{\text{ن} (1 - \text{ن}) (1 - \text{ن}) (2 - \text{ن})}{24} - \dots$$

$$+ \frac{\text{ن} (1 - \text{ن}) (1 - \text{ن}) (2 - \text{ن}) (3 - \text{ن})}{24} - \dots$$

اس پھیلاؤ میں (۱۔) جب س ط کا سر ہے

$$\frac{1}{4} \text{ن} (1 - \text{ن}) (1 - \text{ن}) (2 - \text{ن}) (3 - \text{ن}) + \frac{\text{ن} (1 - \text{ن}) (1 - \text{ن}) (2 - \text{ن})}{24} - \dots$$

$$+ \frac{\text{ن} (1 - \text{ن}) (1 - \text{ن}) (2 - \text{ن}) (3 - \text{ن})}{24} - \dots$$

جس کو شکل ذیل میں لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{1}{s} \times \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-2s+1)}{(1-s^2) \dots 5 \times 3 \times 1} \left\{ \frac{(1-s^2)}{2} \left(\frac{1-s^2}{2} \right) \dots \left(\frac{1-s^2}{2} \right) \dots (1-s^2) \dots (1-s^2) \right\}$$

$$+ s \left(\frac{1-s^2}{2} \right) \left(\frac{1-s^2}{2} \right) \dots \left(\frac{1-s^2}{2} \right) \left(2+s - \frac{1-s^2}{2} \right) \dots \left(\frac{1-s^2}{2} \right) \left(\frac{1-s^2}{2} \right)$$

$$+ \frac{s(1-s)}{2} \left(\frac{1-s^2}{2} \right) \left(\frac{1-s^2}{2} \right) \dots \left(\frac{1-s^2}{2} \right) \left(3+s - \frac{1-s^2}{2} \right) \dots \left(\frac{1-s^2}{2} \right) \left(\frac{1-s^2}{2} \right) \left(\frac{1-s^2}{2} \right) \dots +$$

اب وانڈر مانڈ کا مسئلہ ہے

(107)

$$(f+q) = f + s + f - s + q + \frac{s(1-s)}{2} + \dots$$

جس میں f ، $f(1-s) \dots (f-s+s) \dots$ کو تعبیر کرتا ہے۔ چونکہ مسئلہ

f اور q کی تمام قیمتوں کے لیے درست ہے، اس لیے فرض کرو کہ $f = \frac{1-s^2}{2}$ ،

$q = \frac{1-s}{2}$ ، تب خطوط وحدانی کے اندر کے سلسلوں پر مسئلہ استعمال کرنے سے ہم دیکھتے

ہیں کہ $(1-s)$ جب s^2 ط کا سر ہے

$$\frac{1}{s} \times \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-2s+1)}{(1-s^2) \dots 5 \times 3 \times 1} \left\{ \frac{(1-s^2)}{2} \left(\frac{1-s^2}{2} \right) \dots \left(\frac{1-s^2}{2} \right) \dots (1-s^2) \dots (1-s^2) \right\}$$

$$\frac{n^2 (n-1)(n-2) \dots (n-2s+1) \dots (n-2s-2-s^2)}{s^2}$$

لہ دیکھو استمد کا الجبرا صفحہ ۲۸۸، یا کرشٹل کا الجبرا جلد دوم صفحہ ۹۔

پس جب 'ن جفت ہو تو

$$\text{جم } ن ط = ۱ - \frac{ن}{۲} \text{ جب } ط + \frac{ن(ن-۲)}{۲} \text{ جب } ط \dots$$

$$+ (۱-س) \frac{ن(ن-۲) \dots (ن-۲س-۲)}{۲س} \text{ جب } ط + \dots (۴)$$

یہ سلسلہ، سلسلہ (۳) الٹی ترتیب میں لکھا ہوا ہے۔

۸۱- نیز

$$\text{جب } ن ط = \text{جم } ط \{ن(۱-ج ط) - \frac{ن(ن-۱)(۱-ن)}{۲} (ج ط) + \dots\}$$

فرض کرو کہ ن جفت ہے، سلسلہ کی ہر رقم کو جب ط کی قوتوں میں پھیلاؤ تو ہمیں

$$(۱-س)^{۱+۲} \text{ جم } ط \text{ جب } س-۱ ط کا سر ملتا ہے}$$

$$\frac{۱}{(۱-س)} \frac{ن(۲-ن) \dots (۲+س-۲-ن)}{(۱-س) \dots ۳ \times ۵ \times ۷ \times ۹} \left\{ \frac{(۱-س-۲)}{۲} (۱-س) + \frac{(۱-س-۲)}{۲} \frac{(۱-ن)}{۲} \right\}$$

$$+ \dots + \frac{(۱-ن)}{۲} \frac{(۱-س-۲)}{۲} \frac{(۱-س)}{۲} \dots$$

جو

$$= \frac{۱}{(۱-س)} \frac{ن(۲-ن) \dots (۲+س-۲-ن)}{(۱-س) \dots ۳ \times ۵ \times ۷ \times ۹} \left(۱ + \frac{۱}{۲} ن + \dots \right)$$

$$= \frac{ن(۲-ن) \dots (۲-۲-ن)}{(۱-س-۲)} =$$

(108)

پس ن جفت ہونے کی صورت میں

$$\text{جب } ن ط = \text{جم } ط = \frac{ن}{۲} \text{ جب } ط - \frac{ن(ن-۲)}{۲} \text{ جب } ط + \dots$$

$$+ (۱-س) \frac{ن(ن-۲) \dots (ن-۲-۲س-۲)}{۲س} \text{ جب } ط + \dots$$

۸۲ — جب n طاق ہو تو

$$\text{جم } n \text{ ط} = \text{جم } ط \{ (1 - \text{جب } ط) \frac{1}{2} (n-1) - \frac{n}{2} (1 - \text{جب } ط) \frac{1}{2} (n-3) \}$$

$$+ \dots +$$

$$\text{اور جب } n \text{ ط} = n (1 - \text{جب } ط) \frac{1}{2} (n-1) \text{ جب } ط$$

$$- \frac{n}{2} (1 - \text{جب } ط) \frac{1}{2} (n-3) \text{ جب } ط + \dots$$

اب پچھلی دفعہ کی طرح جب n کی قوتوں میں سلسلوں کو پھیلانے سے اسی طرح ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{جم } n \text{ ط} = 1 - \frac{n-1}{2} \text{ جب } ط + \frac{(n-1)(n-3)}{2} \text{ جب } ط - \dots$$

$$+ \frac{(n-1)(n-3) \dots (n-2s+1)}{2^s} \text{ جب } ط + \dots$$

$$(9) \dots +$$

$$\text{اور جب } n \text{ ط} = \frac{n}{1} \text{ جب } ط - \frac{n}{3} (1 - \text{جب } ط) + \frac{n}{5} (1 - \text{جب } ط) \dots$$

$$- \dots + \frac{n^{s-1} (1 - \text{جب } ط) \dots (n-2s+1)}{(1-s)!} \text{ جب } ط + \dots$$

$$(10) \dots +$$

۸۳ — اگر ضابطوں (۷)، (۸)، (۹)، (۱۰) میں $\frac{1}{p}$ سے بدل دیا جائے تو حسب ذیل ضابطے حاصل ہوتے ہیں

$$(1 - \frac{1}{p}) \text{ جم } n \text{ ط} = 1 - \frac{n}{p} \text{ جم } ط + \frac{n}{p^2} (1 - \text{جم } ط) \dots$$

$$(11) \dots + \frac{n}{p^2} (1 - \text{جم } ط) \dots$$

$$(1-)\frac{1}{2} \text{ جب } \text{ن ط} \setminus \text{جب ط} = \frac{\text{ن}}{1} \text{ جم ط} - \frac{\text{ن}(\text{ن}-2)}{2} \text{ جم ط} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-2)(\text{ن}-4)}{6} \text{ جم ط} - \dots (12)$$

جبکہ ن خفت ہو، اور

$$(1-)\frac{1}{2}(\text{ن}-1) \text{ جب } \text{ن ط} \setminus \text{جب ط} = 1 - \frac{\text{ن}-2}{2} \text{ جم ط} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-2)(\text{ن}-4)}{6} \text{ جم ط} - \dots (13)$$

(109)

$$(1-)\frac{1}{2}(\text{ن}-1) \text{ جم } \text{ن ط} = \frac{\text{ن}}{1} \text{ جم ط} - \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{2} \text{ جم ط} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-3)}{6} \text{ جم ط} - \dots (14)$$

جبکہ ن طاق ہو۔ یہ سب ضابطے وہی ہیں جو دفعات ۷، ۸ اور ۹ میں حاصل کئے گئے تھے۔

تحت ضعفی زاویوں کے دائری تفاعل

۸۴ — اگر ہم ضابطوں (۱) تا (۶) میں یا ان کی مماثل شکلوں (۷) تا (۱۲) میں ط کی بجائے ط لکھیں تو ایسی مساواتیں ملتی ہیں جن سے جم ط یا جب ط دریافت ہو سکتا ہے جبکہ جم ط اور جب ط دیے گئے ہوں۔ ہم مختلف صورتوں پر غور کریں گے۔

(۱) فرض کرو کہ جم ط دیا گیا ہے، تب اُسی مساوات سے جو (۱) سے حاصل کی گئی ہے جم ط کی قیمتیں ملینگی۔ پس جم ط دیا گیا ہے تو ان تمام زاویوں کی جوب التمام معلوم ہونے کی امید رکھنی چاہیے جو $\frac{2}{\pi} \text{ ک } \text{ن ط}$

میں شامل ہیں، کیونکہ $2\pi \pm \pi$ ط سے وہ تمام زاویے تعبیر ہوتے ہیں جن کی جیب التمام وہی ہے جو ط کی ہے، اس میں ک کوئی صحیح عدد ہے۔ اب ک کی خواہ کوئی قیمت ہو ہم رکھ سکتے ہیں $2\pi \pm \pi = \pi + 2\pi$ ان جن میں π کی قیمت $0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n-1$ میں سے ہمیشہ کوئی ایک ہے اور ک مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔ تب

$$\text{جم } 2\pi \pm \pi = \frac{\text{جم} (\pi + 2\pi \pm 2\pi)}{n} = \frac{\text{جم } \pi + 2\pi}{n}$$

اس طرح ہمیں حسب ذیل n قیمتوں کے حاصل ہونے کی توقع رکھنی چاہیے:-

$$\frac{\text{جم } \pi}{n}, \frac{\text{جم } \pi + 2\pi}{n}, \frac{\text{جم } \pi + 4\pi}{n}, \dots, \frac{\text{جم } \pi + 2(n-1)\pi}{n}$$

اور یہ قیمتیں اُس مساوات کی اصلیں ہوں گی جو (۱) سے حاصل ہوتی ہے۔ یہ سب اصلیں بالعموم مختلف ہوتی ہیں کیونکہ ان میں سے کسی دو زاویوں کا مجموعہ یا فرق 2π کا ضعف نہیں ہے۔

(۲) فرض کرو جم ط دیا گیا ہے، تب اُن مساواتوں سے جو (۳) یا (۶) سے حاصل ہوتی ہیں جب $\frac{\pi}{2}$ کی قیمتیں ملینگی۔ (۶) کو استعمال کرنے سے پیشتر ہمیں اس کی ہر جانب کا مربع لینا چاہیے۔ جم $\frac{\pi}{2}$ کی بجائے $1 - \frac{\pi}{2}$ لکھنا چاہیے، اس ط (۶) سے جب $\frac{\pi}{2}$ کے لیے 2π درجہ کی ایک مساوات بنتی ہے جبکہ n طاق ہو، اور مساوات (۳) سے n درجہ کی ایک

مساوات بنتی ہے جبکہ n جفت ہو۔ پس ہمیں جب $2\pi \pm \pi$ ط کی تمام قیمتیں حاصل کرنے کی توقع رکھنی چاہیے جبکہ جم ط دیا گیا ہو۔ بچھلی صورت کی طرح ہم یہ دیکھا کرتے ہیں کہ یہ تمام قیمتیں جملہ جب $2\pi \pm \pi$ ط میں شامل ہیں جہاں π کی قیمتیں $0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n-1$ ہیں۔ جب n طاق ہو تو یہ سب قیمتیں مختلف ہوتی ہیں اور اس لیے 2π قیمتیں حاصل ہوتی ہیں اور یہ اُس مساوات کی 2π اصلیں ہیں جو (۶) سے حاصل ہوتی ہے۔ جب n جفت ہو تو جب $2\pi \pm \pi$ ط = جب $2\pi \pm \pi$ ط

اس لیے اُس صورت میں صرف ان قیمتیں ہیں اور وہ (۳) سے حاصل کردہ مساوات سے ملتی ہیں۔

(۳) فرض کرو جب ط دیا گیا ہے۔ تب جم ط معلوم کرنے کے لیے ہم وہ مساوات استعمال کرتے ہیں جو (۲) سے حاصل ہوتی ہے: اس مساوات سے جم ط کی ۲ قیمتیں حاصل ہوتی ہیں، کیونکہ اس مساوات کو استعمال کرنے سے پیشتر ہمیں طرفین کا ربع لینا اور جب ط کی بجائے اجم ط رکھنا پڑتا ہے۔ حسب سابق ہم یہ ثابت کرتے ہیں کہ جملہ جم س $7 + 1 = 8$ کی ۲ قیمتیں ہیں: اس طرح ۲۱ وجوہ کی ایک مساوات سے جم ط کی ۲ قیمتیں معلوم ہوتا ہے۔

(۴) فرض کرو کہ جب ط دیا گیا ہے، تب جب $\frac{1}{n}$ ملے معاوم کرنے کے لیے ہم وہ مساوات استعمال کرنے ہیں جو (۴) یا (۵) سے حاصل ہوتی ہے جو جب اس کے کہ ن جفت یا طاق ہے۔ اگر ن جفت ہے تو (۴) سے حاصل کرو۔ مساوات سے جب $\frac{1}{n}$ کی ۲ ن قیمتیں ملتی ہیں قیمتیں جب $\frac{1}{n} + \pi(1-n)$ سے $\frac{1}{n}$ کی ۲ قیمتیں ہونگی۔ اگر ن طاق ہے تو (۵) سے حاصل کردہ مساوات سے جب $\frac{1}{n}$ کی ۲ قیمتیں ملینگی جو جب $\frac{1}{n} + \pi(1-n)$ سے مختلف قیمتیں ہونگی۔

مساواتوں کی اصولوں کے متشاکل تفعا عل

۸۵۔ ضابطہ (۱) کو جم ط میں ن دیں درجہ کی ایک مساوات خیال کیا جا سکتا ہے جبکہ جم ن ط دیا گیا ہو۔ اب چونکہ ن زاویوں ط ط + $\frac{\pi}{6}$ ، ط ط + $\frac{\pi}{3}$ ،
ط ط + $\frac{\pi}{n-1}$ میں سے ہر زاویہ ایسا ہے کہ اس کے ن گنے کی جیب تمام
جم ن ط کے مساوی ہے اور چونکہ جم ط، جم (ط + $\frac{\pi}{6}$)، جم (ط + $\frac{\pi}{3}$)،
جم {ط + $\frac{\pi}{n-1}$ } سب کے سب مختلف ہیں، وہ جم ط کی مساوات

کی اصلیں ہیں؛ اب ہم n حیوب التمام جم $(ط + \frac{\pi}{n})$ اور $\frac{\pi}{n} = 2\pi, 4\pi, \dots, 10\pi$ رکھنے سے حاصل ہوتی ہیں۔ کئے متشاکل تفاعلات حیوب کرنے سے یہ وہ سب مساوی مسئلے استعمال کر سکتے ہیں جو مساواتوں کی اصلوں کے متشاکل تفاعلات حیوب کرنے میں استعمال ہوئے تھے۔ اگر ضابطوں (۱۱) اور (۱۲) کے استعمال کرنے میں سہولت ہو تو ہم انہیں استعمال کر سکتے ہیں کیونکہ وہ (۱) سے مماثل ہیں۔ نیز مساوات (۲) ان (ن-۱) زادیوں کی حیوب التمام کے متشاکل تفاعلات محسوب کرنے میں استعمال ہو سکتی ہے جن کے لیے جب n ط جب n کی قیمت دی ہوئی ہو۔

اسی طرح مساوات (۳) 2π م حیوب

جب n ط جب $(ط + \frac{\pi}{m})$ جب $(ط + \frac{\pi}{m})$ جب $(ط + \frac{\pi}{m})$ جب $(ط + \frac{\pi}{m})$ کے متشاکل تفاعلات محسوب کرنے میں استعمال ہو سکتی ہے جبکہ $n = 2m$ ۔ اسی طرح مسئلہ (۵) $1 + m^2$ حیوب

جب n ط جب $(ط + \frac{\pi}{1+m^2})$ جب $(ط + \frac{\pi}{1+m^2})$ جب $(ط + \frac{\pi}{1+m^2})$ کے متشاکل تفاعلات محسوب کرنے میں استعمال ہو سکتا ہے جبکہ $n = 1 + m^2$ ۔ مساوات

$$\begin{aligned} & \text{مس } n \text{ ط } \left[1 - \frac{n(n-1)}{2} \text{ مس } ط + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \text{ مس } ط \right] \\ & = n \text{ مس } ط - \frac{n(n-1)(n-2)}{3} \text{ مس } ط + \dots \end{aligned}$$

کو مس n کی مساوات سمجھا جا سکتا ہے جس کی اصلیں ہیں

مس n ط مس $(ط + \frac{\pi}{n})$ مس $(ط + \frac{\pi}{n})$ مس $(ط + \frac{\pi}{n})$ اور اس لیے اس کو ان جملوں کے متشاکل تفاعلات محسوب کرنے میں استعمال کیا جا سکتا ہے۔

(112)

امثلہ

(۱) ثابت کرو کہ زاویوں

$$\frac{\pi(1-n)}{n} + ط^۱, \dots, ط^۲ + \frac{\pi^۲}{n}$$

میں سے دو دو کے تقاطع الناموں کے حاصل ضربوں کا مجموعہ - $\frac{1}{n}$ نم $\frac{1}{n}$ ط ہے جہاں n ایک جفت عدد ہے۔

مسادات (۲) استعمال کرنے سے یہ معلوم ہوتا کہ اگر مندرجہ بالا زاویوں میں سے $n-۲$ زاویوں کی جیب کے حاصل ضربوں کے مجموعہ کو ان سب زاویوں کی جیب کے حاصل ضرب سے تقسیم کیا جائے تو حاصل قیمت مطلوبہ مجموعہ ہے؟ یہ حاصل قیمت جب $ط$ کے سر کے مساوی ہے اگر اس کو اس رقم سے تقسیم کیا جائے جس میں جب $ط$ شامل نہیں ہوتا یعنی

$$\frac{n}{(1-n) ط} = - \text{مطلوبہ مجموعہ}$$

$$= - \frac{n}{ط} \text{ نم } \frac{1}{n} ط$$

(۲) ثابت کرو کہ

$$\frac{19}{14} = \pi \frac{1}{4} \text{ جم} + \pi \frac{2}{9} \text{ جم} + \pi \frac{3}{9} \text{ جم} + \pi \frac{4}{9} \text{ جم}$$

$$\text{اور } 1120 = \pi \frac{1}{4} \text{ قط} + \pi \frac{2}{9} \text{ قط} + \pi \frac{3}{9} \text{ قط} + \pi \frac{4}{9} \text{ قط}$$

اگر جب $ط$ جب $ط$ کو جم کی رقم میں بیان کیا جائے اور پھر اس کو صفر کے مساوی رکھا جائے تو اس آٹھویں درجہ کی مسادات کو حل کرنے سے جم $ط$ کی جو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں وہ ہونگی

$$\pi \frac{1}{4} \text{ جم}, \pi \frac{2}{9} \text{ جم}, \dots, \pi \frac{4}{9} \text{ جم}$$

لیکن ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{جم } \frac{4}{9} \pi = - \text{جم } \frac{1}{9} \pi, \text{ جم } \frac{4}{9} \pi = \pi - \text{جم } \frac{4}{9} \pi = \pi - \text{جم } \frac{2}{9} \pi, \dots$$

اس لیے مساوات متذکرہ بالا کی اصلیں ہیں

$$\pm \text{جم } \frac{1}{9} \pi, \pm \text{جم } \frac{2}{9} \pi, \pm \text{جم } \frac{3}{9} \pi, \pm \text{جم } \frac{4}{9} \pi$$

اب ہم سلسلہ (۲) استعمال کر سکتے ہیں یا عمل کو اس طرح جاری کر سکتے ہیں :-

اگر جب ۹ ط = ۰ تو

$$\text{جب } ۵ ط, \text{ جم } ۴ ط + \text{جم } ۵ ط \text{ جب } ۴ ط = ۰$$

یا

$$(\text{جب } ۳ ط, \text{ جم } ۲ ط + \text{جم } ۳ ط \text{ جب } ۲ ط) (۲ \text{ جم } ۲ ط - ۱)$$

$$+ (\text{جم } ۳ ط, \text{ جم } ۲ ط - \text{جب } ۳ ط \text{ جب } ۲ ط, \text{ جب } ۲ ط, \text{ جم } ۳ ط = ۰$$

جب ۳ ط، جم ۲ ط، وغیرہ کی بجائے ان کی قیمتیں درج کروادہ جزو ضربی جب ط کو خارج کرد اور فرض کرو کہ لا = جم ۲ ط تو لا میں حسب ذیل پارہ جی مساوات حاصل ہوگی

$$\{ (۳ - لا) (۱ - لا) + (۲ - لا) (۳ - لا) \} \{ (۲ - لا) (۱ - لا) - ۱ \} + \{ (۲ - لا) (۱ - لا) - ۱ \} (۳ - لا) = ۰$$

$$۰ = (۱ - لا) (۳ - لا) (۱ - لا) (۳ - لا) - ۱$$

$$یا (۱۶ - لا) (۱۲ + لا) (۸ - لا) (۸ + لا) + (۴ - لا) (۴ + لا) (۲۰ + لا) (۲۰ + لا) - ۱ = ۰$$

یا نا کی قوتوں کے بموجب ترتیب دینے سے

$$۰ = ۱ + لا ۴۰ - لا ۲۴۰ + لا ۴۴۰ - لا ۲۵۶$$

اس مساوات کی اصلوں کا حاصل جمع $\frac{۲۴۰}{۲۵۶}$ ہے اور دو دو اصلوں کے حاصل ضرب کا

$$\frac{۲۵۶ \times ۲۴۰ \times ۲ - ۲۴۰}{۲(۲۵۶)} = \text{مجموعہ } ۲۴۰ - \text{ہے اس لیے اصلوں کے مربعوں کا مجموعہ}$$

$$= \frac{۱۹}{۱۶} \text{ نیز اصلوں کے متکافیوں کے مربعوں کا مجموعہ } = ۲۴۰ - ۲۴۰ \times ۲ = ۱۱۲۰$$

(۳) ثابت کرو کہ

$$\text{جب } ۵ ط + \text{جب } ۲ ط + \text{جب } ۴ ط = \frac{1}{2}$$

جہاں $e = \frac{1}{\pi}$ -

ہم دیکھتے ہیں کہ (جب ۷ + جب ۷ + جب ۷) = جب ۷ + جب ۷ + جب ۷ + جب ۷ + جب ۷
 اگر جب ۷، ط ۷ جب ط کو جب ط کی رقم میں پھیلایا جائے (اور پھر اس کو سفر کے مساوی
 رکھا جائے تو جب ط کی مساوات کی اصنیں ہونگی

\pm جیب $e^{\frac{1}{2}}$, \pm جیب $m e^{\frac{1}{2}}$, \pm جیب $m e$

رکھو لا = جب اُط تو لا میں مساوات حاصل ہوتی ہے

$$= 4 - 0.54 + 0.112 - 0.477$$

اس لیے $\frac{6}{7} = \frac{112}{98} = 1\frac{14}{98} = 1\frac{1}{7}$ جب ۲ سے ۷ جب ۲ سے ۷

اس لیے جب ۷ + جب ۲ + جب ۲ = $\frac{1}{4}$ ۷

(۴) جب $\frac{\pi}{12}$ کی قیمت معلوم کرو۔

لکھو $\frac{112}{100} =$ تو اس ضابطہ سے جو زاویوں کی جبرجہ تمام کے مجموعہ کے لیے ہے جبکہ زاویے سلسلہ حسابیہ میں ہوں ہم معلوم کرتے ہیں۔

$$\frac{1}{p} = (\text{مجموعه } 11 + 12 + 13 + 14 + 15) + (\text{مجموعه } 16 + 17 + 18 + 19 + 20)$$

نیز (جم ۷ + جم ۹ + جم ۱۳ + جم ۱۷) اور (جم ۳۷ + جم ۵۵ + جم ۷۷ + جم ۱۱۷) کو باہم ضرب دینے اور ہر دو حیوب التام کے حاصل ضرب کی بجائے ان دو حیوب التام کے مجموعہ کا نصف لکھنے سے یہ معلوم ہوگا۔

$$1 = (\text{جم ۱} + \text{جم ۲} + \text{جم ۳} + \text{جم ۴} + \text{جم ۵}) (\text{جم ۱} + \text{جم ۲} + \text{جم ۳} + \text{جم ۴} + \text{جم ۵})$$

پس خطوط وحدانی کے اندر کی دو مقداریں دو درجی مساوات $y + \frac{1}{2} = 1$ کی اصلیں ہیں، لیکن اس مساوات کی اصلیں $\frac{1}{2}$ (-1 ± 1) ہیں۔ اب یہ آسانی سے معلوم ہوتا ہے کہ

جسم ۷ + جسم ۱۳ + جسم ۵ = ثابت ہے اور جسم ۲ + جسم ۵ + جسم ۷ + جسم ۱۱ =
منفی ہے۔ اس لیے

$$(1 - \sqrt{5}) \frac{1}{\sqrt{5}} = 0.15م + 0.13م^2 + 0.09م^3 + 0.07م^4$$

$$(1 + \sqrt{17}) \frac{1}{4} = s_{11} \zeta + s_{12} \zeta^2 + s_{13} \zeta^3 + s_{14} \zeta^4.$$

اب ہم یہ دکھا سکتے ہیں کہ $(\text{جم } ۷ + \text{جم } ۱۳) (\text{جم } ۹ + \text{جم } ۵) = \frac{1}{4}$

اس لیے جم ۷ + جم ۱۳ = جم ۹ + جم ۵ اس دو درجی مساوات

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = (1 - \sqrt{14}) - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$$

کی اصلیں ہیں۔ پس

$$\text{جم ۷} + \text{جم ۱۳} = \frac{1}{p} = (1 - \sqrt{14} + \sqrt{14} - 3\sqrt{14} + \sqrt{14})$$

اسی طرح حاصل ہوگا

$$\text{جم ۳} + \text{جم ۵} = \frac{1}{p} = (1 - \sqrt{14} + \sqrt{14} - 3\sqrt{14} + \sqrt{14})$$

اب جم ۷ جم ۱۳ = جم ۱۲ جم ۱۲ = (جم ۱۲ + جم ۱۲) = (جم ۳ + جم ۵) اور

چونکہ ہم نے جم ۷، جم ۱۳ کے مجموعہ اور حاصل ضرب کو معلوم کر لیا ہے اس لیے ہم ان میں سے ہر ایک کو معلوم کر سکتے ہیں۔ یہ دیکھتے ہوئے کہ جم ۷، جم ۱۳ ہمیں مل جاتا ہے

$$\text{جم ۷} = \frac{1}{14} \{ \sqrt{14} - 1 + \sqrt{14} - 3\sqrt{14} + \sqrt{14} - 3\sqrt{14} + \sqrt{14} - 3\sqrt{14} + \sqrt{14} \}$$

تب ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{جب } \frac{1}{p} = \frac{1}{14} (1 - \sqrt{14})$$

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{14} \{ \sqrt{14} - 1 + \sqrt{14} - 3\sqrt{14} + \sqrt{14} - 3\sqrt{14} + \sqrt{14} - 3\sqrt{14} + \sqrt{14} \}$$

(۵) ثابت کرو کہ اگر (۱، ۱) ایک متجانس تفاعل ہو لا، ماکا جس کے بعد ان میں نو

ف (جب لا، جم ۱)

جب (لا، جم) جب (لا، جم) جب (لا، جم) جب (لا، جم)

ف (جب جم ۷، جم ۵)

$\sum_{n=1}^{\infty}$

جب (لا، جم) جب (لا، جم) جب (لا، جم) جب (لا، جم) جب (لا، جم)

ہرست فی اس سٹاکو، Integration des Fonctions circulaires Sur 1' Integration des Fonctions circulaires

بابہ ۲۸۴ میں شائع ہوا تھا۔

Proc. Lond. math. Soc.

ج

اس میں جم ط کی اعلیٰ ترین قوت $\frac{1}{2}$ جم ط ہے اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ ؛ اس لیے

$$ج\text{م } n = ط - \frac{1}{2} (\text{ج}\text{م } ط - \frac{\pi}{n_1}) (\text{ج}\text{م } ط - \frac{\pi^3}{n_2}) \dots (\text{ج}\text{م } ط - \frac{\pi(1-n)}{n})$$

اب جم $\frac{\pi}{2n} =$ جم $\frac{\pi(1-n)}{2n}$ ، اس لیے یہ جملہ لکھا جاسکتا ہے

$$\text{جم} \text{ ن } ط = {}^3\text{ج} \text{ ط} - ({}^2\text{ج} \text{ ط} - {}^2\text{ج} \text{ ن}) ({}^2\text{ج} \text{ ط} - {}^2\text{ج} \text{ ن}) \dots ({}^2\text{ج} \text{ ط} - {}^2\text{ج} \text{ ن}) ({}^2\text{ج} \text{ ط} - {}^2\text{ج} \text{ ن})$$
 جبکہ ن طاق ہو، اور

$$\text{جمن } \pi = \pi^0 - \pi^1 + \pi^2 - \pi^3 + \dots - \pi^{n-1} + \pi^n \quad (115)$$

جبکہ ن جفت ہو۔ نیز یہ جملے لکھے جاسکتے ہیں

$$\frac{\text{حجم ط}}{\text{حجم ط}} = 1 - \left(\frac{\text{حجم ط}}{\text{حجم ط}}\right)^2 - \left(\frac{\text{حجم ط}}{\text{حجم ط}}\right)^3 - \dots - \left(\frac{\text{حجم ط}}{\text{حجم ط}}\right)^n - \left(\frac{\text{حجم ط}}{\text{حجم ط}}\right)^{n+1}$$
 جبکہ ن طاق ہو، اور

ج. م. ن. ط = $\frac{1}{2} \left(\text{ج. م. ن. ط} - \frac{\pi}{2} \right) \left(\text{ج. م. ن. ط} - \frac{\pi}{2} \right) \dots \left(\text{ج. م. ن. ط} - \frac{\pi}{2} \right) \left(\text{ج. م. ن. ط} - \frac{\pi}{2} \right) \dots \left(\text{ج. م. ن. ط} - \frac{\pi}{2} \right) \left(\text{ج. م. ن. ط} - \frac{\pi}{2} \right) \dots$
 جبکہ ن جفت ہو۔

ان جملوں میں سے ہر ایک میں ط = . رکھنے سے ہمیں حسب ذیل مسئلے حاصل ہوتے ہیں :-

$$(15) \dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} (n-1) \text{ جب } \frac{\pi}{n} \text{ جب } \frac{\pi^2}{n^2} \dots \text{ جب } \frac{\pi (n-1)}{n} = 1 \\ \frac{1}{2} (n-1) \text{ جب } \frac{\pi}{n} \text{ جب } \frac{\pi^2}{n^2} \dots \text{ جب } \frac{\pi (1-n)}{n} = 1 \end{array} \right.$$

جبکہ ن جفت ہو۔

جذر المربع نکالنے میں مثبت علامت لگائی ہے کیونکہ زاویے سب کے سب حادہ ہیں۔
 $\text{حم ن ط} \div \text{حم ط یا حم ن ط}$ کے لیے جو جملے اوپر حاصل ہوئے ہیں ان کو اگر ہم
 (۱۵) میں بیان کردہ حاصل ضربوں میں سے متناظر حاصل ضرب کا مربع نیکر اس
 سے تقسیم کریں تو ہمیں یہ جملے حاصل ہوتے ہیں:

$$\frac{\text{حم ن ط}}{\text{حم ط}} = \left(1 - \frac{\text{جب ط}^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{\text{جب ط}^2}{\pi^2}\right) \dots \left(1 - \frac{\text{جب ط}^2}{\pi^2}\right) \dots (16)$$

جبکہ ن طاق ہو، اور

$$\frac{\text{حم ن ط}}{\text{حم ط}} = \left(1 - \frac{\text{جب ط}^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{\text{جب ط}^2}{\pi^2}\right) \dots \left(1 - \frac{\text{جب ط}^2}{\pi^2}\right) \dots (17)$$

جبکہ ن جفت ہو۔

ہم ان مسئلوں (۱۶) اور (۱۷) کو لکھ سکتے ہیں اس طرح :-

(116)

$$\frac{\text{حم ن ط}}{\text{حم ط}} = \prod_{r=1}^{\frac{n}{2}} \left(1 - \frac{\text{جب ط}^2}{\pi^2 (1-r^2)}\right) \quad (18)$$

جبکہ ن طاق ہو، اور

$$\frac{\text{حم ن ط}}{\text{حم ط}} = \prod_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{\text{جب ط}^2}{\pi^2 (1-r^2)}\right) \quad (19)$$

جبکہ ن جفت ہو۔

۸۷۔ دفعہ مابقی کی طرح چونکہ جب ن ط \text{جب ط}، \text{حم ط} میں ن - ۱ درجہ کا ایک جبری تفاعل ہے اس لیے اس کے لیے ایک

تناظر جملہ اجزائے ضربی میں معلوم کیا جا سکتا ہے جو (اجزائے ضربی) حجم ط
میں خطی ہوں، اس صورت میں

$$\text{حجم } \frac{\pi}{n} ، \text{ حجم } \frac{\pi^2}{n} ، \dots ، \text{ حجم } \frac{\pi(n-1)}{n}$$

حجم ط کی وہ قیمتیں ہیں جن کے لیے جب ن طہ جب طہ فصر کے مساوی
ہے۔ یہ قیمتیں لکھی جا سکتی ہیں:

$$\pm \text{ حجم } \frac{\pi}{n} ، \pm \text{ حجم } \frac{\pi^2}{n} ، \dots$$

پس حسب سابق

جب ن طہ جب طہ = $\frac{\pi}{n}$ حجم طہ - حجم طہ ($\frac{\pi^2}{n}$) (حجم طہ - حجم طہ) ($\frac{\pi^2}{n}$) ... (حجم طہ - حجم طہ) ($\frac{\pi(n-1)}{n}$)
جبکہ ن جفت ہو، اور

جب ن طہ جب طہ = $\frac{\pi}{n}$ حجم طہ - حجم طہ ($\frac{\pi^2}{n}$) (حجم طہ - حجم طہ) ($\frac{\pi^2}{n}$) ... (حجم طہ - حجم طہ) ($\frac{\pi(n-1)}{n}$)
جبکہ ن طاق ہو۔

ان جملوں کو ہم حسب ذیل شکلوں میں لکھ سکتے ہیں:-

جب ن طہ جب طہ = $\frac{\pi}{n}$ حجم طہ - حجم طہ ($\frac{\pi^2}{n}$) (حجم طہ - حجم طہ) ($\frac{\pi^2}{n}$) ... (حجم طہ - حجم طہ) ($\frac{\pi(n-1)}{n}$)
جبکہ ن جفت ہو، اور

جب ن طہ جب طہ = $\frac{\pi}{n}$ حجم طہ - حجم طہ ($\frac{\pi^2}{n}$) (حجم طہ - حجم طہ) ($\frac{\pi^2}{n}$) ... (حجم طہ - حجم طہ) ($\frac{\pi(n-1)}{n}$)
جبکہ ن طاق ہو۔

آئندہ باب میں ہم یہ دکھائیں گے کہ جب ن طہ کی انتہاں ہے جبکہ طہ لا انتہا
چھوٹا ہو، پس

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} = 0 ، \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^2}{n} = 0 ، \dots ، \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(n-1)}{n} = \pi$$

بائیں باب آخری جزو ضربی جب $\frac{\pi(n-1)}{n}$ یا جب $\frac{\pi(n-1)}{n}$ سے بموجب
اس کے کہ ن جفت ہے یا طاق۔ پس

$$\text{جب } n \text{ ط } \setminus n \text{ جب } ط = \text{جم } ط \quad \prod_{r=1}^{n-1} \frac{1}{r} = \frac{1}{(n-1)!} \quad (19) \dots \left(\frac{\text{جب } ط^2}{\frac{\pi^2}{n}} - 1 \right)$$

جبکہ n جفت ہو، اور

$$\text{جب } n \text{ ط } \setminus n \text{ جب } ط = \text{جم } ط \quad \prod_{r=1}^{n-1} \frac{1}{r} = \frac{1}{(n-1)!} \quad (20) \dots \left(\frac{\text{جب } ط^2}{\frac{\pi^2}{n}} - 1 \right)$$

جبکہ n طاق ہو۔

۸۸۔ جملہ $\text{جم } n \text{ ط}$ ۔ $\text{جم } n$ نہ کو $\text{جم } ط$ کا n دیں درجہ کا ایک جبری تفاعل خیال کیا جاسکتا ہے اور اس لیے اس کو اجزائے ضربی میں تحلیل کیا جاسکتا ہے؟ $\text{جم } ط$ کی وہ قیمتیں جن کے لیے یہ جملہ معدوم ہوتا ہے یہ ہیں

$\text{جم } ذ، \text{جم } (ذ + \frac{\pi^2}{n})، \text{جم } (ذ + \frac{\pi^2}{n})، \dots$

اس لیے

$$\text{جم } n \text{ ط} - \text{جم } n \text{ ذ} = \prod_{r=1}^{n-1} \left\{ \text{جم } ط - \text{جم } (ذ + \frac{\pi^2}{n}) \right\}$$

(۲۱).....

۸۹۔ اب ہم جملہ $\text{جم } ط - \text{جم } n \text{ ذ}$ کے اجزائے ضربی معلوم کریں گے۔

$$\begin{aligned} & \text{جم } ط - \text{جم } n \text{ ط} + \text{جم } n \text{ ذ} = \left(\text{جم } ط - \text{جم } (ذ + \frac{\pi^2}{n}) \right) \left(\text{جم } ط - \text{جم } (ذ + \frac{\pi^2}{n}) \right) \dots \\ & + \text{جم } ط - \text{جم } (ذ + \frac{\pi^2}{n}) \left(\text{جم } (ذ + \frac{\pi^2}{n}) - \text{جم } (ذ + \frac{\pi^2}{n}) \right) \dots \\ & - \left(\text{جم } (ذ + \frac{\pi^2}{n}) - \text{جم } (ذ + \frac{\pi^2}{n}) \right) \dots \end{aligned}$$

لے فریز (Peters) نے یہ طریقہ مسٹر آف میٹھیڈک کی پانچویں جلد میں بیان کیا ہے۔

اگر ہم $\text{لا} - ۲$ جم $\text{ن ط} + \text{لا}^۱$ کو $\text{ع}^۱$ سے تعبیر کریں تو ہم اس متماثلہ کو لکھ سکتے ہیں

$$\text{ع}^۱ = (\text{لا}^۱ + \text{لا}^۱ + ۱) + \text{ع}^۱ + ۲ - ۱ - \text{ن ط} - \text{ع}^۱ - ۲$$

اس مساوات سے ظاہر ہے کہ $\text{ع}^۱$ سے تقسیم پذیر ہے بشرطیکہ $\text{ع}^۱ - ۱$ اور $\text{ع}^۱ - ۲$ سے تقسیم پذیر ہوں۔

$$\text{اب } \text{ع}^۱ = (\text{لا} - ۲ \text{ جم } \text{ن ط} + \text{لا}^۱) (\text{لا} + ۲ \text{ جم } \text{ن ط} + \text{لا}^۱)$$

اس لیے $\text{ع}^۱$ ، $\text{ع}^۱$ سے تقسیم پذیر ہے اور اس لیے $\text{ع}^۱$ بھی تقسیم پذیر ہے اور علیٰ التبعیہ
پس $\text{ع}^۱$ سے تقسیم پذیر ہے اور اس لیے $\text{لا}^۱ - ۲$ جم $\text{ن ط} + \text{لا}^۱$ کا ایک
جز و ضربی $\text{لا}^۱ - ۲$ جم $\text{ن ط} + ۱$ ہے؛ اب چونکہ جم ن ط کو بدلے بغیر ط کو

(118)

$$\text{ط} + \frac{\pi r^2}{n} \text{ میں تبدیل کیا جاسکتا ہے اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ}$$

$$\text{لا}^۱ - ۲ \text{ لاجم } (\text{ط} + \frac{\pi r^2}{n}) + ۱$$

دبے ہوئے جملہ کا ایک جز و ضربی ہے جبکہ r کوئی صحیح عدد ہو۔ اگر ہم فرض کریں
 $r = ۱، ۲، ۳، \dots$ - تو ہمیں دیے ہوئے جملہ کے n مختلف اجزائے
ضربی حاصل ہوتے ہیں اور کل اجزائے ضربی یہی ہیں؛ پس

$$\text{لا}^۱ - ۲ \text{ جم } \text{ن ط} + ۱ = \prod_{r=1}^{n-1} \left\{ \text{لا}^۱ - ۲ \text{ لاجم } (\text{ط} + \frac{\pi r^2}{n}) + ۱ \right\} \dots (۱۲)$$

اس کو شکل ذیل میں بھی لکھا جاسکتا ہے

$$\text{لا}^۱ - ۲ \text{ لاجم } \text{ن ط} + ۱ = \prod_{r=1}^{n-1} \left\{ \text{لا}^۱ - ۲ \text{ لاجم } (\text{ط} + \frac{\pi r^2}{n}) + ۱ \right\} \dots (۱۳)$$

۹۔ مساوات (۱۲) میں رکھو $\text{ط} = ۰$ تو

$$(\text{لا}^۱ - ۲) = \prod_{r=1}^{n-1} \left(\text{لا}^۱ - ۲ \text{ لاجم } \frac{\pi r^2}{n} + ۱ \right)$$

اور چونکہ $\text{جم} = \frac{\pi r^2}{n}$ $\text{جم} = \frac{\pi (r-n)^2}{n}$ اس لیے بائیں جانب کے اجزائے ضربی میں سے دو دو مساوی ہیں الا آنکہ جب 'ن' جفت ہو تو ایک واحد جزو ضربی $\frac{r}{2} + \frac{r}{2} + 1$ ہے اور خواہ 'ن' جفت ہو یا طاق بہر صورت جزو ضربی $\frac{r}{2} - \frac{r}{2} + 1$ ہے اس لیے

$$\frac{r}{2} - \frac{r}{2} + 1 = 1 \quad \prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} (1 - \frac{r}{2}) = 1 \quad (23) \dots (1 + \frac{\pi r^2}{n} \text{جم} \frac{r}{2} - \frac{r}{2})$$

جبکہ 'ن' جفت ہو، اور

$$\frac{r}{2} - \frac{r}{2} + 1 = 1 \quad \prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} (1 - \frac{r}{2}) = 1 \quad (24) \dots (1 + \frac{\pi r^2}{n} \text{جم} \frac{r}{2} - \frac{r}{2})$$

جبکہ 'ن' طاق ہو۔

نیز ضابطہ (۲۲) میں $\frac{\pi}{n} = ط$ رکھنے سے

$$\left\{ 1 + \frac{\pi (1+r^2)}{n} \text{جم} \frac{r}{2} - \frac{r}{2} \right\}^{\frac{1-n}{2}} = 1 + \frac{\pi}{n}$$

$$\text{لیکن} \quad \text{جم} = \frac{\pi (1+r^2)}{n} = \text{جم} \frac{1-(r-n)^2}{n}$$

اس لیے دو دو اجزائے ضربی مساوی ہیں الا آنکہ جب 'ن' طاق ہو تو واحد جزو ضربی $\frac{r}{2} + \frac{r}{2} + 1$ ہے پس

$$\frac{r}{2} - \frac{r}{2} + 1 = 1 \quad \prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} (1 - \frac{r}{2}) = 1 \quad (25) \dots \left\{ 1 + \frac{\pi (1+r^2)}{n} \text{جم} \frac{r}{2} - \frac{r}{2} \right\}^{\frac{1-n}{2}} = 1 + \frac{\pi}{n}$$

جبکہ 'ن' جفت ہو، اور

$$(119) \quad (26) \dots \left\{ 1 + \frac{\pi (1+r^2)}{n} \text{جم} \frac{r}{2} - \frac{r}{2} \right\}^{\frac{1-n}{2}} = 1 + \frac{\pi}{n}$$

نم ن = نم + نم + ... + (ن/۲ + نم) + نم (ن-۱/۲ + نم)
جہاں ن ایک صحیح عدد ہے۔

(121)

۴۔ اگر $\frac{\pi}{12}$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{حجم د.} + \text{حجم ۳ ف.} + \text{حجم ۹ ف.} = \frac{1}{n} (1 + 13)$$

اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ (۱-۳) $\frac{1}{2}$ ۔ ثابت کرو کہ

$$\zeta\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\pi^6}{15} \zeta \dots \frac{\pi^3}{15} \zeta \frac{\pi^2}{15} \zeta \frac{\pi}{15} \zeta$$

۴۔ غایت کرو کہ

$$\frac{1}{p} = \frac{\pi^2}{2} \zeta_1 + \frac{\pi^2}{2} \zeta_2 + \frac{\pi^2}{2} \zeta_3$$

وہ کبھی بساوات بناؤ جس کی اِصلیں ہیں

$$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$$

۷۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

کی اصلیں میں ہے، مس۔ ۲۰، جس میں ہے۔

۸۔ ثابت کرو کہ

جیب ۷ + جیب ۳۷ + جیب ۶۷ + جیب ۹۷ + جیب ۱۲۷ + جیب ۱۵۷ + جیب ۱۸۷ + جیب ۲۱۷ + جیب ۲۴۷ + جیب ۲۷۷ + جیب ۳۰۷ + جیب ۳۳۷ + جیب ۳۶۷ + جیب ۳۹۷ + جیب ۴۲۷ + جیب ۴۵۷ + جیب ۴۸۷ + جیب ۵۱۷ + جیب ۵۴۷ + جیب ۵۷۷ + جیب ۶۰۷ + جیب ۶۳۷ + جیب ۶۶۷ + جیب ۶۹۷ + جیب ۷۲۷ + جیب ۷۵۷ + جیب ۷۸۷ + جیب ۸۱۷ + جیب ۸۴۷ + جیب ۸۷۷ + جیب ۹۰۷ + جیب ۹۳۷ + جیب ۹۶۷ + جیب ۹۹۷ + جیب ۱۰۰۷ = ۱۰۰۰

۹۔ ثابِت کر دو کہ

$$\frac{1}{n} \text{ اجیب زوج } (\frac{\pi^2}{n} + z) \text{ جب } (\frac{\pi^2}{n} + z) \dots \text{ جب } (z + \frac{\pi^2}{n})$$

$$= \text{حجم} \frac{\pi}{4} - \text{حجم} \left(\frac{\pi}{4} + 2 \right)$$

$$12 = 1^3 = \text{جب } ۱۲ \text{ جب } ۲ \text{ جب } ۳ \text{ جب } ۴ \text{ جب } ۵ \text{ جب } ۶ \text{ جب } ۷ \text{ جب } ۸ \text{ جب } ۹ \text{ جب } ۱۰ \text{ جب } ۱۱ \text{ جب } ۱۲$$

$$\text{اور } 12 = 1^3 = \text{جب } ۱۲ \text{ جب } ۲ \text{ جب } ۳ \text{ جب } ۴ \text{ جب } ۵ \text{ جب } ۶ \text{ جب } ۷ \text{ جب } ۸ \text{ جب } ۹ \text{ جب } ۱۰ \text{ جب } ۱۱ \text{ جب } ۱۲$$

$$۲۳ - \text{ثابت کرو کہ } \frac{\pi}{2} \text{ مس } \frac{\pi^2}{2} \text{ مس } \frac{\pi^3}{2} \times \dots \times \frac{\pi^{n-1}}{2} \text{ مس } \frac{\pi^n}{2} = 1$$

جہاں n کوئی مثبت صحیح عدد ہے۔

$$۲۴ - \text{ثابت کرو کہ}$$

$$\text{قم } ۱ + \text{قم } ۲ + \dots + \text{قم } (1 + \frac{\pi^2}{2}) + \text{قم } (1 + \frac{\pi^4}{2}) + \dots + \text{قم } (1 + \frac{\pi^{2n}}{2})$$

$$= n \{ \text{قم } ۱ + \text{قم } ۲ + \dots + \text{قم } (1 + \frac{\pi^2}{2}) + \text{قم } (1 + \frac{\pi^4}{2}) + \dots + \text{قم } (1 + \frac{\pi^{2n}}{2}) \}$$

$$۲۵ - \text{ثابت کرو کہ} \quad (198)$$

$$\frac{(1 + \text{جم } n \text{ ط})}{1 + \text{جم } ۱ \text{ ط}} \text{ یا } \frac{(1 + \text{جم } n \text{ ط})}{1 + \text{جم } ۱ \text{ ط}}$$

۲ جم ط کے ایک منطق صحیح تفاعل کا مربع ہے بموجب اس کے کہ n جفت ہے یا طاق۔ دیکھو

$$1 + \text{جم } ۱ \text{ ط} = (1 + \text{جم } ۱ \text{ ط}) (1 + \text{جم } ۱ \text{ ط}) - \text{جم } ۱ \text{ ط} - \text{جم } ۱ \text{ ط} + 1 + \text{جم } ۱ \text{ ط} = 1 + \text{جم } ۱ \text{ ط}$$

$$۲۶ - \text{ثابت کرو کہ } \frac{1}{2} \text{ جم } ۱ \text{ ط} - \text{جم } ۱ \text{ ط} + 1 + \text{جم } ۱ \text{ ط} \text{ سے تقسیم پذیر ہے اگر } n \text{ کی}$$

شکل ۴-۱ ہو اور $(1 + \text{جم } ۱ \text{ ط})$ سے تقسیم پذیر ہے اگر n کی شکل ۴-۱ ہو جہاں m ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

$$\text{ثابت کرو کہ}$$

$$\frac{1}{2} \text{ جم } ۱ \text{ ط} - \text{جم } ۱ \text{ ط} = 1 + \text{جم } ۱ \text{ ط} + (1 + \text{جم } ۱ \text{ ط}) + (1 + \text{جم } ۱ \text{ ط}) + \dots + (1 + \text{جم } ۱ \text{ ط})$$

$$۲۷ - \text{اگر } n \text{ ایک طاق مثبت صحیح عدد ہو اور}$$

$$\text{مس } (1 + \frac{1}{2}) = \text{مس } (1 + \frac{1}{2}) + \text{مس } (1 + \frac{1}{2}) + \dots + \text{مس } (1 + \frac{1}{2})$$

آٹھواں باب

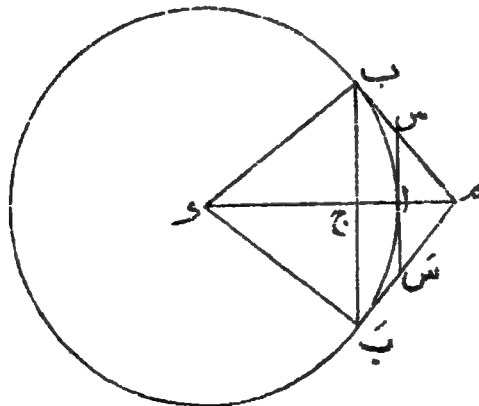
ایک زاویے کے دائری تفاعل اور دائری ناپ کے درمیان

۹۲ — اب ہم ان مسئلوں کی تحقیق کریں گے جن سے ایسی حدود کا تعین ہوتا ہے جن کے درمیان ایک زاویہ کی جیب، جیب التمام، اور ملاس واقع ہونے چاہئیں جبکہ اس زاویہ کا دائری ناپ ط، $\frac{1}{2}\pi$ سے کم ہو۔ پہلا مسئلہ جس کو ہم ثابت کریں گے یہ ہے کہ اگر ایک زاویہ کا دائری

ناپ ط ہو جو $\frac{1}{2}\pi$ سے کم ہے تو

جب ط > ط > مس ط

الّا آنکہ ط = ...



فرض کرو $اوب = ادب = ط$ ؛ اور فرض کرو کہ $مر$ $ب$ اور $مر$ $ب$ $ب$ اور $ب$ پر $ماس$ ہیں، اور فرض کرو کہ $ا$ پر $کاماس$ $س$ $ا$ $س$ ہے۔
 دفعہ ۱۱ میں یہ دکھایا جا چکا ہے کہ $قوس$ $ا$ $ب$ کا $طول$ $ا$ $س$ + $س$ $ب$ سے متجاوز نہیں ہوتا؛ اور اس طرح $قوس$ $ب$ $ا$ $ب$ $س$ + $س$ $ب$ سے متجاوز نہیں کرتی اور اس لیے $قوس$ $ب$ $ا$ $ب$ $ب$ $م$ + $مر$ $ب$ ؛ یا $قوس$ $ب$ $ا$ $ب$ $م$ ۔

نیز

$قوس$ $ب$ $ا$ $ب$ $ا$ $ب$ $ج$

اس لیے $\frac{بج}{وب} > \frac{قوس ب ا}{وب} > \frac{بم}{وب}$

$ا$ $ب$ $ط = قوس$ $ب$ $ا$ ، جب $ط = \frac{بج}{وب}$ اور $مس$ $ط = \frac{بم}{وب}$

(125) اس لیے جب $ط > ط > مس$ $ط$ ۔ اگر $ط$ ، $\frac{ا}{ط}$ سے بڑا ہوتا تو $مر$ ، $وکی$ دوسری جانب واقع ہوتا اور وہ $نا$ مساواتیں جن کو $مر$ نے استعمال کیا ہے ممکن ہے درست نہ ہتیں۔

چونکہ جب $ط > ط > مس$ $ط$ ، اس لیے $ا > جب$ $ط > ق$ $ط$ ؛
 اب فرض کرو کہ $ط$ کو لا انتہا گھٹا دیا گیا ہے، تب $ق$ $ط$ کی انتہا جبکہ $ط = ۰$ ، ایک ہے؛ اس لیے نیز $جب$ $ط$ کی انتہا بھی جبکہ $ط$ کو لا انتہا گھٹا دیا جاتا ہے ایک ہے۔ نیز چونکہ

$\frac{جب ط}{ط} = (ط$ $قم$ $ط) اور$ $\frac{مس ط}{ط} = ق$ $ط \times (ط$ $قم$ $ط)$

اس لیے ہمیں یہ مسئلے ملتے ہیں کہ $\frac{جب ط}{ط}$ اور $\frac{مس ط}{ط}$ کی انتہا جبکہ $ط$

کو لا انتہا گھٹا دیا جائے ہر ایک ایک ہے۔

اس مسئلہ کو یوں بھی ثابت کیا جاسکتا ہے:- مثلث و اب، قاطع و اب، اور مثلث و ب م مقدار کی صعودی ترتیب میں ہیں؛ اور مثلث و اب = $\frac{1}{4}$ و اب \times ب ج = $\frac{1}{4}$ و اب ط، نیز قاطع و اب = $\frac{1}{4}$ و اب \times ط، اور

$$5 \text{ و ب م} = \frac{1}{4} \text{ و ب} \times \text{ب م} = \frac{1}{4} \text{ و ب} \times \text{مس ط}$$

اس لیے جب ط > ط > مس ط
۹۳۔ دفعہ ۵ میں یہ بیان کیا گیا تھا کہ نظری مقاصد کے لیے زاویہ کا دائری ناپ دوسرے ناپوں کے مقابلہ میں زیادہ سہولت بخش ہے، اس کا سبب یہ ہے کہ اس ناپ میں زاویہ کی جیب اور حماس دونوں انتہا میں خود زاویہ کے مساوی ہوتے ہیں جبکہ زاویہ کو لا انتہا گھٹا دیا جاتا ہے؛ لیکن اگر ہم کوئی اور ناپ استعمال کریں، مثلاً ثنائی، تو یہ صورت نہیں ہوتی۔ چنانچہ ثنائیوں کی صورت میں

$$\frac{\pi}{40 \times 90 \times 180} \times \frac{\text{جب ط}}{\text{ط}} = \frac{\text{جب ن}}{\text{ن}}$$

$$\frac{\pi}{40 \times 90 \times 180} \times \frac{\text{مس ط}}{\text{ط}} = \frac{\text{مس ن}}{\text{ن}}$$

جہاں ن ثنائیوں کا دائری ناپ ط ہے؛ اس لیے جب ن، مس ن کی

انتہاؤں میں سے ہر ایک جبکہ ن کو لا انتہا گھٹا دیا جائے

کے مساوی ہے۔ پس اگر ہم دائری ناپ کی بجائے ثنائی استعمال کریں تو

ضابطوں کی اُس بڑی جماعت میں جس میں ط = ۰ کے لیے جب ط اور

مس ط کی انتہائیں شریک ہوتی ہیں ایک کی بجائے ہجائے عدد $\frac{\pi}{40 \times 90 \times 180}$

تو جب ط^۱ ط^۲ اور ط^۳ - $\frac{1}{4}$ ط^۳ کے درمیان واقع ہوتا ہے اور

جم ط^۱ - $\frac{1}{4}$ ط^۲ اور ۱ - $\frac{1}{4}$ ط^۲ + $\frac{1}{4}$ ط^۳ کے درمیان واقع ہوتا ہے۔

۹۵۔ اب ہم یہ دکھائیے کہ اگر ط^۱ > $\frac{1}{4}$ ط^۲ تو

جب ط^۱ < ط^۲ - $\frac{1}{4}$ ط^۳ اور جم ط^۱ - ۱ - $\frac{1}{4}$ ط^۲ + $\frac{1}{4}$ ط^۳

اس سے جب ط^۱ اور جم ط^۱ کی حدود دفعہ سابق میں حاصل کردہ حدود سے زیادہ تنگ ہو جاتی ہیں۔
ہم جانتے ہیں کہ

$$۳ \text{ جب } \frac{1}{3} \text{ ط} - \text{جب } \frac{1}{3} \text{ ط} = ۴ \text{ جب } \frac{1}{3} \text{ ط}$$

$$۳ \text{ جب } \frac{1}{3} \text{ ط} - \frac{1}{3} \text{ ط} = ۴ \text{ جب } \frac{1}{3} \text{ ط}$$

$$۳ \text{ جب } \frac{1}{3} \text{ ط} - \frac{1}{3} \text{ ط} = ۴ \text{ جب } \frac{1}{3} \text{ ط}$$

ان مساواتوں کو علی الترتیب ۱، ۳، ۳، ۳، ...، ۳ - ۱ سے ضرب دو اور
پھر جمع کر دو تو

$$۴ \text{ جب } \frac{1}{3} \text{ ط} - \text{جب } \frac{1}{3} \text{ ط} = ۴ (۴ \text{ جب } \frac{1}{3} \text{ ط} + ۳ \text{ جب } \frac{1}{3} \text{ ط} + \dots + ۳ \text{ جب } \frac{1}{3} \text{ ط})$$

اس لیے

(127)

$$۴ \times \frac{۴ \text{ جب } \frac{1}{3} \text{ ط}}{\frac{1}{3} \text{ ط}} - \text{جب } \frac{1}{3} \text{ ط} > \left(\frac{۳ \text{ ط}}{۲ + ۳} + \dots + \frac{۳ \text{ ط}}{۳} + \frac{۳ \text{ ط}}{۳} \right)$$

اب ن کو لا انتہا بڑا کر دو تو $\frac{۴ \text{ جب } \frac{1}{3} \text{ ط}}{\frac{1}{3} \text{ ط}}$ کی انتہا ایک لمبی ہے اور سلسلہ

$$\dots + \frac{1}{۳} + \frac{1}{۳} + ۱$$

کی انتہا $\frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$ ؟

اس لیے $\frac{1}{3} ط > \frac{1}{4} ط^۳$ یا جب $ط < ط - \frac{1}{4} ط^۳$

نیز $ط = 1 - 2$ جب $\frac{1}{4} ط$

اس لیے $ط > 1 - 2(\frac{1}{4} ط - \frac{1}{4} ط^۳)$ یا $1 - \frac{1}{4} ط + \frac{1}{4} ط^۳$

پس جب $\frac{1}{4} ط$ اور $ط - \frac{1}{4} ط^۳$ کے درمیان واقع ہوتا

ہے؛ اور حجم $\frac{1}{4} ط$ اور $1 - \frac{1}{4} ط + \frac{1}{4} ط^۳$ کے

درمیان واقع ہوتا ہے جبکہ $\frac{1}{4} ط$ سے کم ہو۔

نیز چونکہ $ط =$ جب $ط$ ، حجم $ط$ اس لیے

$$مس ط < (ط - \frac{1}{4} ط^۳) - (1 - \frac{1}{4} ط + \frac{1}{4} ط^۳) = (ط - \frac{1}{4} ط^۳) + (\frac{1}{4} ط - \frac{1}{4} ط^۳)$$

یا $مس ط < ط + \frac{1}{4} ط - \frac{1}{4} ط^۳$ ، اس لیے $مس ط < ط + \frac{1}{4} ط - \frac{1}{4} ط^۳$

یولر کا حاصل ضرب

۹۶۔ چونکہ جب $ط = 2$ جب $\frac{1}{4} ط$ ، حجم $\frac{1}{4} ط$

$$جب \frac{1}{4} ط = 2 جب \frac{1}{4} ط، حجم \frac{1}{4} ط،$$

$$جب \frac{1}{4} ط = 2 جب \frac{1}{4} ط، حجم \frac{1}{4} ط،$$

$$جب \frac{1}{4} ط = 2 جب \frac{1}{4} ط، حجم \frac{1}{4} ط،$$

$$جب \frac{1}{4} ط = 2 جب \frac{1}{4} ط، حجم \frac{1}{4} ط،$$

ایک سے $\frac{2}{\pi}$ تک گھٹتا ہے جیسے ط صفر سے $\frac{1}{\pi}$ تک بڑھتا ہے۔

پھر ہم یہ دکھائی گئے کہ

$$\frac{\text{مس}(\pi + \text{ط})}{\pi + \text{ط}} < \frac{\text{مس} \text{ط}}{\text{ط}} \quad \text{یا}$$

$$\text{ط جب } (\pi + \text{ط}) \text{ جم } \text{ط} < (\pi + \text{ط}) \text{ جب } \text{ط} \text{ جم } (\pi + \text{ط})$$

$$\text{یعنی } \text{ط جب } \pi < \pi \text{ جب } \text{ط} \text{ جم } (\pi + \text{ط})$$

$$\text{یا } \frac{\text{جب } \pi}{\pi} < \frac{\text{جب } \text{ط}}{\pi} \text{ جب } \text{ط} \text{ جم } (\pi + \text{ط})$$

اب ہم فرض کر سکتے ہیں $\pi > \text{ط}$ پس پہلے مسئلہ کی رو سے

$$\frac{\text{جب } \pi}{\pi} < \frac{\text{جب } \text{ط}}{\pi} \quad \text{اور اس لیے } \frac{\text{جب } \text{ط}}{\pi} < \frac{\text{جب } \text{ط} \text{ جم } (\pi + \text{ط})}{\pi + \text{ط}}$$

اس طرح $\frac{\text{مس} \text{ط}}{\pi}$ ایک سے ∞ تک بڑھتا ہے جیسے ط صفر سے $\frac{1}{\pi}$ تک بڑھتا ہے۔

دفعہ ۳۲ میں دی ہوئی جم ط اور جب ط کی ترسیموں سے یہ نظر آئے گا کہ مسائل بالا درست ہیں؛ چنانچہ پہلی صورت میں وہ نسبت جو معین کو قاعدہ کے ساتھ ہے گھٹتی ہے اور دوسری صورت میں بڑھتی ہے جیسے ط صفر سے $\frac{1}{\pi}$ تک بڑھتا ہے۔

(۲) ثابت کرو کہ مساوات $\text{مس} \text{لا} = \text{لا}$ کی حقیقی اصولوں کی تعداد لا انتہا

ہے، نیز بڑی اصولوں کی تقریبی قیمتیں معلوم کرو۔

دفعہ ۳۱ میں تفاعل من لا کی ترسیم کھینچی گئی ہے؛ اُسی شکل میں تفاعل

من لا کی ترسیم کھینچی، یہ ایک خط مستقیم ہے جو و میں سے گزرتا ہے۔ یہ خط مستقیم

صریحاً من لا کی ترسیم کی ہر شاخ کو قطع کریگا اور لا کی وہ قیمتیں جو نقاط تقاطع کے

متناظر ہیں دی ہوئی مساوات کے حل ہیں۔ اس لیے مساوات کی ایک اصل

$$\text{لا} = \frac{\pi}{4} (1 - \text{ک} ۲) \quad \text{اور} \quad \frac{\pi}{4} (1 + \text{ک} ۲)$$

اس لیے نیز $\frac{1}{p} \text{ حم } \frac{p}{p} - \frac{1}{p} \text{ حم } \frac{p}{p} = \frac{1}{p} \text{ مس } \frac{p}{p}$ ،

$$\frac{1}{p} \text{ حم } \frac{p}{p} - \frac{1}{p} \text{ حم } \frac{p}{p} = \frac{1}{p} \text{ مس } \frac{p}{p}$$

اس لیے عمل جمع سے

$$\frac{1}{p} \text{ مس } \frac{p}{p} + \frac{1}{p} \text{ مس } \frac{p}{p} + \dots + \frac{1}{p} \text{ مس } \frac{p}{p} = \frac{1}{p} \text{ حم } \frac{p}{p} - \frac{1}{p} \text{ حم } \frac{p}{p}$$

اب اگر ن کو لا انتہا بڑھا دیا جائے تو $\frac{1}{p} \text{ حم } \frac{p}{p}$ کی انتہائی قیمت $\frac{1}{p}$ ہے، اس لیے سلسلہ کا انتہائی مجموعہ $\frac{1}{p} - \text{حم } \frac{p}{p}$ ہے۔

اگر ہم رکھیں $\frac{1}{p} = \pi$ تو حسب ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p} \text{ مس } \frac{p}{p} + \frac{1}{p} \text{ مس } \frac{p}{p} + \frac{1}{p} \text{ مس } \frac{p}{p} + \dots$$

(180)

بعض جملوں کی انتہائیں

۹۔ اگر ن کو لا انتہا بڑھا دیا جائے تو $\frac{1}{n} \text{ حم } \frac{n}{n}$ ، جب $\frac{n}{n}$ میں

سے ہر ایک کی انتہا ایک ہے؛ اس لیے (حم $\frac{n}{n}$)، (جب $\frac{n}{n}$) میں

سے ہر ایک کی انتہا بھی ایک ہے بشرطیکہ کوئی عدد ہو جو ن کے

تابع نہیں ہے؛ لیکن اگر ن کا تفاعل ف (ن) ہو جو ن کے

لاستہا ہی ہونے پر لاستہا ہی ہو جاتا ہے تو جملے (جسم $\frac{n}{n}$) ف (ن)،

(جب $\frac{n}{n}$) ف (ن) جماعت ۱ سے متعلق غیر معین شکلیں ہیں اور ان کی

انتہاؤں کی قیمتیں ف (ن) کی شکل پر منحصر ہیں۔

(جم ط) ف (ن) کی انتہائی قیمتیں معلوم کرنے کے لیے اس جملہ کو
ع سے تعبیر کرو تو ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{لوک } \frac{1}{4} = \text{ف (ن) لوک } (1 - \text{جب } \frac{1}{4} \text{ ط})$$

اب ہم اس مسئلہ کو معلوم مسئلہ کے طور پر مان لینگے کہ اگر لاکو لا انتہا گھٹا دیا جائے تو

$$\text{ہنا} = \frac{\text{لوک } (1 - \frac{1}{4})}{4} = 1 -$$

تب چونکہ

$$\text{لوک } \frac{1}{4} = \text{ف (ن) جب } \frac{1}{4} \text{ ط} \quad \text{لوک } (1 - \text{جب } \frac{1}{4} \text{ ط})$$

اس لیے لوک و کی انتہا، $\frac{1}{4}$ ف (ن) جب $\frac{1}{4}$ ط کی انتہا کے مساوی
ہے مگر مختلف علامت کے ساتھ بشرطیکہ یہ مؤخر الذکر انتہا موجود ہو۔ ہم
حسب ذیل صورتوں میں لوک و کی انتہا اور اس لیے و کی انتہا معلوم
کر سکتے ہیں :-

(۱) اگر ف (ن) = ن تو اس صورت میں ف، (ن) جب $\frac{1}{4}$ ط
= ن جب $\frac{1}{4}$ ط جب $\frac{1}{4}$ ط اور ن جب $\frac{1}{4}$ ط کی انتہا ط ہے اور جب $\frac{1}{4}$ ط
کی صفر ہے؛ اس لیے لوک و کی انتہا صفر ہے اور اس لیے و کی انتہا
ایک ہے۔

(۲) اگر ف (ن) = ن تو اس صورت میں ف (ن) جب $\frac{1}{4}$ ط
= (ن جب $\frac{1}{4}$ ط) جس کی انتہا ط ہے۔ اس لیے لوک و کی انتہا $\frac{1}{4}$ ط
ہے اور و کی $\frac{1}{4}$ ط۔

(۳) اگر ف (ن) = ف جہاں ف < ۲ تو اس صورت میں
 ف (ن جب ط = ف - ۲ (ن جب ط) اور یہ لا انتہا بڑھتا ہے جبکہ زہ
 لا انتہا بڑھتا ہے۔ اس لیے لو کہو کی انتہا۔ ص ہے اور اس لیے ع کی
 انتہا صفر ہے۔

۹۸ — $\left(\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}\right)^{\text{ن}}$ کی انتہائی قیمت معلوم کرنے کے لیے

چونکہ جب ط $\frac{\text{ط}}{\text{ط}}$ ایک سے کم ہے اور جب ط $\frac{\text{ط}}{\text{ط}}$ (یا جم ط) سے بڑا ہے

اس لیے $\left(\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}\right)^{\text{ن}}$ کی انتہا ۱ یا ۱ اور (جم ط) کے درمیان واقع

ہے؛ اس طرح دفعہ مابقی کی صورت (۱) سے $\left(\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}\right)^{\text{ن}}$ کی انتہا

ایک ہے۔ نیز ہم دیکھتے ہیں کہ $\left(\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}\right)^{\text{ن}}$ اور $\left(\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}\right)^{\text{ن}}$

(ف < ۲) کی انتہائی قیمتیں علی الترتیب ۱ اور ۰ اور $\frac{\text{ط}}{\text{ط}}$ کے درمیان اور
 ایک اور صفر کے درمیان واقع ہیں۔

زراویہ کی جیب اور جیب التمام کے لیے سلسلے

اس کے دائری ناپ کی قوتوں میں

۹۹ — چوتھے باب کے ضابطوں (۳۹) (۴۰) میں ۱ کی بجائے ط لکھو

اور فرض کر دلا = ن ط تو

$$\text{جب لا} = \text{ن جم}^1 \text{ ط جب ط} - \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)}{2} \text{ جم}^2 \text{ ط جب ط} + \dots$$

$$- \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)(\text{ن}-3)}{1+2} \text{ جم}^3 \text{ ط جب ط} + \dots$$

$$\text{جم لا} = \text{جم}^2 \text{ ط} - \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{2} \text{ جم}^2 \text{ ط جب ط} + \dots$$

$$+ \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)(\text{ن}-3)}{2+3} \text{ ط جب ط} + \dots$$

ان سلسلوں کو حسب ذیل شکلوں میں لکھا جاسکتا ہے :-

(182)

$$\text{جب لا} = \text{لا جم}^1 \text{ ط} - \left(\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}\right) - \frac{\text{لا}(\text{لا}-\text{ط})(\text{لا}-2\text{ط})}{3} \text{ جم}^2 \text{ ط} + \dots$$

$$+ \frac{\text{لا}(\text{لا}-\text{ط})\dots(\text{لا}-2\text{ط})}{1+2} \text{ جم}^3 \text{ ط} + \dots$$

$$\text{جم لا} = \text{جم}^2 \text{ ط} - \frac{\text{لا}(\text{لا}-\text{ط})}{2} \text{ جم}^2 \text{ ط} + \dots$$

$$+ \frac{\text{لا}(\text{لا}-\text{ط})\dots(\text{لا}-2\text{ط})}{2+3} \text{ جم}^3 \text{ ط} + \dots$$

ان میں سے ہر سلسلہ میں رقموں کی تعداد ن پر منحصر ہوتی ہے اور جیسے ن لا انتہا بڑھتا ہے رقموں کی تعداد لا انتہا بڑھتی ہے۔ پس اس غرض کے لیے کہ جملوں کی انتہا حاصل ہوں جبکہ ن کو لا انتہا بڑھا دیا جائے یہ ضروری ہے کہ ان میں سے ہر سلسلہ کی بجائے ایک ایسا

سلسلہ دکھا جائے جس میں رقموں کی تعداد مستقل ہو اور n کے ساتھ
لا انتہا نہ بڑھے۔

جب n کے لیے جو سلسلہ ہے اس کی $(n+1)$ دیں رقم کو $(n+1)$
ویں رقم کے ساتھ جو نسبت ہے وہ ہے

$$= \frac{(n+1)(n+2) \dots (n+100)}{(n+1)(n+2) \dots (n+100)} \times \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 ;$$

یہ عدد منفی ہے اور

$$\left\{ \frac{n}{n+1} \times \frac{n}{n} + \left(\frac{n}{n}\right)^2 + \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \right\} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2$$

سے عدد آگیا ہے۔ اگر n کوئی مستقل قیمت ہو تو $\left(\frac{n}{n+1}\right)^2$ گھٹتا ہے جیسے n بڑھتا ہے؛

n اور n کی قیمتیں n ، n منتخب کی جاسکتی ہیں ایسی کہ جملہ بالا کی قیمتیں
 n اور n کے لیے ایک سے چھوٹی حاصل ہوں۔ پس n کی اس

مستقل قیمت کے لیے اور n کی ان تمام قیمتوں کے لیے جو n سے
بڑی یا اس کے مساوی ہیں، جب n کا سلسلہ ایسا ہے کہ ایک ثابت
رقم (جس کا n پر منحصر نہیں ہے) سے اور اس کے بعد ہر رقم اپنی
ماقبل رقم سے عدداً چھوٹی ہے۔ اب چونکہ ایک ایسے سلسلہ کا مجموعہ جس کی
ارقام تبادلاً مثبت منفی ہوں اور ہر رقم اپنی اقبل رقم سے عدداً چھوٹی ہو
پہلی رقم سے چھوٹا ہوتا ہے اس لیے

$$جب \quad n = 1 \quad \text{تو} \quad \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} \quad \text{اور} \quad \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{6}$$

$$+ \dots + \frac{(n-1)(n-2) \dots (n-100)}{(n+1)(n+2) \dots (n+100)} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2$$

جہاں $n = \frac{n}{n}$ بشرطیکہ $n \leq n$ ، n پر منحصر نہیں ہے اور صہ

$$\text{جب } \frac{1+2^2}{1+2^2} \text{ حصہ } (-1) + \dots - \frac{1^2}{2} + \frac{2^2}{3} - 1 = 1$$

$$\text{جم } \frac{1^2}{2} - 1 = 1 - \frac{1^2}{2} + \dots - \frac{1^2}{2} + \frac{2^2}{3} - 1 = 1$$

جہاں حصہ اور حصہ مثبت عدد ہیں جو ایک سے تجاوز نہیں کر سکتے۔

یہ نتیجے درست رہتے ہیں لاکھ ہر قیمت کے لیے اور د اور س کی تمام قیمتوں کے لیے۔ جو ثابت صحیح اعداد د اور س سے بڑے یا ان کے مساوی ہوں۔ پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ لاکھ ہر قیمت کے لیے جب لا حسب ذیل مستحق سلسلہ سے تعبیر ہوتا ہے

$$1 - \frac{1^2}{2} + \frac{2^2}{3} - \frac{1^2}{2} + \dots - \frac{1^2}{2} + \frac{2^2}{3} - \dots + \frac{1+2^2}{1+2^2} (-1) + \dots$$

اور جم لا حسب ذیل مستحق سلسلہ سے تعبیر ہوتا ہے

$$1 - \frac{1^2}{2} + \frac{2^2}{3} - \frac{1^2}{2} + \dots - \frac{1^2}{2} + \frac{2^2}{3} - \dots + \frac{1^2}{2} (-1) + \dots$$

کیونکہ پہلے سلسلہ کی رقموں کی ایک مقررہ تعداد کا مجموعہ جب لا سے

بقدر $\frac{1+2^2}{1+2^2}$ سے زیادہ فرق نہیں رکھتا جو لاکھ ہر قیمت کے لیے (184)

اتنا چھوٹا ہو سکتا ہے جتنا ہم چاہیں اگر رک کو کافی بڑا لیا جائے۔

یہ واقعہ اس امر کے مشاہدہ کرنے سے واضح ہے کہ نسبت $\frac{1^2}{(1+2^2)^2}$

$$\times \frac{1+2^2}{1+2^2} = \frac{1-2^2}{1-2^2} ، \text{ لاکھ کسی مقررہ قیمت کے لیے رک}$$

کافی بڑا لینے سے اتنی چھوٹی بنائی جاسکتی ہے جتنی ہم چاہیں۔

اسی طری کا استدلال حجم لاکے لیے استعمال کیا جا سکتا ہے۔

مثالیں

(۱) حجم لاکو لاک کی قوتوں میں پھیلاؤ۔

حجم لا = $\frac{1}{4}$ (حجم لا + ۳ حجم لا)؛ اس لیے حجم لا، حجم لاکو لاک کی قوتوں میں پھیلانے سے ہیں حجم لاکے پھیلاؤ میں عام رقم حاصل ہوتی ہے

$$(۱) \frac{۳ + ۳}{۴} \frac{۱}{۴}$$

یہ معلوم ہوگا کہ حجم لا یا جب لاک کی کسی صحیح عددی قوت کو یا ایسی قوتوں کے حاصل ضرب کو لاک کی قوتوں میں پھیلا یا جا سکتا ہے اگر ہم اس جملہ کو لاکے ضعیفوں کی جیوب یا جیوب التمام کی رقوم میں بیان کریں۔

(۲) ۳ لاکو لاک کی قوتوں میں اس رقم تک پھیلاؤ جس میں لا شامل ہے۔

مس لا = جب لا \ حجم لا

$$= \left\{ \frac{۱}{۱۲۰} - \frac{۱}{۱۲۰} + \frac{۱}{۱۲۰} - ۱ \right\} \left\{ \frac{۱}{۵۰۴۰} - \frac{۱}{۱۲۰} + \frac{۱}{۱۲۰} - \frac{۱}{۱۲۰} \right\}$$

اسے اعلیٰ رتبہ کی رقموں کو خارج کر دینے سے۔ دوسرے جزو ضربی کو پھیلانے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{مس لا} = \left\{ \frac{۱}{۱۲۰} - \frac{۱}{۱۲۰} + \frac{۱}{۱۲۰} - \frac{۱}{۱۲۰} \right\} \left\{ \frac{۱}{۵۰۴۰} - \frac{۱}{۱۲۰} + \frac{۱}{۱۲۰} - \frac{۱}{۱۲۰} \right\} + \left\{ \frac{۱}{۱۲۰} - \frac{۱}{۱۲۰} + \frac{۱}{۱۲۰} - \frac{۱}{۱۲۰} \right\} + \left\{ \frac{۱}{۱۲۰} - \frac{۱}{۱۲۰} + \frac{۱}{۱۲۰} - \frac{۱}{۱۲۰} \right\}$$

ضرب دینے اور نائیک کی رقموں کے سروں کو اکٹھا کرنے سے

$$\text{مس لا} = لا + لا \frac{۱}{۴} + لا \frac{۲}{۱۵} + لا \frac{۱۴}{۳۱۵}$$

(۳) جب (مس لا) - مس (جب لا) کی انتہا معلوم کرو جبکہ لا =

اس جملہ کا شمار کنندہ جبکہ مثال مابقی کا پھیلاؤ استعمال کیا جائے

$$= \text{مس لا} - \frac{1}{4} \text{مس}^2 \text{ لا} + \frac{1}{12} \text{مس}^3 \text{ لا} - \frac{1}{60} \text{مس}^4 \text{ لا} - \text{جب لا} - \frac{1}{12} \text{جب}^2 \text{ لا} - \frac{1}{60} \text{جب}^3 \text{ لا} - \frac{1}{120} \text{جب}^4 \text{ لا}$$

اور یہ لا سے اسلی رتبہ کی رقموں کو خارج کر دینے سے

$$= (\text{لا} + \frac{1}{4} \text{لا}^2 + \frac{1}{12} \text{لا}^3 + \frac{1}{60} \text{لا}^4) - (\frac{1}{4} \text{لا} + \frac{1}{12} \text{لا}^2 + \frac{1}{60} \text{لا}^3 + \frac{1}{120} \text{لا}^4) - (\frac{1}{12} \text{لا} + \frac{1}{60} \text{لا}^2 + \frac{1}{120} \text{لا}^3 + \frac{1}{240} \text{لا}^4) - (\frac{1}{60} \text{لا} + \frac{1}{120} \text{لا}^2 + \frac{1}{240} \text{لا}^3 + \frac{1}{480} \text{لا}^4) - (\frac{1}{120} \text{لا} + \frac{1}{240} \text{لا}^2 + \frac{1}{480} \text{لا}^3 + \frac{1}{960} \text{لا}^4) - (\frac{1}{240} \text{لا} + \frac{1}{480} \text{لا}^2 + \frac{1}{960} \text{لا}^3 + \frac{1}{1920} \text{لا}^4) - (\frac{1}{480} \text{لا} + \frac{1}{960} \text{لا}^2 + \frac{1}{1920} \text{لا}^3 + \frac{1}{3840} \text{لا}^4) - (\frac{1}{960} \text{لا} + \frac{1}{1920} \text{لا}^2 + \frac{1}{3840} \text{لا}^3 + \frac{1}{7680} \text{لا}^4) - (\frac{1}{1920} \text{لا} + \frac{1}{3840} \text{لا}^2 + \frac{1}{7680} \text{لا}^3 + \frac{1}{15360} \text{لا}^4) - (\frac{1}{3840} \text{لا} + \frac{1}{7680} \text{لا}^2 + \frac{1}{15360} \text{لا}^3 + \frac{1}{30720} \text{لا}^4) - (\frac{1}{7680} \text{لا} + \frac{1}{15360} \text{لا}^2 + \frac{1}{30720} \text{لا}^3 + \frac{1}{61440} \text{لا}^4) - (\frac{1}{15360} \text{لا} + \frac{1}{30720} \text{لا}^2 + \frac{1}{61440} \text{لا}^3 + \frac{1}{122880} \text{لا}^4) - (\frac{1}{30720} \text{لا} + \frac{1}{61440} \text{لا}^2 + \frac{1}{122880} \text{لا}^3 + \frac{1}{245760} \text{لا}^4) - (\frac{1}{61440} \text{لا} + \frac{1}{122880} \text{لا}^2 + \frac{1}{245760} \text{لا}^3 + \frac{1}{491520} \text{لا}^4) - (\frac{1}{122880} \text{لا} + \frac{1}{245760} \text{لا}^2 + \frac{1}{491520} \text{لا}^3 + \frac{1}{983040} \text{لا}^4) - (\frac{1}{245760} \text{لا} + \frac{1}{491520} \text{لا}^2 + \frac{1}{983040} \text{لا}^3 + \frac{1}{1966080} \text{لا}^4) - (\frac{1}{491520} \text{لا} + \frac{1}{983040} \text{لا}^2 + \frac{1}{1966080} \text{لا}^3 + \frac{1}{3932160} \text{لا}^4) - (\frac{1}{983040} \text{لا} + \frac{1}{1966080} \text{لا}^2 + \frac{1}{3932160} \text{لا}^3 + \frac{1}{7864320} \text{لا}^4) - (\frac{1}{1966080} \text{لا} + \frac{1}{3932160} \text{لا}^2 + \frac{1}{7864320} \text{لا}^3 + \frac{1}{15728640} \text{لا}^4) - (\frac{1}{3932160} \text{لا} + \frac{1}{7864320} \text{لا}^2 + \frac{1}{15728640} \text{لا}^3 + \frac{1}{31457280} \text{لا}^4) - (\frac{1}{7864320} \text{لا} + \frac{1}{15728640} \text{لا}^2 + \frac{1}{31457280} \text{لا}^3 + \frac{1}{62914560} \text{لا}^4) - (\frac{1}{15728640} \text{لا} + \frac{1}{31457280} \text{لا}^2 + \frac{1}{62914560} \text{لا}^3 + \frac{1}{125829120} \text{لا}^4) - (\frac{1}{31457280} \text{لا} + \frac{1}{62914560} \text{لا}^2 + \frac{1}{125829120} \text{لا}^3 + \frac{1}{251658240} \text{لا}^4) - (\frac{1}{62914560} \text{لا} + \frac{1}{125829120} \text{لا}^2 + \frac{1}{251658240} \text{لا}^3 + \frac{1}{503316480} \text{لا}^4) - (\frac{1}{125829120} \text{لا} + \frac{1}{251658240} \text{لا}^2 + \frac{1}{503316480} \text{لا}^3 + \frac{1}{1006632960} \text{لا}^4) - (\frac{1}{251658240} \text{لا} + \frac{1}{503316480} \text{لا}^2 + \frac{1}{1006632960} \text{لا}^3 + \frac{1}{2013265920} \text{لا}^4) - (\frac{1}{503316480} \text{لا} + \frac{1}{1006632960} \text{لا}^2 + \frac{1}{2013265920} \text{لا}^3 + \frac{1}{4026531840} \text{لا}^4) - (\frac{1}{1006632960} \text{لا} + \frac{1}{2013265920} \text{لا}^2 + \frac{1}{4026531840} \text{لا}^3 + \frac{1}{8053063680} \text{لا}^4) - (\frac{1}{2013265920} \text{لا} + \frac{1}{4026531840} \text{لا}^2 + \frac{1}{8053063680} \text{لا}^3 + \frac{1}{16106127360} \text{لا}^4) - (\frac{1}{4026531840} \text{لا} + \frac{1}{8053063680} \text{لا}^2 + \frac{1}{16106127360} \text{لا}^3 + \frac{1}{32212254720} \text{لا}^4) - (\frac{1}{8053063680} \text{لا} + \frac{1}{16106127360} \text{لا}^2 + \frac{1}{32212254720} \text{لا}^3 + \frac{1}{64424509440} \text{لا}^4) - (\frac{1}{16106127360} \text{لا} + \frac{1}{32212254720} \text{لا}^2 + \frac{1}{64424509440} \text{لا}^3 + \frac{1}{128849018880} \text{لا}^4) - (\frac{1}{32212254720} \text{لا} + \frac{1}{64424509440} \text{لا}^2 + \frac{1}{128849018880} \text{لا}^3 + \frac{1}{257698037760} \text{لا}^4) - (\frac{1}{64424509440} \text{لا} + \frac{1}{128849018880} \text{لا}^2 + \frac{1}{257698037760} \text{لا}^3 + \frac{1}{515396075520} \text{لا}^4) - (\frac{1}{128849018880} \text{لا} + \frac{1}{257698037760} \text{لا}^2 + \frac{1}{515396075520} \text{لا}^3 + \frac{1}{1030792151040} \text{لا}^4) - (\frac{1}{257698037760} \text{لا} + \frac{1}{515396075520} \text{لا}^2 + \frac{1}{1030792151040} \text{لا}^3 + \frac{1}{2061584302080} \text{لا}^4) - (\frac{1}{515396075520} \text{لا} + \frac{1}{1030792151040} \text{لا}^2 + \frac{1}{2061584302080} \text{لا}^3 + \frac{1}{4123168604160} \text{لا}^4) - (\frac{1}{1030792151040} \text{لا} + \frac{1}{2061584302080} \text{لا}^2 + \frac{1}{4123168604160} \text{لا}^3 + \frac{1}{8246337208320} \text{لا}^4) - (\frac{1}{2061584302080} \text{لا} + \frac{1}{4123168604160} \text{لا}^2 + \frac{1}{8246337208320} \text{لا}^3 + \frac{1}{16492674416640} \text{لا}^4) - (\frac{1}{4123168604160} \text{لا} + \frac{1}{8246337208320} \text{لا}^2 + \frac{1}{16492674416640} \text{لا}^3 + \frac{1}{32985348833280} \text{لا}^4) - (\frac{1}{8246337208320} \text{لا} + \frac{1}{16492674416640} \text{لا}^2 + \frac{1}{32985348833280} \text{لا}^3 + \frac{1}{65970697666560} \text{لا}^4) - (\frac{1}{16492674416640} \text{لا} + \frac{1}{32985348833280} \text{لا}^2 + \frac{1}{65970697666560} \text{لا}^3 + \frac{1}{131941395333120} \text{لا}^4) - (\frac{1}{32985348833280} \text{لا} + \frac{1}{65970697666560} \text{لا}^2 + \frac{1}{131941395333120} \text{لا}^3 + \frac{1}{263882790666240} \text{لا}^4) - (\frac{1}{65970697666560} \text{لا} + \frac{1}{131941395333120} \text{لا}^2 + \frac{1}{263882790666240} \text{لا}^3 + \frac{1}{527765581332480} \text{لا}^4) - (\frac{1}{131941395333120} \text{لا} + \frac{1}{263882790666240} \text{لا}^2 + \frac{1}{527765581332480} \text{لا}^3 + \frac{1}{1055531162664960} \text{لا}^4) - (\frac{1}{263882790666240} \text{لا} + \frac{1}{527765581332480} \text{لا}^2 + \frac{1}{1055531162664960} \text{لا}^3 + \frac{1}{2111062325329920} \text{لا}^4) - (\frac{1}{527765581332480} \text{لا} + \frac{1}{1055531162664960} \text{لا}^2 + \frac{1}{2111062325329920} \text{لا}^3 + \frac{1}{4222124650659840} \text{لا}^4) - (\frac{1}{1055531162664960} \text{لا} + \frac{1}{2111062325329920} \text{لا}^2 + \frac{1}{4222124650659840} \text{لا}^3 + \frac{1}{8444249301319680} \text{لا}^4) - (\frac{1}{2111062325329920} \text{لا} + \frac{1}{4222124650659840} \text{لا}^2 + \frac{1}{8444249301319680} \text{لا}^3 + \frac{1}{16888498602639360} \text{لا}^4) - (\frac{1}{4222124650659840} \text{لا} + \frac{1}{8444249301319680} \text{لا}^2 + \frac{1}{16888498602639360} \text{لا}^3 + \frac{1}{33776997205278720} \text{لا}^4) - (\frac{1}{8444249301319680} \text{لا} + \frac{1}{16888498602639360} \text{لا}^2 + \frac{1}{33776997205278720} \text{لا}^3 + \frac{1}{67553994410557440} \text{لا}^4) - (\frac{1}{16888498602639360} \text{لا} + \frac{1}{33776997205278720} \text{لا}^2 + \frac{1}{67553994410557440} \text{لا}^3 + \frac{1}{135107988821114880} \text{لا}^4) - (\frac{1}{33776997205278720} \text{لا} + \frac{1}{67553994410557440} \text{لا}^2 + \frac{1}{135107988821114880} \text{لا}^3 + \frac{1}{270215977642229760} \text{لا}^4) - (\frac{1}{67553994410557440} \text{لا} + \frac{1}{135107988821114880} \text{لا}^2 + \frac{1}{270215977642229760} \text{لا}^3 + \frac{1}{540431955284459520} \text{لا}^4) - (\frac{1}{135107988821114880} \text{لا} + \frac{1}{270215977642229760} \text{لا}^2 + \frac{1}{540431955284459520} \text{لا}^3 + \frac{1}{1080863910568919040} \text{لا}^4) - (\frac{1}{270215977642229760} \text{لا} + \frac{1}{540431955284459520} \text{لا}^2 + \frac{1}{1080863910568919040} \text{لا}^3 + \frac{1}{2161727821137838080} \text{لا}^4) - (\frac{1}{540431955284459520} \text{لا} + \frac{1}{1080863910568919040} \text{لا}^2 + \frac{1}{2161727821137838080} \text{لا}^3 + \frac{1}{4323455642275676160} \text{لا}^4) - (\frac{1}{1080863910568919040} \text{لا} + \frac{1}{2161727821137838080} \text{لا}^2 + \frac{1}{4323455642275676160} \text{لا}^3 + \frac{1}{8646911284551352320} \text{لا}^4) - (\frac{1}{2161727821137838080} \text{لا} + \frac{1}{4323455642275676160} \text{لا}^2 + \frac{1}{8646911284551352320} \text{لا}^3 + \frac{1}{17293822569102704640} \text{لا}^4) - (\frac{1}{4323455642275676160} \text{لا} + \frac{1}{8646911284551352320} \text{لا}^2 + \frac{1}{17293822569102704640} \text{لا}^3 + \frac{1}{34587645138205409280} \text{لا}^4) - (\frac{1}{8646911284551352320} \text{لا} + \frac{1}{17293822569102704640} \text{لا}^2 + \frac{1}{34587645138205409280} \text{لا}^3 + \frac{1}{69175290276410818560} \text{لا}^4) - (\frac{1}{17293822569102704640} \text{لا} + \frac{1}{34587645138205409280} \text{لا}^2 + \frac{1}{69175290276410818560} \text{لا}^3 + \frac{1}{138350580552821637120} \text{لا}^4) - (\frac{1}{34587645138205409280} \text{لا} + \frac{1}{69175290276410818560} \text{لا}^2 + \frac{1}{138350580552821637120} \text{لا}^3 + \frac{1}{276701161105643274240} \text{لا}^4) - (\frac{1}{69175290276410818560} \text{لا} + \frac{1}{138350580552821637120} \text{لا}^2 + \frac{1}{276701161105643274240} \text{لا}^3 + \frac{1}{553402322211286548480} \text{لا}^4) - (\frac{1}{138350580552821637120} \text{لا} + \frac{1}{276701161105643274240} \text{لا}^2 + \frac{1}{553402322211286548480} \text{لا}^3 + \frac{1}{1106804644422573096960} \text{لا}^4) - (\frac{1}{276701161105643274240} \text{لا} + \frac{1}{553402322211286548480} \text{لا}^2 + \frac{1}{1106804644422573096960} \text{لا}^3 + \frac{1}{2213609288845146193920} \text{لا}^4) - (\frac{1}{553402322211286548480} \text{لا} + \frac{1}{1106804644422573096960} \text{لا}^2 + \frac{1}{2213609288845146193920} \text{لا}^3 + \frac{1}{4427218577690292387840} \text{لا}^4) - (\frac{1}{1106804644422573096960} \text{لا} + \frac{1}{2213609288845146193920} \text{لا}^2 + \frac{1}{4427218577690292387840} \text{لا}^3 + \frac{1}{8854437155380584775680} \text{لا}^4) - (\frac{1}{2213609288845146193920} \text{لا} + \frac{1}{4427218577690292387840} \text{لا}^2 + \frac{1}{8854437155380584775680} \text{لا}^3 + \frac{1}{17708874310761169551360} \text{لا}^4) - (\frac{1}{4427218577690292387840} \text{لا} + \frac{1}{8854437155380584775680} \text{لا}^2 + \frac{1}{17708874310761169551360} \text{لا}^3 + \frac{1}{35417748621522339102720} \text{لا}^4) - (\frac{1}{8854437155380584775680} \text{لا} + \frac{1}{17708874310761169551360} \text{لا}^2 + \frac{1}{35417748621522339102720} \text{لا}^3 + \frac{1}{70835497243044678205440} \text{لا}^4) - (\frac{1}{17708874310761169551360} \text{لا} + \frac{1}{35417748621522339102720} \text{لا}^2 + \frac{1}{70835497243044678205440} \text{لا}^3 + \frac{1}{141670994486089356410880} \text{لا}^4) - (\frac{1}{35417748621522339102720} \text{لا} + \frac{1}{70835497243044678205440} \text{لا}^2 + \frac{1}{141670994486089356410880} \text{لا}^3 + \frac{1}{283341988972178712821760} \text{لا}^4) - (\frac{1}{70835497243044678205440} \text{لا} + \frac{1}{141670994486089356410880} \text{لا}^2 + \frac{1}{283341988972178712821760} \text{لا}^3 + \frac{1}{566683977944357425643520} \text{لا}^4) - (\frac{1}{141670994486089356410880} \text{لا} + \frac{1}{283341988972178712821760} \text{لا}^2 + \frac{1}{566683977944357425643520} \text{لا}^3 + \frac{1}{1133367955888714851287040} \text{لا}^4) - (\frac{1}{283341988972178712821760} \text{لا} + \frac{1}{566683977944357425643520} \text{لا}^2 + \frac{1}{1133367955888714851287040} \text{لا}^3 + \frac{1}{2266735911777429702574080} \text{لا}^4) - (\frac{1}{566683977944357425643520} \text{لا} + \frac{1}{1133367955888714851287040} \text{لا}^2 + \frac{1}{2266735911777429702574080} \text{لا}^3 + \frac{1}{4533471823554859405148160} \text{لا}^4) - (\frac{1}{1133367955888714851287040} \text{لا} + \frac{1}{2266735911777429702574080} \text{لا}^2 + \frac{1}{4533471823554859405148160} \text{لا}^3 + \frac{1}{9066943647109718810296320} \text{لا}^4) - (\frac{1}{2266735911777429702574080} \text{لا} + \frac{1}{4533471823554859405148160} \text{لا}^2 + \frac{1}{9066943647109718810296320} \text{لا}^3 + \frac{1}{18133887294219437620592640} \text{لا}^4) - (\frac{1}{4533471823554859405148160} \text{لا} + \frac{1}{9066943647109718810296320} \text{لا}^2 + \frac{1}{18133887294219437620592640} \text{لا}^3 + \frac{1}{36267774588438875241185280} \text{لا}^4) - (\frac{1}{9066943647109718810296320} \text{لا} + \frac{1}{18133887294219437620592640} \text{لا}^2 + \frac{1}{36267774588438875241185280} \text{لا}^3 + \frac{1}{72535549176877750482370560} \text{لا}^4) - (\frac{1}{18133887294219437620592640} \text{لا} + \frac{1}{36267774588438875241185280} \text{لا}^2 + \frac{1}{72535549176877750482370560} \text{لا}^3 + \frac{1}{145071098353755500964741120} \text{لا}^4) - (\frac{1}{36267774588438875241185280} \text{لا} + \frac{1}{72535549176877750482370560} \text{لا}^2 + \frac{1}{145071098353755500964741120} \text{لا}^3 + \frac{1}{290142196707511001929482240} \text{لا}^4) - (\frac{1}{72535549176877750482370560} \text{لا} + \frac{1}{145071098353755500964741120} \text{لا}^2 + \frac{1}{290142196707511001929482240} \text{لا}^3 + \frac{1}{580284393415022003858964480} \text{لا}^4) - (\frac{1}{145071098353755500964741120} \text{لا} + \frac{1}{290142196707511001929482240} \text{لا}^2 + \frac{1}{580284393415022003858964480} \text{لا}^3 + \frac{1}{1160568786830044007717928960} \text{لا}^4) - (\frac{1}{290142196707511001929482240} \text{لا} + \frac{1}{580284393415022003858964480} \text{لا}^2 + \frac{1}{1160568786830044007717928960} \text{لا}^3 + \frac{1}{2321137573660088015435857920} \text{لا}^4) - (\frac{1}{580284393415022003858964480} \text{لا} + \frac{1}{1160568786830044007717928960} \text{لا}^2 + \frac{1}{2321137573660088015435857920} \text{لا}^3 + \frac{1}{4642275147320176030871715840} \text{لا}^4) - (\frac{1}{1160568786830044007717928960} \text{لا} + \frac{1}{2321137573660088015435857920} \text{لا}^2 + \frac{1}{4642275147320176030871715840} \text{لا}^3 + \frac{1}{9284550294640352061743431680} \text{لا}^4) - (\frac{1}{2321137573660088015435857920} \text{لا} + \frac{1}{4642275147320176030871715840} \text{لا}^2 + \frac{1}{9284550294640352061743431680} \text{لا}^3 + \frac{1}{18569100589280704123486863360} \text{لا}^4) - (\frac{1}{4642275147320176030871715840} \text{لا} + \frac{1}{9284550294640352061743431680} \text{لا}^2 + \frac{1}{18569100589280704123486863360} \text{لا}^3 + \frac{1}{37138201178561408246973726720} \text{لا}^4) - (\frac{1}{9284550294640352061743431680} \text{لا} + \frac{1}{18569100589280704123486863360} \text{لا}^2 + \frac{1}{37138201178561408246973726720} \text{لا}^3 + \frac{1}{74276402357122816493947453440} \text{لا}^4) - (\frac{1}{18569100589280704123486863360} \text{لا} + \frac{1}{37138201178561408246973726720} \text{لا}^2 + \frac{1}{74276402357122816493947453440} \text{لا}^3 + \frac{1}{148552804714245632987894906880} \text{لا}^4) - (\frac{1}{37138201178561408246973726720} \text{لا} + \frac{1}{74276402357122816493947453440} \text{لا}^2 + \frac{1}{148552804714245632987894906880} \text{لا}^3 + \frac{1}{297105609428491265975789813760} \text{لا}^4) - (\frac{1}{74276402357122816493947453440} \text{لا} + \frac{1}{148552804714245632987894906880} \text{لا}^2 + \frac{1}{297105609428491265975789813760} \text{لا}^3 + \frac{1}{594211218856982531951579627520} \text{لا}^4) - (\frac{1}{148552804714245632987894906880} \text{لا} + \frac{1}{297105609428491265975789813760} \text{لا}^2 + \frac{1}{594211218856982531951579627520} \text{لا}^3 + \frac{1}{1188422437713965063903159255040} \text{لا}^4) - (\frac{1}{297105609428491265975789813760} \text{لا} + \frac{1}{594211218856982531951579627520} \text{لا}^2 + \frac{1}{1188422437713965063903159255040} \text{لا}^3 + \frac{1}{2376844875427930127806318510080} \text{لا}^4) - (\frac{1}{594211218856982531951579627520} \text{لا} + \frac{1}{1188422437713965063903159255040} \text{لا}^2 + \frac{1}{2376844875427930127806318510080} \text{لا}^3 + \frac{1}{4753689750855860255612637020160} \text{لا}^4) - (\frac{1}{1188422437713965063903159255040} \text{لا} + \frac{1}{2376844875427930127806318510080} \text{لا}^2 + \frac{1}{4753689750855860255612637020160} \text{لا}^3 + \frac{1}{9507379501711720511225274040320} \text{لا}^4) - (\frac{1}{2376844875427930127806318510080} \text{لا} + \frac{1}{4753689750855860255612637020160} \text{لا}^$$

چوتھے باب کے دو قعات ۲۴ اور ۲۷ میں ہم نے متعدد مثالیں متماثل
مثلی اور جبری مثالیات کی دی ہیں، ہر صورت میں مثلی مثالیاں
جبری مثالیاں حاصل ہوتی ہیں، اسے اگر مذکورہ بالا طریقہ نو ذم میں لایا جائے۔
مثلاً دفعہ ۲۷ کی مثال (۱۱) پر غور کرو، اس کو لکھا جاسکتا ہے

$$2 \text{ جب } (ا + ج - ا) - 2 \text{ جب } (ا + ج - ا) \text{ جب } ج$$

= جب (ب + ج - ا) جب (ج - ا + ب) جب (ا + ب - ج)
اگر ہم جوب کو پھیلانے کے بعد تیسرے رتبہ کی رقموں کو مساوی رکھیں تو ہمیں
حسب ذیل متماثل جبری متماثل مساوات حاصل ہوتی ہے

$$2 \text{ جب } (ا + ج - ا) - 2 \text{ جب } (ا + ج - ا) = (ج - ا + ب) (ا + ب - ج)$$

آٹھویں باب پر مثالیں

۱۔ ہندسی طور پر ثابت کرو کہ

$$مس ط \leq 2 \text{ مس } \frac{1}{ط} ط، جہاں ط > \frac{1}{\pi}$$

۲۔ مس ۳ ط مم ۳ ط کی قیمت میں جو تبدیلیاں ہوتی ہیں جبکہ ط صفر سے $\frac{1}{\pi}$ تک
بڑھتا ہے ان کو مرتسم کرو۔

ثابت کرو کہ اس جملہ کی اقل قیمت ۱۷ - ۱۲ ط ہے اور عظم قیمت ۱۷ + ۱۲ ط ہے
۳۔ ثابت کرو کہ مس ۳ ط مم ۳ ط، اور ۳ ط کے درمیان واقع نہیں ہو سکتا۔

$$4 \text{۔ ثابت کرو کہ } ط < \frac{3 \text{ جب } ط}{1 + جم ط}، جہاں ط > \frac{1}{\pi}$$

۵۔ ثابت کرو کہ ۳ مس ۵ ط < ۵ مس ۳ ط، اگر ط صفر اور $\frac{\pi}{2}$ کے درمیان واقع ہو

۶۔ ثابت کرو کہ $\frac{1}{ط} - \frac{1}{ط} - \frac{1}{ط}$ کی انتہائی قیمت (بیکہ ط = ۰) $\frac{1}{\pi}$ ہے۔

- ۷۔ ثابت کرو کہ جب $(\text{جم ط}) > (\text{جب ط})$ ، ط کی تمام قیمتوں کے لیے۔ (136)
 ۸۔ ثابت کرو کہ لاغتیری حاصل ضرب

$$(1 - \text{مس}^2 \text{ط}) (1 - \text{مس}^2 \text{ط}) (1 - \text{مس}^2 \text{ط}) \dots$$

کی انتہائی قیمت $\frac{\text{ط}}{\text{س ط}}$ ہے۔

۹۔ اگر جب $(\text{ط} - \text{ذ}) = 1 + \text{ن}$ (در ن بہت چھوٹا ہو تو ثابت کرو کہ جب ذ

جب ذ $= (1 - \frac{1}{\text{ن}})$ جب $\frac{1}{\text{ن}}$ ط، تقریباً

۱۰۔ جب (ط جم ط) کی انتہائی قیمت معلوم کرو جبکہ $\text{ط} = \frac{1}{\pi}$

۱۱۔ $\text{مس}^2 \text{ط} - \text{مس}^2 \text{ط}$ کی انتہائی قیمت معلوم کرو جبکہ $\text{ط} = 0$ ۔
 ۱۲۔ ثابت کرو کہ

$$\left(\frac{\text{جم ط}}{\text{مس}^2 \text{ط} - \text{مس}^2 \text{ط}} \right) \text{مس}^2 \left(\frac{1}{\text{ن}} + \frac{1}{\pi} \right) \text{ط}$$

کی انتہائی قیمت $\frac{3}{2}$ ہے جبکہ $\text{ط} = \frac{1}{\pi}$
 ۱۳۔ ثابت کرو کہ

$$(1 - \text{جب}^2 \text{ط}) = 1 - \text{جب}^2 \text{ط} - \text{جم}^2 \text{ط} - \text{جم}^2 \text{ط} - \text{جم}^2 \text{ط} - \dots$$

۱۴۔ اگر مساوات $\frac{1}{\text{مس}^2 \text{ط}} + \frac{1}{\text{مس}^2 \text{ط}} = \text{مس}^2 \text{ط}$

میں $\text{مس}^2 \text{ط}$ ، $\text{جم}^2 \text{ط}$ ، $\text{جب}^2 \text{ط}$ سب زاویے تقریباً مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ ط

$$\frac{1}{\text{مس}^2 \text{ط}} = (\text{مس}^2 \text{ط} + \text{جم}^2 \text{ط} + \text{جب}^2 \text{ط})$$

کے تقریباً مساوی ہے۔

۱۵۔ سلسلہ ذیل جمع کرو۔

$$\text{جم } \frac{\text{ط}}{۲} + \text{جم } \frac{\text{ط}}{۴} + \text{جم } \frac{\text{ط}}{۸} + \text{جم } \frac{\text{ط}}{۱۶} + \text{جم } \frac{\text{ط}}{۳۲} + \text{جم } \frac{\text{ط}}{۶۴} + \text{جم } \frac{\text{ط}}{۱۲۸} + \dots \text{تک}$$

۱۶۔ ثابت کرو کہ سلسلہ

$$\text{مس } \frac{\text{لا}}{۲} \text{ قط } \frac{\text{لا}}{۲} + \text{مس } \frac{\text{لا}}{۴} \text{ قط } \frac{\text{لا}}{۴} + \text{مس } \frac{\text{لا}}{۸} \text{ قط } \frac{\text{لا}}{۸} + \dots \text{تک}$$

کا حاصل جمع مس لا ہے۔

۱۷۔ ثابت کرو کہ

$$\text{ط} - \text{جب ط جم ط} = ۲ \text{ جب ط جب } \frac{\text{ط}}{۲} + ۲ \text{ جب } \frac{\text{ط}}{۲} \text{ جب } \frac{\text{ط}}{۴} + \dots \text{تک}$$

$$۱۸۔ \text{ثابت کرو کہ مس ط} = \frac{\text{مس ط}}{۲} - \frac{\text{مس ط}}{۴} + \frac{\text{مس ط}}{۸} - \frac{\text{مس ط}}{۱۶} + \dots$$

۱۹۔ اگر ط > ۲۲ تو ثابت کرو کہ

$$۲ \left[\text{جب } \frac{\text{ط}}{۲} + \text{جب } \frac{\text{ط}}{۴} + \dots + \text{جب } \frac{\text{ط}}{۲^{n-1}} + \text{جم } \frac{\text{ط}}{۲^n} \right] > \left[\text{جب ط} \times \text{جب } \frac{\text{ط}}{۲} \times \dots \times \text{جب } \frac{\text{ط}}{۲^{n-1}} \right]^{\frac{1}{n}}$$

۲۰۔ اگر ل اور ب مثبت مقداریں ہوں اور اگر $\frac{1}{۲} = \frac{1}{۲} (ب + ۱) = \frac{1}{۲} (ب + ۱) = \frac{1}{۲} (ب + ۱)$ (187)

$$\frac{1}{۲} = \frac{1}{۲} \left(\frac{1}{۲} + \frac{1}{۲} + \dots + \frac{1}{۲} \right) = \frac{1}{۲} (ب + ۱) \text{ اور علیٰ ہذا تو ثابت کرو کہ}$$

$$\frac{(ب + ۱)^{\frac{1}{۲}}}{\frac{1}{۲}} = \frac{1}{۲} = \frac{1}{۲}$$

۲۸۔ ثابت کرو کہ اس لاتعدادی سلسلہ کا مجموعہ جس کی رو میں رقم

$$\frac{1}{2-2^2} \times \frac{1-2}{1-2^2}$$

ہے $\frac{1}{4}$ جب $(1 + \pi \frac{1}{4})$ ہے۔

۲۹۔ اگر صہ بہت پھوٹا ہو اور نہ = ط - ۲ صہ جب ط + $\frac{3}{4}$ صہ جب ۲ طہ تو ثابت کرو کہ

ط = نہ + ۲ صہ جب نہ + $\frac{5}{4}$ صہ جب ۲ نہ، تقریباً
۳۰۔ اگر ۱ = ی + ک جب (ی + ک نہ) تو ی کو چھوٹی مقدار ک کی قوتوں میں سے رقم
بیک پھیلاؤ جس میں ک شامل ہے۔

۳۱۔ مثلثی متماثلہ

جب (د-ب) جب (ا-ج) + جب (ب-ج) جب (ا-د) + جب (ج-د) جب (ا-ب) =
سے جبری متماثلہ

$$(د-ب)(ا-ج) + (د-ب)(ج-ا) + (د-ب)(ا-ج) + (د-ب)(ج-ا) + (د-ب)(ا-ج) + (د-ب)(ج-ا) = 0$$

اخذ کرو۔

۳۲۔ ثابت کرو کہ نہ، $\frac{3}{2}$ جب $\frac{2}{3}$ نہ سے تقریباً $\frac{4}{3}$ نہ کا فرق رکھتا ہے جہاں (138)

فہ ایک چھوٹا زاویہ ہے۔

۳۳۔ اس چھوٹے سے چھوٹے زاویہ کا دائری ناپ اعشاریہ کے ہ مقامات تک
معلوم کرو جو مساوات

$$جب (لا + \frac{1}{4}) = 10$$

کو پورا کرتا ہے۔

بہت۔ مساوات (جب ط) جم ط = ب کو تقریبی طور پر حل کرو جہاں ثابت ہے

اور بڑا نہیں ہے اور یہ معلوم ہے کہ طء کے تقریباً مساوی ہے اور عہ خود بہت چھوٹا نہیں ہے۔

۳۵۔ ثابت کرو کہ طء کی صرف ایک مثبت قیمت ہے ایسی کہ طء = ۲ جب طء اس کی قیمت اعشاریہ کے دو مقامات تک لوکارہی جدول کے ذریعہ معلوم کرو۔

۳۶۔ رشتہ $ا = ب$ جب $ا$ میں جہاں $ا$ اور $ب$ ایک دوسرے کے لحاظ سے مفرد، صحیح عدد ہیں ثابت کرو کہ $ا$ کی ہر قیمت کے جواب میں $ماکی$ ۲ قیمتیں ہیں سوائے اُس صورت کے جبکہ $ا$ اور $ب$ دونوں طاق ہوں اور اس صورت میں $ماکی$ ۱ قیمتیں ہیں۔

۳۷۔ یہ مانکر کہ اگر عہ وہ حادہ زاویہ ہو جس کی جیب $\frac{۳}{۴}$ ہے جب عہ کو $\frac{۳}{۴}$ ہونا چاہیے ثابت کرو کہ جم عہ۔ جم $\frac{۱۱}{۴}$ کا اضافہ $\frac{۳}{۴} \times ۱۰$ پر سے کم ہے۔

نوائے باب

مثلثی جدولیں

(139)

۱۰۔ علم مثلث کے ضابطوں کو مثلثوں

کے حل میں اور عددی اعمال میں عطا مفید ہونے کیلئے یہ ضروری ہے کہ ہمارے پاس عددی جدولیں موجود ہوں جن میں زاویوں کے دائری تفاعل درج ہوں، چنانچہ ان جدولوں سے ہم ایک دیے ہوئے زاویے کے متناظر دائری تفاعل کی قیمتیں کافی صحت کے ساتھ معلوم کر سکیں اور (بالعکس) وہ زاویہ معلوم کر سکیں جو تفاعل کی ایک دی ہوئی قیمت کے متناظر ہو۔ ایسی جدولیں دو قسم کی ہوتی ہیں، (۱) طبعی جیب، جیب التمام، ماسوں وغیرہ کی جدولیں جن میں زاویوں کی جیب، جیب التمام، ماسوں وغیرہ کی عددی قیمتیں اعشاریہ کے چند مقامات تک درج شدہ ہوتی ہیں، اور (۲) لوکارٹری جیب، جیب التمام، ماسوں وغیرہ کی جدولیں جن میں اساس ۱۰ پر ان تفاعلوں کے لوکارٹرم اعشاریہ کے چند مقامات تک درج شدہ ہوتی ہیں۔

۱۔ لوکارٹرم کو پہلے "مضوعی اعداد" کہا جاتا تھا اور اس لیے معمولی اعداد طبعی اعداد کہلاتے تھے۔

اور فرض کرو کہ ۱ کے متواتر ضعفوں کی جیوب اور جیوب التمام کے محسوب کرنے میں اعشاریہ کے مقامات کی تعداد رکھی گئی ہے؛ فرض کرو کہ جب ن یا جہاں کی قیمت جو اس عمل سے حاصل ہوتی ہے ع ن ہے اور اس کے جواب میں صحیح قیمت ع ن + ل ن ہے تب

$$\text{تب } ع ن + ل ن = (۲-ک) (ع ن-۱ + ل ن-۱) - (ع ن-۲ + ل ن-۲)$$

$$\text{نیز } ع ن = (۲-ک) (ع ن-۱ - ل ن-۱)$$

جہاں ک، اعشاریہ کے مقامات تک ک کی تقریبی قیمت ہے۔ فرض کرو

$$(ک-ک) (ع ن-۱) = ل ن \text{ تو}$$

$$ع ن = (۲-ک) (ع ن-۱ - ل ن-۱) + ل ن$$

$$\text{اس لیے } ل ن = (۲-ک) (ل ن-۱ - ل ن-۲) - ل ن-۲$$

$$\text{یا } ل ن = ل ن-۱ - ل ن-۲ - ل ن-۳، \text{ جہاں } ل ن = ل ن-۱ + ک ل ن-۱$$

$$\text{اس کو لکھا جاسکتا ہے } (ل ن-۱ - ل ن-۲) = (ل ن-۱ - ل ن-۲) - ل ن-۳$$

$$\text{پس اسی طرح } (ل ن-۱ - ل ن-۲) = (ل ن-۲ - ل ن-۳) - ل ن-۴$$

.....

$$ل ن-۱ = ل ن-۲ - ل ن-۳$$

$$\text{اس لیے } ل ن-۱ = ل ن-۲ - ل ن-۳ + ل ن-۴ + \dots + ل ن-۱$$

حد تک ل ن-۱، مقابلہ ل ن-۲ کے بہت چھوٹا ہے؛ اس لیے ل ن-۱ + ک ل ن-۱

سے ناقابلِ قدر فرق رکھتا ہے؛ پس - دوں ی، ی، ...، ی میں سے

ہر ایک، $\frac{1}{10}$ سے کم ہے اور اس لیے ان تمام بی اوسط طے، $\frac{1}{10}$ سے کم ہے اس لیے

$$ل_۱ - ل_۱ = ۱ - ل_۱ = (۱ - ن) ط_۱$$

$$ل_۲ - ل_۱ = ۲ - ل_۱ = (۲ - ن) ط_۱$$

$$.....$$

$$ل_۱ - ل_۱ = ۱ - ل_۱ = ط_۱$$

$$یا ل_۱ = ن - ل_۱ = (ط_۱ + ط_۲ + + ن - ط_۱)$$

142)

اب چونکہ ط_۱، ط_۲، ...، ط_۱ میں سے ہر ایک ۱/۱۰ سے کم ہے اس لیے

$$- (ط_۱ + ط_۲ + + ط_۱) > \frac{ن (۱ - ن)}{۱۰}$$

$$ل_۱ > \frac{ن (۱ - ن)}{۱۰ \times ۲} + \frac{ن}{۱۰}$$

$$پس بدآہشتہ ل_۱ > \frac{ن}{۱۰} + \frac{ن^۲}{۱۰ \times ۲} + (۴)$$

اگر اس ضابطہ میں رکھیں م = ۱۲، ن = ۱۰۸۰۰ تو

$$ل_۱ > \frac{۵۸۳۲}{۳-۱۰} + \frac{۱۰۸}{۱۰}$$

$$۵۸۳۲ + ۱۰۸ > ۵۹۴۰$$

جہاں آخری عدد اعشاریہ میں (۸-۸) صفر ہیں؟ اس لیے اگر ر = ۱۵ تو ل_۱ > ۵۹۴۰

یعنی ۵ اعشاریہ کے سات مقامات تک صحیح ہے۔ اب ۱۰۸۰۰ = ۱۰۸ × ۱۰۰، اس لیے ۱۰۰ کی جیب یا جیب التمام اعشاریہ کے سات مقامات تک صحیح معلوم ہوگی۔ اگر ہم ۱۰۰ کے ضیعفوں کے ذریعے ہم تک کی جیب یا جیب التمام کے محو کرنے میں شروع سے آخر تک اعشاریہ کے ۱۵ مقامات لکھیں۔ ضابطہ (۴) ایسی ب صورتوں میں عدد در کو متین کرنے کے لیے اتمال ہو سکتا ہے تاکہ ل_۱ اعشاریہ کے مقامات کی ایک خاص تعداد تک صفر ہو سکے۔

۱۔ اس دستہ کا مکمل برولو سیرٹ (Serret) کی ٹرگنومیٹری سے لیا گیا ہے۔

مثال

ثابت کر دو کہ ۱۰ کے ضعفوں کے ذریعے ۵۴ تک کی جیوب اور جیب التمام کو اعشاریہ کے ۵ صحیح مقامات تک محسوب کرنے کے لیے جب کہ جم ۱۰ جیب ۱۰ کی قیمتیں اعشاریہ کے ۱۲ مقامات تک معلوم ہیں یہ ضروری ہے کہ شروع سے آخر تک عمل حساب میں اعشاریہ کے ۷ مقامات رکھے جائیں۔

۱۰۵۔ جب ۱۰ آن زاویوں کی جیوب اور جیب التمام کی جدول درکار ہو جو ۱۰ کے یا ۱ کے وقفوں پر ہیں تو صرف ۲۰ تک کے زاویوں کے لیے قیمتیں محسوب کرنا ضروری ہوتا ہے کیونکہ ہم پھر ۲۰ سے ۹۰ تک کے زاویوں کی جیوب اور جیب التمام کی قیمتیں ضابطوں

$$\text{جب } (۲۰ + ۱۰) + \text{جب } (۲۰ - ۱۰) = \text{جم } ۱۰$$

$$\text{جم } (۲۰ - ۱۰) - \text{جم } (۲۰ + ۱۰) = \text{جب } ۱۰$$

کے ذریعے ۱۰ کو ۲۰ تک تمام قیمتیں دینے سے حاصل کر سکتے ہیں۔ اگر ۵۴ تک کے زاویوں کی جیوب اور جیب التمام حاصل ہو جائیں تو پھر ۵۴ اور ۹۰ کے درمیان کے زاویوں کی جیوب اور جیب التمام ضابطہ

$$\text{جب } ۱۰ = \text{جم } (۹۰ - ۱۰)$$

کے ذریعے حاصل ہو سکتی ہیں؛ پس ۵۴ سے آگے کے زاویوں کے لیے عمل حساب کو جاری رکھنا غیر ضروری ہے۔

دائرہ تفاعلوں کی جدولوں کو محسوب کرنے کا جو طریقہ ہم نے اوپر بیان کیا ہے وہ دراصل ریٹی کس (Rheticus; 1514 - 1576) کا ہے؛ اس نے جیب

ماسوں اور قاطعوں کی جدولیں تیار کی تھیں جو ۱۵۹۷ء میں اس کے انتقال کے بعد شائع ہوئیں۔ قدیم ترین جدول ٹولمی کی (Almagest) میں وتروں

کی جدول ہے جو نصف درجہ کے وقفوں پر کے زاویوں کے لئے ہے۔ جدول کے مضمون پر تاریخی معلومات ہٹن (Hutton) کی مہٹری آن میتھمیٹیکل ٹیبلز

(148)

جم ۱ = جب (۱ + ۵۴) + جب (۱ - ۵۴) - جب (۱ + ۱۸) - جب (۱ - ۱۸)
 (یہ لیجنڈ کا ضابطہ ہے)
 تصدیق کے لئے صرف یہ کرنا ہوتا ہے کہ ان متماثلات میں تفاعلوں
 کی اصل کردہ قیمتیں درج کیجائیں۔

ماسوں اور قاطعوں کی جدولیں

۱۰۷۔ ماسوں کی جدول بنانا ہوتا تو ہم تک کے زاویوں

کے ماس، ضابطہ مس ۱ = جب ۱ کے ذریعے جویب اور جویب التمام
 کی جدولوں سے معلوم کرو؛ پھر ۹۰ سے ۱ تک کے زاویوں کے
 ماس کا لگائی کے ضابطے

$$\text{مس } (۱ + ۲۵) = ۲ \text{ مس } ۱۲ + \text{مس } (۱ - ۲۵)$$

کے ذریعے حاصل ہو سکتے ہیں۔

قاطع التماموں کی جدول ضابطہ قم ۱ = مس ۱ + ۲ مم ۱ کے ذریعے
 اور قاطعوں کی جدول ضابطہ قط ۱ = مس ۱ + مس (۲۵ - ۱) کے ذریعے
 بنائی جاسکتی ہیں۔

سلسلوں کے ذریعہ قیمتیں محسوب کرنا

۱۰۸۔ زاویوں کی جویب اور جویب التمام کو خوب کرنے کا
 ایک جدید طریقہ دفعہ ۹۹ کے سلسلے استعمال کرنے کا ہے؛
 اگر ہم رکھیں $\frac{1}{n} = \frac{\pi}{4}$ تو

$$\text{جب } \left(\frac{\pi}{4} \times \frac{1}{n}\right) = \left(\frac{\pi}{4} \times \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{\pi}{4} \times \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{\pi}{4} \times \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{\pi}{4} \times \frac{1}{n}\right) + \dots$$

جم (کے ۹۰) = ۰۰ ۰۰۰۰۰ ۱۵۰۰۰۰۰

۲۰	۱۵۲۳۳۴۰	۰۵۵۰۱	۳۶۱۴۹	۸۲۴۳۵	۴۳ -
۲۵	۱۵۲۳۶۶	۹۵۰۶۹	۰۱۰۴۸	۰۱۳۶۳	۶۶ +
۳۰	۱۵۰۲۰۸۶	۳۴۸۰۶	۶۳۳۵۲	۹۶۰۸۶	۳۱ -
۳۵	۱۵۰۰۰۹۱	۹۲۶۰۲	۴۴۸۳۹	۴۲۶۵۸	۰۲ +
۴۰	۱۵۰۰۰۰۲	۵۲۰۲۰	۴۲۳۶۳	۰۶۰۶۰	۵۵ -
۴۵	۱۵۰۰۰۰۰	۰۴۶۱۰	۸۴۴۶۶	۸۸۱۸۱	۴۲ +
۵۰	۱۵۰۰۰۰۰	۰۰۰۶۳	۸۶۶۰۲	۰۸۳۶۹	۱۹ -
۵۵	۱۵۰۰۰۰۰	۰۰۰۰۰	۶۵۶۵۹	۶۳۱۱۴	۹۸ +
۶۰	۱۵۰۰۰۰۰	۰۰۰۰۰	۰۰۵۲۹	۴۴۰۰۲	۰۱ -
۶۵	۱۵۰۰۰۰۰	۰۰۰۰۰	۰۰۰۰۰	۴۳۶۶۳	۹۲ +
۷۰	۱۵۰۰۰۰۰	۰۰۰۰۰	۰۰۰۰۰	۰۱۸۳۵	۹۹ -
۷۵	۱۵۰۰۰۰۰	۰۰۰۰۰	۰۰۰۰۰	۰۰۰۰۰	۲۱ +
۸۰	۱۵۰۰۰۰۰	۰۰۰۰۰	۰۰۰۰۰	۰۰۰۰۰	۰۳ -

(145) چونکہ صرف ۵۴ تک کے زاویوں کی جیب اور جیب التمام کا محسوب کرنا ضروری ہے اس لیے کہ کسریں ہمیشہ $\frac{1}{4}$ سے کم لی جاتی ہے، اس لیے سلسلوں کی بہت تھوڑی رقمیں اعشاریہ کے چند مقامات تک قیمتیں دریافت کرنے کے لیے کافی ہیں۔ یہ سلسلے یوں رکے

Analysis of the Infinite سے لیے گئے ہیں جہاں انہیں اعشاریہ کے مزید چھ مقامات تک دیا گیا ہے۔

لوکارتمی جدولیں

۱۰۹۔ جب طبعی جیوب اور جیوب التمام کی جدولیں تیار ہو جائیں تو لوکارتمی جیوب اور جیوب التمام کی جدولیں معمولی لوکارتم کی جدولوں کے ذریعے بنائی جاسکتی ہیں کیونکہ ان جدولوں سے کسی زاویہ کی جیب یا جیب التمام کی محسوب کردہ عددی قیمت کا لوکارتم ملیگا؛ اس طور پر حاصل شدہ لوکارتم میں اوجہ کرو تو متناظر جدولی لوکارتم مل جاتا ہے۔ لوکارتمی ماس زشتہ

ل م س ۱ = ۱۰ + ل جب ۱ - ل جم ۱

کے ذریعہ معلوم کیے جاسکتے ہیں اور اس طرح لوکارتمی ماسوں کی ایک جدول تیار ہو سکتی ہے۔ ہم کسی آئندہ باب میں ایک راست طریقہ بتائینگے جس سے لوکارتمی جیوب، جیوب التمام اور ماس کی جدولیں بنائی جاسکتی ہیں۔

مثلثی جدولوں کا بیان اور ان کا استعمال

۱۱۰۔ مثلثی جدولیں، طبعی یا لوکارتمی، بموجب ذیل بنائی جاتی ہیں۔

(۱) ان سے بالراست صرف صفر اور ۹۰ کے درمیانی زاویوں کے لیے تفاعلوں کی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں؛ ان حدود سے تجاوز مقداروں کے زاویوں کے لیے تفاعلوں کی قیمتیں فوراً اخذ کی جاسکتی ہیں۔

(۲) ان جدولوں سے صفر سے ۲۵ تک اور ۲۵ سے ۹۰ تک کے زاویوں کے تفاعلوں کی قیمتیں ایک ہی ہندسوں کی دو مرتبہ قراءت کے ذریعے ملتی ہیں؛ تفاعلوں کے نام جیب، جیب التمام، ماس اور نیز درجے (۲۵ <) صفحہ کی پیشانی پر لکھے ہوتے ہیں اور متناظر دقیقے اور ثنائے دایں طرف کے ستون میں لکھے ہوتے ہیں زاویے بڑھتے جاتے ہیں جیسے جیسے ہم ستون میں نیچے اترتے ہیں؛ نیز جیب التمام، جیب، ماس التمام اور درجے (۲۵ <) صفحہ کے پائین پر ان ستونوں میں بالترتیب لکھے جاتے ہیں

(146)

2.916

[illegible]

۵۰	۰۵۲۹۲۰۳۲۵	۴۲۱	۹۵۵-۷۹۲۵۵	۶۸	۹۵۹۷۸۵۶۴۳	۶۵۳	۹۵۲۸۶۵۲۲۸	۱۰
۳۰	۰۵۲۹۱۹۶۲۳	۷۲۲	۹۵۵۰۸۰۳۷	۶۷	۹۵۹۷۸۵۶۰۵	۶۵۳	۹۵۲۸۶۵۹۸۲	۳۰
۳۰	۰۵۲۹۱۸۹۰۳	۷۲۱	۹۵۵۰۸۱۰۹۸	۶۸	۹۵۹۷۸۵۵۲۸	۶۵۳	۹۵۲۸۶۶۶۲۵	۳۰
۲۰	۰۵۲۹۱۸۱۸۱	۷۲۱	۹۵۵۰۸۱۸۱۹	۶۸	۹۵۹۷۸۵۵۲۷۰	۶۵۳	۹۵۲۸۶۷۷۲۹	۳۰
۱۰	۰۵۲۹۱۷۲۶۰	۷۲۱	۹۵۵۰۸۲۵۳۰	۶۸	۹۵۹۷۸۵۳۰۲	۶۵۳	۹۵۲۸۶۷۷۲۲	۵۰
۰	۰۵۲۹۱۶۷۳۹	۷۲۱	۹۵۵۰۸۳۲۶۱	۶۸	۹۵۹۷۸۵۳۳۳	۶۵۳	۹۵۲۸۶۸۵۹۵	۵۲
	جیب المقام	فروق	جیب	فروق	طس المقام	فروق	طس	=

۷۷۷

جن میں صفحہ کی پیشانی پر جیب، جیب التمام، ماس کھٹے ہوئے ہیں؛ بائیں طرف کے مستون میں ان زاویوں کے دقیقے اور ثانیے لکھے ہوئے ہیں جو قبل الذکر زاویوں کے مکملے ہیں، ظاہر ہے کہ یہ مؤخر الذکر زاویے بڑھتے ہیں جیسے ہم ستون میں اوپر چڑھتے ہیں۔ ہم نے نمونہ کے جدول پر اوپر کیلٹ (Callet) کے سات ہندسی لوکار بھی جدولوں کے ایک صفحہ کا حصہ دیا ہے، یہ جدولیں ۱۰ کے وقفوں پر کے زاویوں کے لیے تیار کی گئی ہیں۔

مثلاً جس ستون کے سرے پر جیب التمام لکھا ہے اس کی تیسری سطر سے ہیں حاصل ہوتا ہے کہ ۹۰.۹۰۱۲، زاویہ ۵۰.۵۰۹ کی جدولی لوکار تہی جیب التمام ہے، اور بائیں طرف کے ستون میں دقیقوں اور ثانیوں کو پڑھنے سے ظاہر ہوتا ہے کہ یہی عدد، مکمل زاویے ۵۰.۹۲ کی لوکار تہی جیب ہے۔ یہ مشاہدہ طلب ہے کہ لوکار تہی جیب اور ماس زاویہ کے ساتھ بڑھتے ہیں لیکن لوکار تہی جیب التمام اور ماس التمام زاویہ کے بڑھنے سے گھٹتے ہیں۔

۱۱۱۔ اب اگر کوئی زاویہ ایسا ہو جس کی سمتہ اردو زاویوں کے درمیان جن کے تفاعل جدول میں درج ہیں واقع ہے تو اس زاویہ کے تفاعل کو معلوم کرنے کے لئے ہم ایک اصول استعمال کرینگے جس کی تحقیق ابھی کی جائیگی؛ وہ اصول یہ ہے کہ سوائے ان زاویوں

کے جو یا تو بہت چھوٹے ہیں یا زاویہ قائمہ کے بہت قریب ہیں کسی زاویہ کے طبعی تفاعل یا لوکار تہی تفاعل میں چھوٹی تبدیلیاں خود زاویے میں جو تبدیلی ہوئی ہے اس کے متناسب ہوتی ہیں۔

مثلاً اگر دو متصل جدولی قیمتوں کے درمیان فرق ۱۰ ہے جب کہ جدولی زاویے میں ۱۰ کا فرق ہے تو چھوٹے جدولی زاویہ کے تفاعل کی (147)

قیمت اور اس سے بقدر ما بڑے ایک زاویہ کے تفاعل کی قیمت کے درمیان فرق $\frac{1}{2}$ ع ہوگا؛ زاویہ میں ۱۰ اضافہ کے جواب میں تفاعل کا اضافہ ع ہے اور اس لیے زاویہ میں ما (۱۰ >) کے اضافہ کے جواب میں تفاعل کا اضافہ ع کی وہ کسر ہے جو ما کو ۱۰ کے ساتھ ہے، یعنی $\frac{1}{2}$ ع۔ کیبلٹ کی جدولوں میں (جس کا نمونہ اوپر دیا گیا ہے) متصل لوکارٹوں کے درمیان کے فرق بغیر علامت اعشاریہ کے اس ستون میں دیے گئے ہیں جس کے سرے پر فرق لکھا ہے۔

مثلاً فرض کرو کہ ہیں ل جب ۱۰، ۱۳ کی قیمت معلوم کرنی ہے، جدول سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$\text{ل جب } ۱۰ \text{ } ۱۳ = ۹۵۴۸۶۵۳۲۸$$

$$\text{ل جب } ۱۰ \text{ } ۱۴ = ۹۵۴۸۶۵۹۸۲$$

$$\text{فرق} = ۶۵۴$$

تب $\frac{3}{4} \times ۶۵۴ = ۴۹۰.۵$ اس لیے پہلے لوکارٹم میں ہیں ۱۹۶۰۰۰۰ جمع کرنا چاہیے، اس طرح ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{ل جب } ۱۰ \text{ } ۱۳ = ۹۵۴۸۶۵۵۲۲$$

نیز فرض کرو کہ ہیں وہ زاویہ مطلوب ہے جس کا جدولی لوکارٹی ماس ۹۵۵۰۸۲۰۳۲ ہے۔ جدول میں ہم دیکھتے ہیں کہ دیا ہوا لوکارٹم ذیل کے دو لوکارٹموں کے درمیان واقع ہے۔

$$\text{ل م } ۱۰ \text{ } ۱۳ = ۹۵۵۰۸۱۸۱۹$$

$$\text{ل م } ۱۰ \text{ } ۱۴ = ۹۵۵۰۸۲۵۴۰$$

$$\text{فرق} = ۶۶۱$$

دیے ہوئے لوکارٹی ماس اور جدول سے حاصل شدہ پہلے لوکارٹی ماس کے درمیان فرق ۶۶۱ ہے، اس لیے وہ زاویہ جس کو ۱۰، ۱۳ میں جمع کرنا ہوگا $\frac{213}{214} \times ۱۰ = ۹.۹$ (تقریباً) ہے۔ پس مطلوبہ زاویہ ہے ۱۰، ۱۳ تقریباً۔

متناسب جزاء کا اصول

۱۱۲۔ اب ہم اس امر کی تحقیق کرنے لگے کہ متناسب اضافہ کا اصول جو ہم نے دفعہ سابق میں اختیار کیا ہے کہاں تک صحیح ہے اور کن مستثنیات کے ساتھ؟

فرض کرو کہ لا سے کوئی زاویہ تعبیر ہوتا ہے اور ف (لا) سے لا کا کوئی طبعی یا لوکارہی تفاعل تعبیر ہوتا ہے تو ہم مختلف صورتوں میں یہ بتائیں گے کہ اگر وہ کوئی چھوٹا زاویہ ہو جس کو دائری ناپ میں ناپا گیا ہے اور اگر اس کو لا میں جمع کیا جائے تو

$$ف (لا + ہ) - ف (لا) = ہ ف (لا) + ہ$$

جہاں ف (لا) کا کوئی دوسرا تفاعل ہے اور ہ وہ تفاعل ہے جو محدود رہتا ہے جبکہ ہ = ۰

اس ربط سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر نہ کافی چھوٹا ہو تو لا کی ایک دی ہوئی قیمت کے لیے ف (لا + ہ) - ف (لا) کے متناسب ہے اور یہ معلوم ہوگا کہ بالعموم ہ اس قدر چھوٹا ہوگا کہ وہ تفاعلوں کی قیمتوں پر اعشاریہ کے مقامات کی اس تعداد تک جو جدول میں درج ہے اثر انداز نہ ہوگا۔ پس لا کی ایک دی ہوئی قیمت کے لیے

$$ف (لا + ہ) - ف (لا)$$

اعشاریہ کے مقامات کی جدولی تعداد تک مستقل ہے۔ تاہم دو مستثنیٰ صورتیں پیدا ہونگی۔

(۱) اگر لا ایسا ہو کہ ف (لا) بہت چھوٹا ہے تو فرق ف (لا + ہ) - ف (لا) معدوم ہو سکتا ہے بلکہ اس رتبہ کے جو جدولوں میں درج ہے، تب فرق ف (لا + ہ) - ف (لا) کو ناقابل قدر (Insensible) کہتے ہیں اور

(۱) صورت میں ف (لا) کی دو یا زیادہ متصلہ جدولی قیمتیں ایک ہی ہوتی ہیں۔
 (۲) اگر لا ایسا ہو کہ بمقابلہ ف (لا) کے س بڑا ہے تو یکن ہے
 کہ رتھ سے بمقابلہ ف (لا) کے چھوٹی نہ ہو؛ اس صورت میں
 فرق ف (لا + ہ) - ف (لا) کے تناسب نہیں ہے اور اس کو
 ہم بے تبادہ کہہ سکتے ہیں۔

ان دونوں صورتوں (۱) اور (۲) میں تناسبوں کا طریقہ ناکام رہتا
 ہے، لیکن ہم یہ بتا سکتے ہیں کہ کس طرح خاص ترکیبوں سے یہ مشکلات رفع
 ہوتی ہیں۔

تیلر کے مسئلہ سے جس سے طالب علم واقف ہے یہ معلوم ہو گا کہ مندرجہ
 بالا منابطہ تیلر کے مسئلہ

$$ف (لا + ہ) = ف (لا) + ہ ف (لا) + ہ ف (لا + ہ)$$

کی خاص صورت ہے جس میں ط، صفر اور ایک کے درمیان واقع ہے، پس
 مسا = ف (لا + ہ) اور ف (لا + ہ) - ف (لا) = ہ ف (لا) مان لینے سے
 جو خطا ہوتی ہے وہ ۱/۲ ہ ف (لا) کی بڑی سے بڑی اور چھوٹی سے چھوٹی قیمتوں کے درمیان واقع ہے
 جو وہ حدودی = لا اور لا + ہ کے درمیان اختیار کرتا ہے۔

۳۱۱ — اول فرض کرو کہ ف (لا) = جب لا

تو جب (لا + ہ) = جب لا + ہ + جم لا جب ہ

یا جب (لا + ہ) - جب لا = جم لا (ہ) - ۱/۲ ہ ف (لا) + - جب لا (۱/۲ ہ - ۱/۲ ہ) + -

= جم لا + ۱/۲ ہ جب لا + ہ کی اعلیٰ قیمتیں

اس صورت میں ف (لا) = جم لا اور مسا کی تقریبی قیمت = ۱/۲ جب لا

پس جب (لا + ہ) - جب لا = جم لا - ۱/۲ ہ جب لا (۱)

فرق کی تقریبی مساوات ہے۔

اسی طرح یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ تقریبی طور پر

جم (لا + ہ) - جم لا = ۱/۲ جب لا - ۱/۲ ہ جم لا (۲)

$$\text{نیز } \frac{\text{مس (لا + ح) - مس لا} = \frac{\text{جب ح}}{\text{جم لا + جم لا}} \dots$$

$$= \frac{\text{جم لا - ح جب لا جم لا}}{\dots}$$

یا تقریبی طور پر

$$\text{مس (لا + ح) - مس لا} = \text{ح قطا}^2 \text{ لا} + \text{ح}^2 \text{ قطا}^2 \text{ مس لا} \dots (۳)$$

$$\text{نیز } \frac{\text{ل جب (لا + ح) - ل جب لا} = \text{لوک جب (لا + ح)}}{\text{جب لا}}$$

$$= \text{لوک (لا + ح) - ل جب لا} = \text{ح مم لا} + \frac{1}{2} \text{ ح}^2 \text{ مم لا}$$

$$\text{یا } \frac{\text{ل جب (لا + ح) - ل جب لا} = \text{ح مم لا} + \frac{1}{2} \text{ ح}^2 \text{ مم لا} \dots (۴)$$

$$\text{اسی طرح ل جم (لا + ح) - ل جم لا} = \text{ح مم لا} + \frac{1}{2} \text{ ح}^2 \text{ قطا}^2 \text{ لا} \dots (۵)$$

$$\text{ل مس (لا + ح) - ل مس لا} = \frac{\text{ح}}{\text{جب لا جم لا}} - \frac{\text{ح}}{\text{جب لا}} \dots (۶)$$

ہر صورت میں ہم نے س کی صرف تقریبی قیمت معلوم کی ہے۔ یعنی ہم نے دو رقیں چھوڑ دی ہیں جن میں ح کی تیسری اور اربعہ قوتیں شامل ہوتی ہیں۔ ان چھ مساواتوں سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اگر ح کافی چھوٹا ہے تو فرق لا کی ایسی قیمتوں کے لیے جو نہ چھوٹی ہیں اور نہ زاویہ قائمہ کے تقریباً مساوی، ح کے تناسب میں حسب ذیل مستثنیٰ صورتیں پیدا ہوتی ہیں:-

(۱) فرق ح جب (لا + ح) - جب لا، ناقابل قدر ہے جب کہ لا تقریباً ایک زاویہ قائمہ ہو کیونکہ ایسی صورت میں ح جم لا بہت چھوٹا ہے؛ نیز یہ فرق بے قاعدہ بھی ہے کیونکہ $\frac{1}{2} \text{ ح}^2 \text{ جب لا}$ ، ح جم لا کے ساتھ مقابلہ کر سکتا ہے۔

(۲) فرق جم (لا + ح) - جم لا، ناقابل قدر ہے جب کہ لا چھوٹا ہو،

نیز یہ اس صورت میں بے قاعدہ بھی ہے۔

(۳) فرق، $س (لا + ھ)$ ۔ $س لا$ بے قاعدہ ہے جبکہ لا تقریباً ایک زاویہ قائمہ ہو کیونکہ ایسی صورت میں $ھ$ ۲ قسطاً $لا$ $س لا$ $ھ$ قسطاً $لا$ کے ساتھ متقابلہ پذیر ہو سکتا ہے۔

(۴) فرقی، $ل$ جب $(لا + ھ)$ ۔ $ل$ جب $لا$ بے قاعدہ ہے جبکہ لا چھوٹا ہو اور ناقابلِ قدر اور بے قاعدہ دونوں جب کہ لا تقریباً ایک زاویہ قائمہ ہو۔

(۵) فرق، $ل$ جب $(لا + ھ)$ ۔ $ل$ جب $لا$ ناقابلِ قدر اور بے قاعدہ ہے جب کہ لا چھوٹا ہو، اور بے قاعدہ ہے جب کہ لا تقریباً ایک زاویہ قائمہ ہو۔

(۶) فرق، $ل$ $س (لا + ھ)$ ۔ $ل$ $س لا$ بے قاعدہ ہے جبکہ لا خواہ چھوٹا ہو یا تقریباً ایک زاویہ قائمہ۔ یہ توجہ طلب ہے کہ جو فرق ناقابلِ قدر ہے وہ بے قاعدہ بھی ہے لیکن اس کا عکس درست نہیں ہے۔

تقریب کا وہ درجہ معلوم کرنے کے لیے جس تک متناسب اجزاء کا اصول کسی صورت میں درست رہتا ہے سادہ ترین طریقہ یہ ہے کہ $س$ کی اصلی قیمت پر غور کیا جائے؛ جب $(لا + ھ)$ ۔ جب $لا$ کی صورت میں دوسری رقم کی اصلی قیمت ہے۔ $\frac{1}{2}$ $ھ$ جب $(لا + ھ)$ جہاں $ھ$ صفر اور ایک کے درمیان ہے؛ اگر جدول کے وقفوں پر بنائی گئی ہے تو $\frac{1}{2}$ $ھ$ کی بڑی سے بڑی قیمت ہے $\frac{1}{2} \left(\frac{\pi 10}{180 \times 40 \times 40} \right)$ یا $\frac{1}{4} (5.00005)$ ؛ اس سے اعشاریہ کے پہلے

۱۵۰) آٹھ مقامات تک کوئی خطا واقع نہیں ہوتی؛ $س (لا + ھ)$ ۔ $س لا$ کی صورت میں خطا ہے

(۵.۰۰۰۰۵) ۲ قسطاً $(لا + ھ)$ $س (لا + ھ)$ پس اگر $س لا + ھ = ۲۰$ تو خطا، اعشاریہ کے ساتویں مقام سے ظاہر ہونا شروع

کر گئی۔ ل جب لا کی صورت میں اعشاریہ کے ساتویں مقام تک کوئی خط نہ ہوگی
اگر لا < ۵۔

۱۱۴۔ جب ایک تفاعل کے زون، اعشاریہ کے اتنے مقامات
تک جتنے جدولوں میں درج ہوتے ہیں، ناقابل قدر ہوں تو جدولوں سے
یہ تفاعل معلوم ہوگا جب کہ زاویہ معلوم ہو، لیکن اس کے برعکس ہم
اس تفاعل کے ذریعہ کسی درمیانی زاویہ کو معلوم کرنے کے لیے جدولیں
استعمال نہیں کر سکتے؛ مثلاً چھوٹے زاویوں کے لیے ہم ل جم لا کی قیمت
سے لا متعین نہیں کر سکتے، یا ایک زاویہ قائمہ کے تقریباً مساوی زاویوں
کے لیے ل جب لا کی قیمت سے لا متعین نہیں کر سکتے۔ جب ایک تفاعل کے
فرق بے قاعدہ ہوں اور ناقابل قدر نہ ہوں تو مندرجہ سب اجزاء کم نہ کہ وہ بالا
تقریبی طریقہ تفاعل کے ذریعہ زاویہ کی تعیین کے لیے کافی نہیں ہے اور نہ
زاویہ کے ذریعہ تفاعل کی تعیین کے لیے کافی ہے؛ مثلاً تقریباً ناقابل
قبول ہے

ل جب لا کے لیے جبکہ لا چھوٹا ہو
ل جم لا کے لیے جبکہ لا تقریباً ایک زاویہ قائمہ ہو،
اور ل مس لا کے لیے جبکہ لا چھوٹا ہو یا تقریباً ایک زاویہ قائمہ کے مساوی ہو
ان صورتوں میں جن میں فرق بے قاعدہ ہیں اور ناقابل قدر
نہیں ہیں حسب ذیل ذرائع استعمال کیے جا سکتے ہیں تاکہ تفاعل کی ایک
دی ہوئی قیمت کے جواب میں زاویہ معلوم ہو سکے یا ایک دیے ہوئے
زاویہ کے جواب میں تفاعل کی قیمت معلوم ہو سکے۔

(۱) ہم ل جب لا، ل مس لا کی اوہ جدولیں جو ایک ثانیہ کے
وقفوں پر کے زاویوں کے لیے پہلے چند درجوں تک محسوب کی گئی ہوتی
ہیں اور ل جم لا، ل مس لا کی وہ جدولیں جو ۱۰ کے قریب کے چند
زاویوں کے لیے ایک ثانیہ کے وقفوں پر تیار کی گئی ہوتی ہیں استعمال
کر سکتے ہیں۔ کیلٹ اپنے مثلثی جدولوں میں ایسی ایک جدول دیتا ہے۔

پھر ہم اُن تمام زاویوں کے لیے جو صفر کے یا زاویہ قائمہ کے بالکل قریب نہ ہوں متناسب اجزاء کا اصول استعمال کر سکتے ہیں۔

(۲) ڈلبر کا طریقہ

اس طریقہ میں \angle جب \angle یا \angle مس \angle کو ایسی دو رقوم کے مجموعہ میں توڑ دیا جاتا ہے کہ ان میں سے ایک کے لئے فرق ناقابلِ قدر ہوتے ہیں \angle کی ان قیمتوں کے نزدیک جہاں بے قاعدگی واقع ہوتی ہے، اور دوسری رقوم کے لیے فرق باقاعدہ ہوتے ہیں۔ ان رقوم میں سے پہلی کے لیے فرق بے قاعدہ ہے لیکن اس کی چنداں اہمیت نہیں ہے کیونکہ یہ فرق ناقابلِ قدر بھی ہے۔ پس اگر ایک چھوٹے زاویہ \angle کا دائری ناپ \angle ہو تو

$$\angle \text{ جب } \angle = (\text{لوک جب } \angle + \angle) + \text{لوک } \angle$$

$$\angle \text{ مس } \angle = (\text{لوک مس } \angle + \angle) + \text{لوک } \angle \quad (161)$$

جہاں \angle کا دائری ناپ ہے۔

$$\text{اب} \quad \text{لوک } (\angle + \angle) - \text{لوک } \angle = \text{لوک } (\angle + \angle)$$

$$= \frac{\angle}{\angle} - \frac{\angle}{\angle} + \dots$$

اس لیے لوک \angle کے لیے فرق باقاعدہ ہیں اگر \angle بمقابلہ \angle کے چھوٹا ہو۔ نیز لوک جب \angle لوک مس \angle کے لیے فرق ناقابلِ قدر ہیں کیونکہ

$$\text{لوک جب } (\angle + \angle) - \text{لوک جب } \angle = \text{لوک جب } (\angle + \angle) - \text{لوک } \angle$$

$$= \frac{\angle}{\angle} - \frac{\angle}{\angle} - \frac{\angle}{\angle} + \frac{\angle}{\angle}$$

$$= \frac{\angle}{\angle} - \frac{\angle}{\angle} + \left(\frac{\angle}{\angle} - \frac{\angle}{\angle} \right) - \frac{\angle}{\angle}$$

اور

$$\text{لوک مس } (لا + ۵) - \frac{\text{لوک مس } لا}{لا + ۵}$$

$$= ۵ - \left(\text{جب لا جم لا} - \frac{۱}{لا} \right) + \frac{۲۵}{۴} - \left(\text{جب لا جم لا} - \frac{۱}{لا} \right) + \frac{۱}{لا}$$

ان میں سے ہر فرق ناقابل قدر ہے کیونکہ ۵ کا سر چھوٹا ہے جبکہ لا چھوٹا ہو۔

اگر لوک جب لا + ل + ۵، لوک مس لا + ل + ۵ کی قیمتوں کی جدول راج کے پہلے چند درجن تک تیار کی جائیں تو ہم ان جدولوں کو عددوں کے طبعی لوکارتموں کی جدولوں کے ساتھ ان کو ٹھیک طور پر معلوم کرنے کے لیے استعمال کر سکتے ہیں جبکہ ل جب ن یا ل مس ن دیا گیا ہو، یا بالکس۔

اگر ل جب ن یا ل مس ن دیا گیا ہے تو ن کی تقریبی قیمت معلوم کرو؛ پھر جدول سے لوک جب لا + ل + ۵ یا لوک مس لا + ل + ۵ کی قیمت حاصل کرو جن میں سے ہر ایک بہت سست بدلتا ہے۔ تب لوک ن اس قیمت

ل جب ن۔ (لوک جب لا + ل + ۵)

ل مس ن۔ (لوک مس لا + ل + ۵)

(152) سے حاصل ہوتا ہے اور ہم طبعی لوکارتموں کی جدول سے ن کو ٹھیک ٹھیک معلوم کر لیتے ہیں۔ اگر ن دیا گیا ہے تو جدول سے لوک جب لا + ل + ۵ کی قیمت ملتی ہے اور پھر جب ن کو ضابطہ سے معلوم کیا جاتا ہے۔

کا طریقہ۔

(Maskelyne)

(۳) میا سکلین

اس طریقہ کا اصول وہی ہے جو ڈلبر کے طریقہ کا ہے۔ اگر

لا ایک چھوٹا زاویہ ہو تو

$$\text{جب لا} = 1 - \frac{لا}{۴} = (1 - \frac{لا}{۴}) \times \frac{۱}{۳} = \text{جم لا}، تقریباً$$

اس لیے لوک جب لا = لوک لا + $\frac{۱}{۳}$ لوک جم لا
اب چونکہ لا ایک چھوٹا زاویہ ہے، لوک جم لا کے فرق ناقابل قدر ہیں؛
اس لیے جم لا کی تقریبی قیمت کا استعمال کرنا کافی ہے۔ اگر
لوک جب لا دیا گیا ہے تو ہم لا کی تقریبی قیمت معلوم کرتے
ہیں اور اس کو لوک جم لا کی قیمت معلوم کرنے کے لیے استعمال
کرتے ہیں؛ پھر مساوات بالا سے لا حاصل ہو جاتا ہے۔ اگر لا دیا
گیا ہے تو ہم طبعی لوکارتموں کی جدول سے لوک لا ٹھیک ٹھیک
معلوم کر سکتے ہیں اور نیز لوک جم لا کی تقریبی قیمت؛ تب اوپر کے ضابطہ
سے لوک جب لا مل جاتا ہے۔ اسی طرح ثابت ہو سکتا ہے کہ
لوک مس لا، ضابطہ لوک مس لا = لوک لا - $\frac{۱}{۳}$ لوک جم لا سے
حاصل ہو سکتا ہے۔

مثال

ثابت کرو کہ ضابطہ ذیل میاں سکیلین کے ضابطہ سے زیادہ قریبی طور پر صحیح ہے۔
لوک جب ط = لوک ط - $\frac{۱}{۳}$ لوک جم ط + $\frac{۱}{۳}$ لوک جم پ

لوکارتمی اعمال حساب کے لیے ضابطوں کو

موزوں بنانا

۱۱۵۔ کسی جگہ کو ایسی شکل میں تبدیل کرنے کے لیے کہ لوکارتموں
کی جدولوں کی مدد سے عددی قیمتیں محسوب کی جاسکیں ایسے ابدال

غل میں لانے چاہئیں جو دیے ہوئے جملوں کو سادہ جملوں کے حاصل ضرب میں تبدیل کر دیں؛ یہ عمل ایک یا زیادہ معاون زاویوں کے ذریعہ اکثر ہو سکیگا مثلاً دیکھو مسئلہ ذیل:-

$$(۱) \text{ ما } \overline{\text{ا ب}}^۳ = \text{ا} \text{ ق } \text{ ف } \text{ ذ} \text{ جہاں مس ف } = \frac{\text{ب}}{\text{ا}}$$

پس لوک $\overline{\text{ا ب}}^۲ = ۲ \text{ لوک ا} + \frac{۱}{۲} (\text{ل ق ف ذ} - ۱۰)$

جہاں ل مس ف = $۳ + ۱۰$ (لوک ب - لوک ا)

اس طرح $\overline{\text{ا ب}}^۳$ کو کارتی جدولوں کے ذریعہ محسوس کیا جاسکتا ہے اگرچہ پہلے ان جدولوں سے معلوم کر لیا گیا ہو۔

(۲) $\text{ا} \text{ ج } \text{ م} + \text{ب} \text{ ج } \text{ م} = \text{ا} \text{ ج } \text{ م} (\text{ع} - \text{ذ})$ ق ف ذ جہاں مس ف = $\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ (15۹)

پس لوک $(\text{ا} \text{ ج } \text{ م} + \text{ب} \text{ ج } \text{ م}) = \text{لوک ا} + \text{ل ج } \text{ م} (\text{ع} - \text{ذ})$ - ل ج م ف

جہاں ل مس ف = $۱۰ + \text{لوک ب} - \text{لوک ا}$

سے ف معلوم ہوتا ہے۔

۱۱۶ — دو درجی مساوات کی اصلیں عدداً محسوب کرنا جبکہ اصلیں

حقیقی ہوں۔

فرض کرو کہ مساوات $\text{ا} \text{ ل } \text{ا} + \text{ب} \text{ ل } \text{ا} + \text{ج} = ۰$ ہے اور اول فرض کرو

کہ $\text{ا} \text{ ل } \text{ا}$ اور ج دونوں مثبت ہیں۔ اب مساوات مس ل ط ۲ - ۲ م ل ط ۲ + ۱ =

پر غور کرو اور فرض کرو کہ $\text{ا} = \text{ما}$ تو ل کی مساوات بالا ہو جاتی ہے

$$\text{ما} + \text{ب} \text{ ل } \text{ا} \text{ ل } \text{ا} + \text{ج} = ۱ = ۰$$

پس اگر ج ب ط ۲ = $۲ \text{ ل } \text{ا} \text{ ل } \text{ا} + \text{ب}$ تو م کی دو درجی مساوات وہی ہوگی

جو - مس ل ط کی ہے جس کی اصلیں - مس ل ط - مم م ہیں - پس دیے

ہوئے دو درجی کی اصلیں ہیں

وہ شرط کہ کبھی کی اہلیں سب کی سب متقی ہوں یہ ہے کہ جب یہ شرط ہے !
ہم کسی آئندہ باب میں روایتی اسلوں والی کبھی سادات کی اہلیں
دریافت کرنے کا طریقہ بیان کریں گے۔

وہ اعمال جن کے ذریعہ ہم نے دو درجہ اور کئی مساواتوں کو حل کیا ہے یہ بتاتے ہیں کہ یہ دو جبری مسئلے فی الواقعہً ان ہندسی مسئلوں کے مماثل ہیں جو ایک زاویہ کی علی الترتیب تنجیمت تشابہات سے متعلق ہیں۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ایک دو درجہ مساوات صرف پٹرنی اور پرکار کی دو سے ترتیبی طور پر حل کی جا سکتی ہے البتہ کچھ مساوات ان کی مدد سے ترتیبی طور پر بالعموم حل نہیں ہو سکتی کیونکہ یہ اسے ایک زاویہ کی تخلیق کے ہندسی مسئلہ کو عام طور پر حل کرنے کے لیے ناکافی ہیں۔

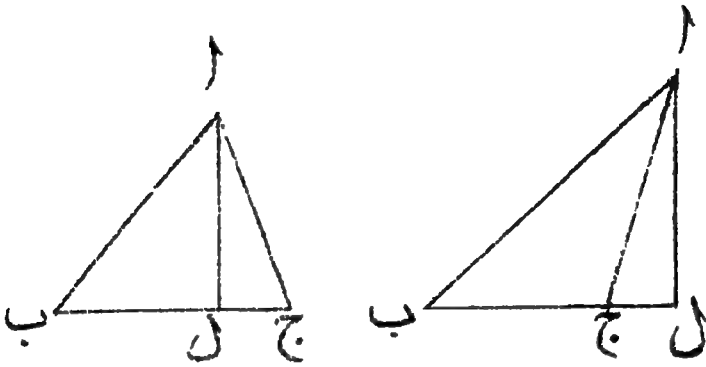
(155)

دسواں باب

مثالی ضلعوں و زاویوں کے درمیان رشتے

۱۱۸۔ اگر ا ب ج کوئی مثلث ہو تو ہم زاویوں پ ا ج، ا ب ج، ا ج ب کی مقداروں کو علی الترتیب بڑے حروف، ب، ج، ا سے تعبیر کریں گے۔ اور ضلعوں ب ج، ج ا، ا ب کے طویل کو علی الترتیب چھوٹے حروف و، ب، ج سے۔ ہم اس باب میں مختلف اہم مسئلوں کی تحقیق کریں گے جو مثلث کے ضلعوں اور ب، ج، ا کو زاویوں کے دائری تفاضلوں کے ساتھ مربوط کرتے ہیں۔ ان ضابطوں سے ان طریقوں کی بنیاد ملیگی جن کے ذریعہ مثلث کو ان مختلف صورتوں میں حل کیا جاتا ہے جن میں مثلث کے تین اجزاء دیے جاتے ہیں۔

۱۱۹۔ نفلوں کے بنیادی مسئلے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ب ج پر ب ا، ا ج کے نفلوں کا مجموعہ ب ج کے مساوی ہے اور ب ج پر کے ایک عمود پر ان کے نفلوں کا مجموعہ صفر ہے۔ ان واقعات کو بیان کرنے کے بعد چونکہ ا ج کی مثبت سمت، ب ج کی مثبت سمت کے ساتھ زاویہ ج بناتی ہے اس لیے



$$\begin{aligned} \text{ب ا جم ب} + \text{ا ج جم ج} &= \text{ا} \\ \text{ج جم ب} + \text{ب جم ج} &= \text{ب} \\ \text{ب ا جم ب} - \text{ا ج جم ج} &= \text{ج} \\ \text{ج جم ب} - \text{ب جم ج} &= \text{ج} \end{aligned}$$

یا
اور
یا

$$\text{جس کو لکھا جاسکتا ہے} \quad \frac{\text{ب}}{\text{ج}} = \frac{\text{ب ا جم ب}}{\text{ج جم ب}}$$

اسی طرح دیگر دو ضلعوں اور ان پر کے عمودوں میں سے ہر ایک پر باری باری سے ظل لینے سے جو رشتے حاصل ہوتے ہیں ان کو اور منسلک بالارشتوں کو 'ب' قیل شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{cases} \text{ا} = \text{ب جم ج} + \text{ج جم ب} \\ \text{ب} = \text{ج جم ا} + \text{ا جم ج} \\ \text{ج} = \text{ا جم ب} + \text{ب جم ا} \end{cases} \quad (۱)$$

$$\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب ا جم ب}}{\text{ج ا جم ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{ج}} \quad (۲)$$

مساواتوں (۲) سے اس واقعہ کا اظہار ہوتا ہے کہ کسی مثلث

کے اضلاع، متقابلہ زاویوں کی جیبوں کے متناسب ہوتے ہیں۔

۱۲۰۔ رشتوں (۲) کو اس طرح بھی ثابت کیا جاسکتا ہے۔
 مثلث ۱ ب ج کا حاکم دائرہ کھینچو اور فرض کرو کہ اس کا نصف قطر r ہے، تب ضلع ب ج $= ۲ \times$ دائرہ کا نصف قطر \times اس زاویے کے نصف کی جیب جو ب ج کے محاذی مرکز پر بنتا ہے

یعنی $\text{ب ج} = ۲r \text{ جب } ۱ \text{ یا } ۲r \text{ جب } (۱۸۰-۱)$
 پس $r = \frac{\text{ب ج}}{۲}$
 اسی طرح $r = \frac{\text{ج ب}}{۲}$
 اور $r = \frac{\text{ج ج}}{۲}$

اس لیے $\frac{1}{\text{ب ج}} = \frac{1}{\text{ج ب}} = \frac{1}{\text{ج ج}} = \frac{1}{۲r}$
 رشتہ (۲) کو (۱) سے بھی اخذ کیا جاسکتا ہے، چنانچہ پہلی دو مساواتوں کو شکل

۱۔ ب ج ج - ج ج ب = ۰
 ۲۔ ج ج ج + ج ج ب = ۰
 میں رکھنے سے ہم ۱ ب ج کی نسبتیں دریافت کر سکتے ہیں اور اس طرح ہیں حاصل ہوتا ہے

۱۔ $\frac{1}{\text{ج ج ج} + \text{ج ج ب}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{ج ج ج} + \text{ج ج ب}} = \frac{\text{ج ج}}{\text{ج ج ج} + \text{ج ج ب}}$
 اس لیے $\frac{1}{\text{ج ج ج} + \text{ج ج ب}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{ج ج ج} + \text{ج ج ب}} = \frac{\text{ج ج}}{\text{ج ج ج} + \text{ج ج ب}}$
 یعنی $\frac{1}{\text{ج ج ج} + \text{ج ج ب}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{ج ج ج} + \text{ج ج ب}} = \frac{\text{ج ج}}{\text{ج ج ج} + \text{ج ج ب}}$

(۲) سے (۱) کو اخذ کرنے کے لیے چونکہ

$\frac{1}{\text{ج ج ج} + \text{ج ج ب}} = \frac{1}{\text{ج ج ج} + \text{ج ج ب}} = \frac{1}{\text{ج ج ج} + \text{ج ج ب}}$

اور دوسری صورت میں

ج لی = ا ج جم (۱۸۰ - ج) = - ا ج جم ج
اس لیے ہر دو صورتوں میں

ج = 'ا + 'ب - '۲ لوب جم ج
رشتوں (۲) سے (۱) کو اخذ کرنے کے لیے چونکہ

$$\text{جم} = \frac{\text{ب} + \text{ج} - \text{ا}}{\text{ب ج}}$$

$$\text{اس لیے جیسا ۱} = \frac{\text{م ب ج} - \text{ا} - (\text{ب ج} - \text{ا})}{\text{م ب ج}} = \frac{(\text{م ب ج} + \text{ب ج} - \text{ا}) - (\text{م ب ج} + \text{ج} - \text{ا})}{\text{م ب ج}}$$

$$\text{یا جیسا ۱} = \frac{(\text{ا} + \text{ب} + \text{ج}) - (\text{ب} + \text{ج} - \text{ا})}{\text{م ب ج}}$$

پس 'ا سے تقسیم کرنے سے جیسا ۱ حسب ذیل متشکل جملے کے مساوی ہے

$$\frac{(\text{ا} + \text{ب} + \text{ج}) - (\text{ب} + \text{ج} - \text{ا})}{\text{م لوب ج}}$$

$$\text{اس لیے جیسا ۱} = \frac{\text{ج ب} - \text{ب}}{\text{ج}} = \frac{\text{ج ب} - \text{ب}}{\text{ج}}$$

جس سے نتیجہ (۲) حاصل ہوتا ہے۔

(۳) سے (۱)، کو اخذ کرنے کے لیے (۳) کی پہلی دو مساواتوں کو ج

تقسیم کر د اور پھر انہیں جمع کر د تو حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{ا} + \text{ب}}{\text{ج}} = \text{ج} + \frac{\text{ا} + \text{ب}}{\text{ج}} - ۲ - (\text{ب جم} + \text{ا جم ب})$$

$$\text{یا ج} = \text{ب جم} + \text{ا جم ب}$$

$$\text{۱۲۳} - \text{ہم جانتے ہیں کہ}$$

$$\text{جیسا ۱} = \frac{۱}{۲} - (\text{ا جم} + \text{ب جم}) = \frac{۱}{۲} - (\text{ا جم} + \text{ب جم})$$

اس لیے

$$\text{جب } \frac{1}{a} = \frac{1}{b} \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} - 1 \right)$$

$$\text{جم } \frac{1}{a} = \frac{1}{b} \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)$$

$$\text{جب } \frac{1}{a} = \frac{(b+c)(b-c)}{2bc}$$

$$\text{جم } \frac{1}{a} = \frac{(b+c)(b+c)}{2bc}$$

اب فرض کرو $2s = a + b + c$ تو $2(s - a) = b + c - a$ اور یہیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{جب } \frac{1}{a} = \frac{(s-b)(s-c)}{bc} \quad \text{جم } \frac{1}{a} = \frac{s(s-a)}{bc}$$

$$\text{اس لیے جب } \frac{1}{a} = \left\{ \frac{(s-b)(s-c)}{bc} \right\} \quad \text{جم } \frac{1}{a} = \left\{ \frac{s(s-a)}{bc} \right\}$$

$$\text{مس } \frac{1}{a} = \left\{ \frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)} \right\} \quad (۴)$$

ان ضابطوں کے ذریعے زاویوں کے قفاصل معلوم کرنے میں جبکہ ضلع دیے گئے ہوں زیادہ سہولت ہے بہ نسبت ضابطوں (۳) کے کیونکہ ان کو زیادہ آسانی کے ساتھ لوجاریتمی اعمال حساب کے لیے موزوں بنایا جاسکتا ہے۔

$$\frac{\text{جب } b}{\text{جب } c} = \frac{\text{جب } B}{\text{جب } C} \quad \text{چونکہ}$$

$$\frac{\text{جب } b \pm \text{جب } c}{\text{جب } b} = \frac{\text{جب } B \pm \text{جب } C}{\text{جب } B} \quad \text{یا} \quad \frac{\text{جب } b \pm \text{جب } c}{\text{جب } b} = \frac{\text{جم } \frac{1}{b} (\text{جب } B \pm \text{جب } C)}{\text{جم } \frac{1}{b} (\text{جب } B \pm \text{جب } C)}$$

$$\text{اور نیز } \frac{\text{ب} + \text{ج}}{\text{ج} - \text{ب}} = \frac{\text{ج} + \text{ع}}{\text{ج} - \text{ع}} = \frac{\text{ع} + \text{ب}}{\text{ع} - \text{ب}} = \frac{\text{ب} + \text{م}}{\text{م} - \text{ب}} = \frac{\text{مس} + \frac{1}{2}(\text{ج} - \text{ب})}{\text{مس} - \frac{1}{2}(\text{ج} - \text{ب})} =$$

$$\text{اس لیے } \text{مس} + \frac{1}{2}(\text{ج} - \text{ب}) = \frac{\text{ب} + \text{ج}}{\text{ب} - \text{ج}} \text{م} + \frac{1}{2}$$

مثلث کا رقبہ

۱۲۵ — کسی مثلث کا رقبہ اُس متوازی الاضلاع کے رقبہ کا نصف ہوتا ہے جو اُسی قاعدہ پر اُسی ارتفاع کے ساتھ بنایا گیا ہو جو کہ مثلث کے ہیں؛ اگر ضلع $\frac{1}{2}$ قاعدہ ہو تو ارتفاع ب جب ج یا ج جب ب ہوگا اور اس لیے مثلث کے رقبہ کے لیے ہمیں حسب ذیل جملے طے کیے۔

$\frac{1}{2} \times \text{ب} \times \text{ج}$ اور $\frac{1}{2} \times \text{ج} \times \text{ب}$

پس مثلث کا رقبہ $= \frac{1}{2} \times \text{کوئی دو ضلعوں کا حاصل ضرب}$ اور ان کے درمیان زاویہ کی جیب

یعنی مثلث کا رقبہ اس کے کسی دو ضلعوں اور ان کے درمیان زاویہ کی جیب کے حاصل ضرب کا نصف ہوتا ہے۔

اب جب ا کی بجائے وہ جملہ جو دفعہ ۱۲۲ میں معلوم کیا جا چکا ہے یعنی

$$\frac{1}{2} \times \text{ب} \times \text{ج} \times (\text{ا} + \text{ب} + \text{ج}) (\text{ا} + \text{ب} - \text{ج}) (\text{ا} - \text{ب} + \text{ج}) (\text{ا} - \text{ب} - \text{ج})$$

استعمال کرنے سے مثلث کے رقبہ کے لیے ہمیں یہ جملہ

$$\frac{1}{2} \times \text{ا} \times \text{ب} \times \text{ج} \times (\text{ا} + \text{ب} + \text{ج}) (\text{ا} + \text{ب} - \text{ج}) (\text{ا} - \text{ب} + \text{ج}) (\text{ا} - \text{ب} - \text{ج})$$

یا اس (س - ا) (س - ب) (س - ج) (۶)

منا ہے۔ اسکندریہ کے ہیروڈوٹس نے یہ ضابطہ تقریباً ۴۰۰ سال قبل ق م میں حاصل کیا تھا۔ اس ضابطہ (۶) کو اس طرح بھی لکھا جاسکتا ہے

$$\frac{1}{2} a^2 \sin C + \frac{1}{2} a^2 \sin A + \frac{1}{2} a^2 \sin B = \frac{1}{2} a^2 \sin C$$

مثلث کے ضلعوں اور زاویوں میں تغیرات

(160)

۱۳۶۔ اب ہم ان رشتوں کی تحقیق کریں گے جو ایک مثلث کے ضلعوں اور زاویوں کی قیمتوں کے مثبت یا منفی چھوٹے اضافوں کے درمیان پائے جاتے ہیں۔ فرض کرو کہ ایک مثلث کے اجزاء میں سے تین اجزاء کی پیمائش کی گئی ہے جن میں سے کم از کم ایک جزو ضلع ہے، باقی دو دیگر تین اجزاء اس باب کے ضابطوں سے متعین ہونگے، تب ان اجزاء کے اضافوں کے درمیان جو رشتے ہوں گے، ان کی مدد سے ہم یہ معلوم کر سکیں گے کہ قبل اذکر اجزاء کی پیمائش میں چھوٹی خطاؤں کی موجودگی سے ما بعد اذکر تین اجزاء کی قیمتوں میں کیا خطائیں واقع ہوتی ہیں ہم فرض کر لیں گے کہ اضافہ اس قدر چھوٹے ہیں کہ ان کے مربع اور حاصل ضرب نظر انداز ہو سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ ایک مثلث کے ضلعوں اور زاویوں کی قیمتیں 'ا' 'ب' 'ج' ہیں جن میں تین ایک ضلع اور دو زاویے، یا دو ضلع اور ایک زاویہ، یا تین ضلعوں کی قیمتیں پیمائش کے ذریعہ معلوم کی گئی ہیں اور دوسری تین قیمتیں ان پیمائش کردہ قیمتوں کے ساتھ مذکورہ بالا ضابطوں کے

۱۔ دیکھو بال کی ہٹری آف میٹامٹیکس صفحہ ۸۲ جس میں اس ضابطہ کا اصل ہندی ثبوت دیا گیا ہے۔

دریہ مربوط ہے۔ اگر ان پیمائش کردہ اجزاء میں کوئی خطا واقع ہوئی ہے تو اس کا نتیجہ یہ ہو گا کہ دیگر تین اجزاء کی قیمتوں میں جو ضابطوں سے حامل کی گئی ہیں خطائیں واقع ہونگی۔

کی کسی ہیں خطائیں واقع ہوئی۔
فرض کرو کہ زاویوں اور ضلعوں کی صحیح قیمتیں ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۲۸، ۲۹، ۳۰، ۳۱، ۳۲، ۳۳، ۳۴، ۳۵، ۳۶، ۳۷، ۳۸، ۳۹، ۴۰، ۴۱، ۴۲، ۴۳، ۴۴، ۴۵، ۴۶، ۴۷، ۴۸، ۴۹، ۵۰، ۵۱، ۵۲، ۵۳، ۵۴، ۵۵، ۵۶، ۵۷، ۵۸، ۵۹، ۶۰، ۶۱، ۶۲، ۶۳، ۶۴، ۶۵، ۶۶، ۶۷، ۶۸، ۶۹، ۷۰، ۷۱، ۷۲، ۷۳، ۷۴، ۷۵، ۷۶، ۷۷، ۷۸، ۷۹، ۸۰، ۸۱، ۸۲، ۸۳، ۸۴، ۸۵، ۸۶، ۸۷، ۸۸، ۸۹، ۹۰، ۹۱، ۹۲، ۹۳، ۹۴، ۹۵، ۹۶، ۹۷، ۹۸، ۹۹، ۱۰۰، ۱۰۱، ۱۰۲، ۱۰۳، ۱۰۴، ۱۰۵، ۱۰۶، ۱۰۷، ۱۰۸، ۱۰۹، ۱۱۰، ۱۱۱، ۱۱۲، ۱۱۳، ۱۱۴، ۱۱۵، ۱۱۶، ۱۱۷، ۱۱۸، ۱۱۹، ۱۲۰، ۱۲۱، ۱۲۲، ۱۲۳، ۱۲۴، ۱۲۵، ۱۲۶، ۱۲۷، ۱۲۸، ۱۲۹، ۱۳۰، ۱۳۱، ۱۳۲، ۱۳۳، ۱۳۴، ۱۳۵، ۱۳۶، ۱۳۷، ۱۳۸، ۱۳۹، ۱۴۰، ۱۴۱، ۱۴۲، ۱۴۳، ۱۴۴، ۱۴۵، ۱۴۶، ۱۴۷، ۱۴۸، ۱۴۹، ۱۵۰، ۱۵۱، ۱۵۲، ۱۵۳، ۱۵۴، ۱۵۵، ۱۵۶، ۱۵۷، ۱۵۸، ۱۵۹، ۱۶۰، ۱۶۱، ۱۶۲، ۱۶۳، ۱۶۴، ۱۶۵، ۱۶۶، ۱۶۷، ۱۶۸، ۱۶۹، ۱۷۰، ۱۷۱، ۱۷۲، ۱۷۳، ۱۷۴، ۱۷۵، ۱۷۶، ۱۷۷، ۱۷۸، ۱۷۹، ۱۸۰، ۱۸۱، ۱۸۲، ۱۸۳، ۱۸۴، ۱۸۵، ۱۸۶، ۱۸۷، ۱۸۸، ۱۸۹، ۱۹۰، ۱۹۱، ۱۹۲، ۱۹۳، ۱۹۴، ۱۹۵، ۱۹۶، ۱۹۷، ۱۹۸، ۱۹۹، ۲۰۰، ۲۰۱، ۲۰۲، ۲۰۳، ۲۰۴، ۲۰۵، ۲۰۶، ۲۰۷، ۲۰۸، ۲۰۹، ۲۱۰، ۲۱۱، ۲۱۲، ۲۱۳، ۲۱۴، ۲۱۵، ۲۱۶، ۲۱۷، ۲۱۸، ۲۱۹، ۲۲۰، ۲۲۱، ۲۲۲، ۲۲۳، ۲۲۴، ۲۲۵، ۲۲۶، ۲۲۷، ۲۲۸، ۲۲۹، ۲۳۰، ۲۳۱، ۲۳۲، ۲۳۳، ۲۳۴، ۲۳۵، ۲۳۶، ۲۳۷، ۲۳۸، ۲۳۹، ۲۴۰، ۲۴۱، ۲۴۲، ۲۴۳، ۲۴۴، ۲۴۵، ۲۴۶، ۲۴۷، ۲۴۸، ۲۴۹، ۲۵۰، ۲۵۱، ۲۵۲، ۲۵۳، ۲۵۴، ۲۵۵، ۲۵۶، ۲۵۷، ۲۵۸، ۲۵۹، ۲۶۰، ۲۶۱، ۲۶۲، ۲۶۳، ۲۶۴، ۲۶۵، ۲۶۶، ۲۶۷، ۲۶۸، ۲۶۹، ۲۷۰، ۲۷۱، ۲۷۲، ۲۷۳، ۲۷۴، ۲۷۵، ۲۷۶، ۲۷۷، ۲۷۸، ۲۷۹، ۲۸۰، ۲۸۱، ۲۸۲، ۲۸۳، ۲۸۴، ۲۸۵، ۲۸۶، ۲۸۷، ۲۸۸، ۲۸۹، ۲۹۰، ۲۹۱، ۲۹۲، ۲۹۳، ۲۹۴، ۲۹۵، ۲۹۶، ۲۹۷، ۲۹۸، ۲۹۹، ۳۰۰، ۳۰۱، ۳۰۲، ۳۰۳، ۳۰۴، ۳۰۵، ۳۰۶، ۳۰۷، ۳۰۸، ۳۰۹، ۳۱۰، ۳۱۱، ۳۱۲، ۳۱۳، ۳۱۴، ۳۱۵، ۳۱۶، ۳۱۷، ۳۱۸، ۳۱۹، ۳۲۰، ۳۲۱، ۳۲۲، ۳۲۳، ۳۲۴، ۳۲۵، ۳۲۶، ۳۲۷، ۳۲۸، ۳۲۹، ۳۳۰، ۳۳۱، ۳۳۲، ۳۳۳، ۳۳۴، ۳۳۵، ۳۳۶، ۳۳۷، ۳۳۸، ۳۳۹، ۳۴۰، ۳۴۱، ۳۴۲، ۳۴۳، ۳۴۴، ۳۴۵، ۳۴۶، ۳۴۷، ۳۴۸، ۳۴۹، ۳۵۰، ۳۵۱، ۳۵۲، ۳۵۳، ۳۵۴، ۳۵۵، ۳۵۶، ۳۵۷، ۳۵۸، ۳۵۹، ۳۶۰، ۳۶۱، ۳۶۲، ۳۶۳، ۳۶۴، ۳۶۵، ۳۶۶، ۳۶۷، ۳۶۸، ۳۶۹، ۳۷۰، ۳۷۱، ۳۷۲، ۳۷۳، ۳۷۴، ۳۷۵، ۳۷۶، ۳۷۷، ۳۷۸، ۳۷۹، ۳۸۰، ۳۸۱، ۳۸۲، ۳۸۳، ۳۸۴، ۳۸۵، ۳۸۶، ۳۸۷، ۳۸۸، ۳۸۹، ۳۹۰، ۳۹۱، ۳۹۲، ۳۹۳، ۳۹۴، ۳۹۵، ۳۹۶، ۳۹۷، ۳۹۸، ۳۹۹، ۴۰۰، ۴۰۱، ۴۰۲، ۴۰۳، ۴۰۴، ۴۰۵، ۴۰۶، ۴۰۷، ۴۰۸، ۴۰۹، ۴۱۰، ۴۱۱، ۴۱۲، ۴۱۳، ۴۱۴، ۴۱۵، ۴۱۶، ۴۱۷، ۴۱۸، ۴۱۹، ۴۲۰، ۴۲۱، ۴۲۲، ۴۲۳، ۴۲۴، ۴۲۵، ۴۲۶، ۴۲۷، ۴۲۸، ۴۲۹، ۴۳۰، ۴۳۱، ۴۳۲، ۴۳۳، ۴۳۴، ۴۳۵، ۴۳۶، ۴۳۷، ۴۳۸، ۴۳۹، ۴۴۰، ۴۴۱، ۴۴۲، ۴۴۳، ۴۴۴، ۴۴۵، ۴۴۶، ۴۴۷، ۴۴۸، ۴۴۹، ۴۵۰، ۴۵۱، ۴۵۲، ۴۵۳، ۴۵۴، ۴۵۵، ۴۵۶، ۴۵۷، ۴۵۸، ۴۵۹، ۴۶۰، ۴۶۱، ۴۶۲، ۴۶۳، ۴۶۴، ۴۶۵، ۴۶۶، ۴۶۷، ۴۶۸، ۴۶۹، ۴۷۰، ۴۷۱، ۴۷۲، ۴۷۳، ۴۷۴، ۴۷۵، ۴۷۶، ۴۷۷، ۴۷۸، ۴۷۹، ۴۸۰، ۴۸۱، ۴۸۲، ۴۸۳، ۴۸۴، ۴۸۵، ۴۸۶، ۴۸۷، ۴۸۸، ۴۸۹، ۴۹۰، ۴۹۱، ۴۹۲، ۴۹۳، ۴۹۴، ۴۹۵، ۴۹۶، ۴۹۷، ۴۹۸، ۴۹۹، ۵۰۰، ۵۰۱، ۵۰۲، ۵۰۳، ۵۰۴، ۵۰۵، ۵۰۶، ۵۰۷، ۵۰۸، ۵۰۹، ۵۱۰، ۵۱۱، ۵۱۲، ۵۱۳، ۵۱۴، ۵۱۵، ۵۱۶، ۵۱۷، ۵۱۸، ۵۱۹، ۵۲۰، ۵۲۱، ۵۲۲، ۵۲۳، ۵۲۴، ۵۲۵، ۵۲۶، ۵۲۷، ۵۲۸، ۵۲۹، ۵۳۰، ۵۳۱، ۵۳۲، ۵۳۳، ۵۳۴، ۵۳۵،

یہیں ملتا ہے ج جب ب - ب جب ج = .

اور (رج + منج) جب (ب + من ب) - (ب + من ب) جب (رج + منج) =
اب چونکہ من ب، منج کے مرج نظر انداز ہو سکتے ہیں اس لیے
جب (ب + من ب) = جب ب + من ب جم ب،
جب (رج + منج) = جسرج + منج جمج

اس لیے (ج 4 مفع) (ج ب 4 مفع ب جم ب)۔ (ب 4 مفع ب) (ج ب ج 4 مفع ج جم ج)۔
اس لیے اگر مفع 'مفع ب'، 'مفع ب'، 'مفع ج' کے حاصل ضرب نظر انداز کیے جائیں تو

جہم ب + مف ب + جب ب = مف ج - جب ج = مف ج جب ج = مف ب
اسی طرح اور دو مساواتیں حاصل ہوتی ہیں اور یہ کل تین مساواتیں اس طرح
لکھی جاسکتی ہیں۔

جیب ج × مفتح ب = جیب ج × مفتح ج = جرم ب × مفتح ب = جرم ج × مفتح ج
جیب ا × مفتح ج = جیب ج × مفتح ا = جرم ا × مفتح ج = جرم ج × مفتح ا
جیب ب × مفتح ا = جیب ا × مفتح ب = جرم ا × مفتح ب = جرم ب × مفتح ا

نیز چونکہ

یہ دور رشتے (۱۰) کثیر الاضلاع کے ضلعوں اور زاویوں کے درمیان بنیادی رشتے ہیں۔ اگر ضلعوں کی تعداد صرف تین ہو تو یہ رشتے (۱) اور (۲) میں تحویل ہو جاتے ہیں کیونکہ اس صورت میں $\alpha = \beta = \gamma$ اور $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ ۔ (۱۰) کی پہلی مساوات میں α کو مساوات کی دوسری جانب منتقل کرو، پھر ہر مساوات کی طرفین کا مربع لے کر جمع کرو تو نتیجہ میں

$$\text{جم} (\alpha + \beta + \gamma + \dots + \alpha + \beta + \gamma) = \dots$$

$$+ \text{جب} (\alpha + \beta + \gamma + \dots + \alpha + \beta + \gamma) = \dots$$

یوں کہ

$$\text{جم} (\alpha + \beta + \gamma + \dots + \alpha + \beta + \gamma) = \dots$$

یعنی

بجیب التمام ہے زاویہ طے کی جو ضلعوں α اور β کی مثبت سمتوں کا درمیان زاویہ ہے؛ پس ہمیں مضابطہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\alpha = \beta + \gamma + \dots + \alpha + \beta + \gamma + \dots + \alpha + \beta + \gamma + \dots$$

(۱۱) \dots

جو مضابطہ (۳) کے مثل ہے اور اس میں تحویل ہو جاتا ہے اگر $n = 3$ ۔ مضابطہ (۱۱) میں α اور β غیر مساوی ہیں اور ہر ایک n سے کم ہے۔

کثیر الاضلاع کا رقبہ

۱۲۹ — کثیر الاضلاع کا رقبہ جملہ

$$\frac{1}{2} (\alpha + \beta + \gamma + \dots + \alpha + \beta + \gamma + \dots + \alpha + \beta + \gamma) \times \text{عمدہ}$$

یا $\frac{1}{2} \times \text{عمدہ} \times \text{جم} (\alpha + \beta + \gamma + \dots + \alpha + \beta + \gamma + \dots + \alpha + \beta + \gamma)$ ۔ راورس کی تمام مختلف قیمتوں کے لیے لیا گیا ہو۔ اگر ہم مقداروں α اور β میں سے n کو

ہمیشہ ر سے بڑا فرض کریں تو زاویہ طیس حسب دفعہ سابق خارجہ زاویوں
 $\pi + \alpha$ ، $\pi + \beta$ ، $\pi + \gamma$ ہیں کا حاصل جمع ہے۔ ضابطہ بالا کو ثابتہ کرنے
 کے لیے ہم پہلے یہ دکھائینگے کہ ایک مثلث کی صورت میں یہ ضابطہ
 جملہ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ جب α میں تحول ہوتا ہے اور پھر ہم یہ بتائینگے کہ اگر وہ α
 (ن-۱) ضلعوں والے کثیر الاضلاع کے لیے درست ہے تو وہ α ن
 ضلعوں والے کثیر الاضلاع کے لیے بھی درست ہے۔

مثلث α ، β ، γ کی صورت میں α ، β ، γ ہیں حاصل ہوتے

(168)

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad \text{طیس} \quad \frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{\pi - \alpha} + \frac{1}{\pi - \beta} + \frac{1}{\pi - \gamma}$$

پس اس صورت میں جملہ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{\pi - \alpha} + \frac{1}{\pi - \beta} + \frac{1}{\pi - \gamma}$ جب طیس

$$= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad \text{جب } \alpha = \beta = \gamma = \pi$$

$$= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad \text{جب } \alpha = \beta = \gamma = \pi$$

اس طرح ضابطہ بالا درست ہے جبکہ $\alpha = \beta = \gamma = \pi$

اب فرض کرو کہ (ن-۱) ضلعوں

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} = \frac{1}{\pi - \alpha_1} + \frac{1}{\pi - \alpha_2} + \dots + \frac{1}{\pi - \alpha_{n-1}}$$

والے کثیر الاضلاع کے لیے ضابطہ درست ہے، اس طرح اس کثیر الاضلاع

کا رقبہ ہے

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\pi - \alpha_1} + \frac{1}{\pi - \alpha_2} + \dots + \frac{1}{\pi - \alpha_{n-1}} \right)$$

جس میں ر اور س میں سے ہر ایک، α ، β ، γ سے کم ہے۔ اب ضلع α کی

جگہ دو ضلع α_1 ، α_2 رکھو اور اس طرح ن ضلعوں والا ایک کثیر الاضلاع

بناؤ، تب میں $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\pi - \alpha_1} + \frac{1}{\pi - \alpha_2} + \dots + \frac{1}{\pi - \alpha_n}$ میں کو رقبہ بالا میں جمع کرنا ہوگا؛ پس

ن ضلعوں والے کثیر الاضلاع کا رقبہ ہے

$$\frac{1}{2} \times \text{لوئس جب طریس} + \frac{1}{2} \times \text{لوئس} = \frac{1}{2} \times \text{لوئس جب طریس} + \frac{1}{2} \times \text{لوئس}$$

اب ضلع کا کل لو پر لینے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{2} \times \text{لوئس جب طریس} = \frac{1}{2} \times \text{لوئس جب طریس} + \frac{1}{2} \times \text{لوئس جب طریس}$$

پس جملہ بالا جو جاتا ہے

$$\frac{1}{2} \times \text{لوئس جب طریس} + \frac{1}{2} \times \text{لوئس} = \frac{1}{2} \times \text{لوئس جب طریس} + \frac{1}{2} \times \text{لوئس}$$

$$+ \frac{1}{2} \times \text{لوئس جب طریس} = \frac{1}{2} \times \text{لوئس جب طریس}$$

یا $\frac{1}{2} \times \text{لوئس جب طریس}$

جبکہ ر اور س کو ایک سے لے کر ن تک تمام مختلف قیمتیں دی جائیں ایسی کہ $r > s$ ۔

اب ہم ثابت کر چکے ہیں کہ ضابطہ (۱۲) درست ہے جبکہ $n = 3$ اور اس لیے وہ درست ہے جبکہ $n = 4$ ، اور علیٰ ہذا القیاس؛ اس لیے وہ عام طور پر بھی درست ہے خواہ کثیر الاضلاع کے ضلعوں کی تعداد کچھ ہی ہو۔

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ ضابطہ (۱۲) میں $\frac{1}{2} \times \text{لوئس}$ کا سر (۱۰) کی دوسری مساوات کی وجہ سے معدوم ہوتا ہے؛ پس ضابطہ ہو جاتا ہے $\frac{1}{2} \times \text{لوئس جب طریس}$ جان ر اور س ۲ سے ن تک تمام قیمتیں اختیار کرتے ہیں ایسی کہ ہمیشہ $s < r$ ۔

دسویں باب پر مثالیں

ایک مثلث کو ج کے لیے حسب ذیل رشتے از مثال ۱ تا ۱۱

ثابت کرو:-

- (۱) $\text{ا} \text{ب} (\text{ج} - \text{ب}) + \text{ب} \text{ج} (\text{ج} - \text{ا}) + \text{ج} \text{ا} (\text{ب} - \text{ج}) = ۰$
 - (۲) $\text{ا} \text{ج} \text{ا} + \text{ب} \text{ا} \text{ج} + \text{ج} \text{ب} \text{ج} = \text{ا} \text{ب} \text{ج} (۱ + ۲ + ۳) = ۶ \text{ا} \text{ب} \text{ج}$
 - (۳) $\text{ا} \text{ج} \text{ج} + \text{ج} \text{ا} \text{ج} = \frac{\text{ج} + \text{ا}}{۲} \{ \text{ب} + (\text{ج} - \text{ا}) \}$
 - (۴) $\text{ا} \text{ج} \text{ا} \text{ج} ۲ + \text{ب} \text{ج} \text{ب} \text{ج} ۲ + \text{ج} \text{ج} \text{ج} \text{ج} ۲ = ۴ \text{ا} \text{ج} \text{ا} \text{ج} \text{ب} \text{ج} (\text{ا} \text{ج} + \text{ب} \text{ج} + \text{ج} \text{ج}) = ۰$
 - (۵) $\text{ا} \text{ج} ۲ (\text{ب} - \text{ج}) = \text{ب} \text{ا} \text{ج} ۲ \text{ب} + \text{ج} \text{ا} \text{ج} ۲ \text{ج} + ۲ \text{ب} \text{ج} \text{ج} (\text{ج} - \text{ب})$
 - (۶) $\text{ا} \text{ج} (\text{ب} - \text{ج}) + \text{ب} \text{ا} \text{ج} (\text{ج} - \text{ا}) + \text{ج} \text{ا} \text{ج} (\text{ا} - \text{ب}) = ۳ \text{ا} \text{ب} \text{ج}$
 - (۷) $\text{ج} = \text{ا} \text{ج} ۲ \text{ب} + ۳ \text{ا} \text{ب} \text{ج} (۲ - \text{ب} - \text{ا}) + ۲ \text{ا} \text{ب} \text{ج} (\text{ب} - \text{ا})$
 - (۸) $(\text{ا} \text{ج} ۲ - \text{ا} \text{ج} ۲ \text{ب} - \text{ا} \text{ج} ۲ \text{ج}) + (\text{ب} \text{ا} \text{ج} ۲ - \text{ب} \text{ا} \text{ج} ۲ \text{ج} - \text{ب} \text{ا} \text{ج} ۲ \text{ا}) + (\text{ج} \text{ا} \text{ج} ۲ - \text{ج} \text{ا} \text{ج} ۲ \text{ا} - \text{ج} \text{ا} \text{ج} ۲ \text{ب}) = ۰$
 - (۹) $\text{ب} \text{ا} \text{ج} - \text{ج} \text{ا} \text{ج} + \text{ج} \text{ب} \text{ج} = (\text{ا} + ۹۰) = \text{ج} + \text{ا} - ۲ \text{ج} + \text{ج} \text{ب} (\text{ج} + ۹۰)$
 - $= \text{ا} + \text{ب} - ۲ \text{ا} - \text{ا} \text{ج} (\text{ج} + ۹۰)$
- اس نتیجہ کی طرف توجہ فرمائیے۔
- (۱۰) $\text{ا} \text{ج} ۲ \text{ب} + \text{ب} \text{ا} \text{ج} ۲ \text{ج} + \text{ج} \text{ا} \text{ج} ۲ \text{ا} = \text{ج} \text{ب} (\text{ج} + \text{ب} + \text{ا})$
- $= \text{ا} + \text{ج} + \text{ب}$
- (۱۱) $(\text{ا} + \text{ب}) \text{ج} = ۲ \text{ب} \text{ج} (\text{ب} + \text{ج} + \text{ا}) \text{ج} \text{ا} \text{ج}$

(۲۲) اگر ایک متساوی الاضلاع مثلث کے اندر ایک نقطہ ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{جم (ب وج - ۹۰)} = \frac{\text{ب د} + \text{ج د} - \text{ا د}}{۲}$$

(۲۳) - اگر ج = ب + $\frac{۱}{۲}$ اور ب ج نقطہ پر تقسیم ہو ایسا کہ ب د وج

$$۳:۱ \text{ تو ثابت کرو کہ } ۲ ا ج = ۲ د ج$$

(۲۴) اگر ایک مثلث ا ب ج کے قاعدے کے ساتھ خط مستقیم ج د ج ع مساوی زاویے بنائیں تو ثابت کرو کہ

رقبہ ا ب ج : رقبہ ج ع د :: ج : ا ب جب ا م م

(۲۵) اگر ا ب کو نقاط ج د پر تقسیم کیا گیا ہو ایسا کہ ا ج = ج د = د ب اور اگر پ کوئی دوسرا نقطہ ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{جب ا پ د جب ب پ ج} = \text{ج پ ا جب ج پ ب پ د}$$

(۲۶) اگر ایک متساوی الاضلاع کے ضلع ا ب ہوں اور ان کا درمیانی زاویہ سہ ہو تو ثابت کرو کہ دتروں کا حاصل ضرب ہے $\frac{۱}{۲} (ا + ب + د) = ا د ب$ جم سہ

(۲۷) اگر ایک مثلث کے ضلع ب ج کا نقطہ وسطی د ہو اور زاویہ ب ا د = د زاویہ ج ا د = د تو ثابت کرو کہ مم ط = مم ف = مم ب - مم ج

(۲۸) ایک خط مستقیم ایک مثلث کے زاویہ ج کو دو حصوں ع ب میں اور ضلع ج کو دو مقطعوں لا م میں تقسیم کرتا ہے اور اس ضلع کے ساتھ زاویہ ط پر اٹل ہے

ثابت کرو کہ لام ع - لام ب = لام د - لام ب = (لا + ما) مم ط

(۲۹) اگر ایک مثلث کے ضلع سلسلہ حسابیہ میں ہوں اور اگر بڑے سے بڑا زاویہ چھوٹے سے چھوٹے زاویہ سے بقدر ۹۰ کے بڑا ہو تو ثابت کرو کہ ضلعوں میں نسبت

$$ا : ب : ج :: ا : ب : ج$$

(۳۰) ہندسی طور پر ثابت کرو کہ کسی مثلث میں

$$\text{ا جم ط} = \text{ب جم (ج - ط)} + \text{ج جم (ب + ط)}$$

اگر کسی مستوی ذوالرباع الاضلاع کے ضلعوں ا ب ج د کو

ا ب ج سے تعبیر کیا جائے تو ثابت کرو کہ

راویہ ہے۔

(۳۶) بتاؤ کہ کس طرح اقل رقبہ کا قائم الزاویہ مثلث بنایا جاسکتا ہے جس کے راس تین دیے ہوئے متوازی خطوط مستقیم پر واقع ہوں؛ اگر درمیانی خط مستقیم کے فاصلے دوسرے دو خطوں سے 'ا' ب ہوں تو ثابت کرو کہ مثلث کا وتر متوازی خطوں کے ساتھ زاویہ مم $\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$ بناتا ہے۔

(۳۷) ایک مثلث کے ضلعوں کے طول پیمائشوں سے معلوم کیے گئے ہیں، جن میں خفیف سی خطائیں واقع ہوئی ہیں؛ ان طولوں سے مثلث کے زاویوں کا حساب لگانے سے معلوم ہوا کہ زاویے 'ا' ب 'ج' ہیں۔ اگر طولوں میں تقریبی خطائیں 'ع' 'ب' 'ج' ہوں تو ثابت کرو کہ ان کے جواب میں زاویوں کے حاس التماموں کی خطائیں مقداروں

قم ۱ (ب جم ج + ج جم ب - ع) قم ب (ج جم ا + ا جم ج - ب)
قم ج (ع جم ب + ب جم ا - ج)

کے متناسب ہونگی۔

(۳۸) اگر ایک مثلث کے ضلعوں کی پیمائش میں دو ضلعوں 'ا' ب میں چھوٹی خطائیں 'لا' 'ما' واقع ہوں تو زاویہ ج میں خطا ہوگی

- (لا مم ب + ب مم ا)

نیز دوسرے زاویوں کی خطائیں بھی معلوم کرو۔

(۳۹) ایک مثلث کا رقبہ اس کے ضلعوں کے طول ناپ کر معلوم کیا گیا ہے، اور کسی طول کے ناپنے میں ممکن الوقوع خطا کی انتہا خواہ وہ مثبت ہو یا منفی طول کی ن گنا ہے جہاں 'ن' ایک چھوٹی مقدار ہے۔ ثابت کرو کہ اس مثلث کی صورت میں جس کے اضلاع (پیمائش کردہ) '۱۱۰'، '۸۱'، '۵۹' ہیں خطا کی انتہا اس کے رقبہ میں ممکن ہے رقبہ کی تقریباً ۳۳، ۳۱، ۳۲ ن گنا ہے۔

(۴۰) ثابت کرو کہ ایک ذواربعة الاضلاع کے چار زاویوں کی جیوب التمام ج'، ج'، ج'، ج'، رشتہ ذیل کو پورا کرتی ہیں :-

$$\begin{aligned}
 & (ج^۱ + ج^۲ + ج^۳) - (ج^۱ + ج^۲ + ج^۳ + ج^۴ + ج^۵ + ج^۶ + ج^۷ + ج^۸ + ج^۹ + ج^{۱۰}) \\
 & + (ج^۱ + ج^۲ + ج^۳ + ج^۴ + ج^۵ + ج^۶ + ج^۷ + ج^۸ + ج^۹ + ج^{۱۰}) \\
 & + (ج^۱ + ج^۲ + ج^۳ + ج^۴ + ج^۵ + ج^۶ + ج^۷ + ج^۸ + ج^۹ + ج^{۱۰}) = 0
 \end{aligned}$$

گیارہواں باب

(167)

مثلثوں کا حل

۱۳۰۔ اب ہم پچھلے باب کے محصلہ ضابطوں کو مثلثوں کے حل کرنے میں استعمال کر نیچے لیتے اس وقت جب چار اجزا میں سے تین اجزا کی مقداریں دی گئی ہوں جن میں سے کم از کم ایک ضلع ہو تو باقی تین اجزا کی مقداریں معلوم کرنے میں ہم بالعموم ایسے ضابطوں کا انتخاب کریں گے جن کو لوکارتنوں کے ذریعہ عددی حساب لگانے میں استعمال کیا جاسکتا ہے کیونکہ صرف یہی ضابطے عمل میں مفید ہوتے ہیں۔

مثلثوں کا حل زاویوں کے دائری تفاعلوں کی عددی قیمتیں معلوم کرنے کے عمل پر منحصر کیا جاتا ہے، اب چونکہ دائری تفاعل قائم الزاویہ مثلثوں کے ضلعوں کی نسبتیں ہیں اس لیے ظاہر ہے کہ تمام مثلثوں کا حل ان مثلثوں کو قائم الزاویہ مثلثوں میں تقسیم کر کے انجام پاسکتا ہے۔

قائم الزاویہ مثلثوں کا حل

۱۳۱۔ فرض کرو کہ ایک مثلث کا زاویہ ج، ۹۰ ہے، تب یہ زاویہ دئے ہوئے اجزا میں سے ایک ہے اور ہم مثلث کو ان مختلف

صورتوں میں حل کر سکتے ہیں جن میں دوسرے دو اجزاء دیے گئے ہوں اور ان میں سے کم از کم ایک جزو ضلع ہو۔

(۱) فرض کرو کہ دو ضلع 'ا' و 'ب' دیے گئے ہیں؛ تب ضابطہ
 $\text{مس} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sin A}$ سے 'ا' معلوم کیا جاسکتا ہے اور پھر 'ب'، 'ا' کا متم زاویہ
 ہونے کی وجہ سے معلوم ہوتا ہے؛ نیز $\text{ج} = \frac{1}{\sin A} \times \sin B$ سے 'ج' معلوم
 ہوتا ہے جبکہ 'ا' معلوم کر لیا گیا ہو؛ تب اس مثلث کو حل کرنے کے لیے
 نوکارتی ضابطے ہیں

$$\text{ل مس} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sin A} \times \sin B$$

$$\text{ب} = \frac{1}{\sin A} \times \sin B$$

$$\text{لوک ج} = \frac{1}{\sin A} \times \sin B \times \sin C$$

(۲) فرض کرو کہ وتر 'ج' اور ایک ضلع 'ا' دیے گئے ہیں؛ تب
 ضابطہ $\text{جب} = \frac{1}{\sin A} \times \sin B$ کے ذریعہ 'ا' معلوم کیا جاتا ہے؛ 'ب'، 'ا' کا
 متم ہے؛ ضابطہ $\text{ب} = \frac{1}{\sin A} \times \sin B$ سے 'ب' معلوم
 ہوتا ہے۔

نوکارتی ضابطے ہیں

$$\text{ل جب} = \frac{1}{\sin A} \times \sin B \times \sin C$$

$$\text{ب} = \frac{1}{\sin A} \times \sin B$$

$$\text{لوک ب} = \frac{1}{\sin A} \times \sin B \times \sin C$$

$$\text{لوک ب} = \frac{1}{\sin A} \times \sin B \times \sin C$$

(۳) فرض کرو کہ وتر 'ج' اور ایک زاویہ 'ا' دیے گئے ہیں؛ تب
 فوراً 'ا' کے متم کے طور پر معلوم ہوتا ہے؛ ضابطہ $\text{ب} = \frac{1}{\sin A} \times \sin B$ سے
 'ب' معلوم ہوتا ہے اور 'ب' پچھلی صورت کے مانند حاصل ہوتا ہے۔

نوکارتی ضابطے ہیں

$$\text{لوک ل} = \frac{1}{\sin A} \times \sin B \times \sin C$$

$$\text{ب} = \frac{1}{\sin A} \times \sin B$$

لوک ب = لوک ج + ل جم ا - ۱۰۔ ۱
 لوک ب = $\frac{1}{2}$ لوک (ج + ۱) + $\frac{1}{2}$ لوک (ج - ۱)
 (۴) فرض کرو کہ ایک ضلع ۱ اور ایک زاویہ ا دیے گئے ہیں؛
 تب ب ہے ۹۰ - ۱ ج ہے ۱ ق م ۱ اور ب پچھلی دو صورتوں کی مانند
 معلوم ہوتا ہے۔

لوکار تہی ضابطے ہیں

$$\text{لوک ج} = \text{لوک ل} - \text{ل جب ا} + ۱۰۔ ۱$$

$$\text{ب} = ۹۰ - ۱$$

$$\text{لوک ب} = \text{لوک ج} + \text{ل جم ا} - ۱۰۔ ۱$$

$$\text{لوک ب} = \frac{1}{2} \text{لوک (ج + ۱)} + \frac{1}{2} \text{لوک (ج - ۱)}$$

۱۳۲ — بعض صورتوں میں دفعہ سابق کے ضابطے مہولت بخش
 نہیں تھے مثلاً صورت (۲) میں اگر زاویہ ا ۹۰ کے قریب ہو تو اس کو مساوی
 جب ا = $\frac{1}{2}$ سے مہولت کے ساتھ معلوم نہیں کیا جاسکتا کیونکہ متصل
 جیوب کے لیے فرق اس صورت میں ناقابل قدر ہیں اس لیے ہم دوسرا
 ضابطہ استعمال کرتے ہیں؛ دسویں باب کے مسئلہ (۴) سے ہم حاصل
 کرتے ہیں ب م $\frac{1}{2}$ ب = ج - ۱ ب م $\frac{1}{2}$ ب = ج + ۱
 پس م $\frac{1}{2}$ ب = $\frac{\text{ج} - ۱}{\text{ج} + ۱}$ اور اس طرح

$$\text{م} = (۹۵ - ۱) \left(\frac{\text{ج} - ۱}{\text{ج} + ۱} \right)$$

یہ ضابطہ متذکرہ صدر اعراض سے پاک ہوتے کی وجہ سے ا کے معلوم
 کرنے کے لیے استعمال ہو سکتا ہے۔

نیز صورتوں (۳) اور (۴) میں ضابطہ ب = ج جم ا غیر مہولت بخش
 ہے جبکہ ا بہت چھوٹا ہو؛ ایسی صورت میں ہم ضابطہ ب = ج - ج جب ا
 م $\frac{1}{2}$ استعمال کر سکتے ہیں۔

(169)

مس ۱۔ قائم الزاویہ مشکلوں کے حل کے لیے متعدد تقریبی ضابطے معلوم کیے جاسکتے ہیں۔ غرض کہ اگر کوئی زاویہ 'ا' ب کے دائری ناپ کے برابر ہو۔

(۱) ضابطہ ۱ = ج جم ب کی تقریبی شکل ہے

$$ل = ج (۱ - \frac{۱}{۴} ب^۲ + \frac{۱}{۲۴} ب^۴)$$

جو جم ب کو ب کے دائری ناپ کی قوتوں میں پھیلائے سے اور اس پھیلاؤ کی پہلی تین رقیں لینے سے حاصل ہوئی ہے۔ اب یہ ضابطہ 'ا' کو تقریبی طور پر محسوب کرنے کے لئے استعمال ہو سکتا ہے جبکہ ج اور ب دیے گئے ہوں اور یہ بہت بڑا نہ ہو۔

(۲) چونکہ جب ۱ = ج، ہیں حاصل ہوتا ہے

$$ع - \frac{۱}{۴} ع^۲ + \frac{۱}{۱۲۰} ع^۵ = \frac{۱}{ج}، تقریباً$$

مکہ ۱/ج کی رقوم میں حاصل کرنے کے لیے پہلے تقرب کے طور پر ع = ۱/ج لے سکتے ہیں، دوسرے تقرب کے طور پر ع = ۱/ج + {۱/۴} (۱/ج)² اور تیسرے تقرب کے طور پر

$$ع = \frac{۱}{ج} + \frac{۱}{۴} \left\{ \left(\frac{۱}{ج} \right)^۲ + \frac{۱}{ج} \right\} - \frac{۱}{۱۲۰} \left(\frac{۱}{ج} \right)^۵$$

$$یا ع = \frac{۱}{ج} + \frac{۱}{۴} \left(\frac{۱}{ج} \right)^۲ + \frac{۱}{۲۴} \left(\frac{۱}{ج} \right)^۳ - \frac{۱}{۱۲۰} \left(\frac{۱}{ج} \right)^۵$$

جس کو ع کے محسوب کرنے میں استعمال کیا جاسکتا ہے۔

(۳) مساوات ۱ میں ۱/ب = ج (ج - ۱) سے تقریبی ضابطہ

$$\frac{۱}{ب} = ج (ج - ۱) \left\{ ۱ - \frac{۱}{۲} \left(\frac{ج - ۱}{ج + ۱} \right) + \frac{۱}{۵} \left(\frac{ج - ۱}{ج + ۱} \right)^۲ \right\}$$

حاصل ہو سکتا ہے۔

(۴) زاویہ کے دائری ناپ کے بارے میں سنیلین (Snellius) کا

ضابطہ (دیکھو مثال ۳۲ صفحہ ۲۲۲)

$$فہ = \frac{۳ \text{ جب } ۲}{۲ (۲ + ۳)}$$

کو جس میں تقریبی خطا $\frac{۳}{۱۸}$ فہ ہے استعمال کرو اور رکھو $۲ =$ بہ تو ہیں ضابطہ

$$\text{حاصل ہوتا ہے بہ} = \frac{۳}{۲ + ۳} \text{ اور تقریبی خطا ہے } \frac{۱}{۱۸} \text{ بہ}$$

پس ب، اس تقریبی مساوات

$$ب = \frac{۳}{۲ + ۳} \times ۵۷۵۲۹۵۷۷$$

سے درجوں میں مائل ہوتا ہے۔

غیر قائم الزاویہ مثلثوں کا حل

۳۴ — مثلث کو حل کرنا جب تین ضلع دیے جائیں۔

ضابطوں

$$\text{جب } \frac{۱}{۲} = \frac{(س - ب)(س - ج)}{ب ج}$$

$$\text{جم } \frac{۱}{۲} = \frac{س(س - ج)}{ب ج}$$

$$\text{مس } \frac{۱}{۲} = \frac{س(س - ب)}{س(س - ج)}$$

میں سے کوئی ایک ضابطہ مع دیگر زاویوں کے متناظر ضابطوں کے استعمال کیا جاسکتا ہے۔ یہ سب ضابطے نوکار نمی عمل حساب کے لیے موزوں ہیں۔

(170)

مثال

ایک شلت کے ضلع 'م'، 'م'، 'م' کے متناسب ہیں۔ اس کے زاویے معلوم کرو جبکہ حسب ذیل لوکارتم دیے گئے ہوں:—

$$\text{لوک } ۳۰۱۰۳۰ = ۲$$

$$\text{ل مس } ۱۲ = ۳۶۹۳۲۹ = \text{فرق } \alpha \text{ کے لیے } = ۱۰۰۰۵۹۳$$

$$\text{ل مس } ۲۲ = ۵ = ۹۵۶۵۰۲۸۱ = \text{فرق } \beta \text{ کے لیے } = ۱۰۰۰۳۳۹$$

$$\text{چونکہ } \text{س} = ۱۰ - \text{س} = ۶ - \text{س} = ۳ - \text{س} = ۱ - \text{س} \text{ اس لیے}$$

$$\text{مس } \frac{1}{2} = ۱ - \text{س} = ۱ - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ اس طرح}$$

$$\text{ل مس } \frac{1}{2} = ۱ - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (۳۰۱۰۳۰ + ۱) = ۹۵۳۳۹۳۸۵$$

$$\text{اور ل مس } \frac{1}{2} = ۱ + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} (۱ - ۳۰۱۰۳۰) = ۹۵۶۵۰۵۱۵$$

$$۱ \text{ معلوم کرنے کے لیے چونکہ } ۹۵۳۳۹۳۸۵ - ۹۵۶۵۰۵۱۵ = ۱۰۰۰۱۵۶$$

$$\text{اور } ۱۰۰۰۱۵۶ = ۹۵۳۳۹۳۲۹ - ۹۵۳۳۹۳۲۹ = ۱ \text{ اس لیے } \frac{1}{2} = ۱۰۰۰۱۵۶ \text{ یا } ۱۰۰۰۱۵۶ = ۱۰۰ \times \frac{۱۰۰۰۱۵۶}{۱۰۰} = ۱۰۰ \times ۱۰۰۰۱۵۶ = ۱۰۰۰۱۵۶$$

$$\text{ب معلوم کرنے کے لیے چونکہ } ۹۵۶۵۰۵۱۵ - ۹۵۳۳۹۳۲۹ = ۳۲۶۱۸۶$$

$$\text{اور } ۳۲۶۱۸۶ = ۱۰۰ \times \frac{۳۲۶۱۸۶}{۱۰۰} = ۱۰۰ \times ۳۲۶۱۸۶ = ۳۲۶۱۸۶$$

$$\text{ب} = ۱۰۰ - ۳۲۶۱۸۶ = ۶۷۳۸۱۴ = \text{فرق } \alpha \text{ کے لیے } = ۱۰۰ - ۳۲۶۱۸۶ = ۶۷۳۸۱۴ \text{ اس لیے}$$

۳۵۔ شلت حل کرنا جب دو ضلع اور ان کا درمیانی زاویہ

دیے جائیں۔

فرض کرو کہ ب' ج اور ا دیے ہوئے اجزا ہیں تب ب اور ج ضابطہ

$$\text{مس } \frac{1}{2} (\text{ب} - \text{ج}) = \frac{\text{ب} - \text{ج}}{\text{ب} + \text{ج}} \text{ مم } \frac{1}{2}$$

اور ضابطہ $\text{ب} + \text{ج} = ۱۸۰ - \text{ا}$
 سے سین کیے جاسکتے ہیں۔ لوکارٹی ضابطہ ہے
 $\text{ا} \text{ مس } \frac{1}{2} (\text{ب} - \text{ج}) = \text{لوک} (\text{ب} - \text{ج}) - \text{لوک} (\text{ب} + \text{ج}) + \text{ل جم } \frac{1}{2} \text{ا}$
 جب اور ج معلوم کرتے کے بعد ضلع ا ان تین ضابطوں
 $\text{لوک } \frac{1}{2} = \text{لوک } \text{ا} + \text{ل جب } \frac{1}{2} - \text{ل جب } \frac{1}{2} \text{ج}$
 $\text{لوک } \frac{1}{2} + \text{ل جم } \frac{1}{2} (\text{ب} - \text{ج}) = \text{لوک} (\text{ب} + \text{ج}) + \text{ل جب } \frac{1}{2} \text{ا}$
 $\text{لوک } \frac{1}{2} + \text{ل جب } \frac{1}{2} (\text{ب} - \text{ج}) = \text{لوک} (\text{ب} - \text{ج}) + \text{ل جم } \frac{1}{2} \text{ا}$
 میں سے کسی ایک سے معلوم کیا جاسکتا ہے۔
 ہم اگر اس طرح بھی معلوم کر سکتے ہیں: چونکہ $\text{ا} = \text{ب} + \text{ج} - ۲ \text{ ب ج جم } \frac{1}{2}$
 یعنی $\text{ا} = (\text{ب} + \text{ج}) - ۲ \text{ ب ج جم } \frac{1}{2}$
 اس لیے $\text{ا} = (\text{ب} + \text{ج}) \text{ جم فہ } \text{جہاں فہ مساوات}$
 $\text{جب فہ} = \frac{۲ \text{ ب ج جم } \frac{1}{2}}{\text{ب} + \text{ج}}$
 (171) سے معلوم ہوتا ہے۔ اس طرح ہم پہلے فہ کو لوکارٹی ضابطہ
 $\text{ل جب فہ} = \text{لوک } ۲ + \text{لوک } \text{ب} + \text{لوک } \text{ج} - \text{ل جم } \frac{1}{2} \text{ا} - \text{لوک} (\text{ب ج ج})$
 سے معلوم کر سکتے ہیں اور پھر ا کو ضابطہ
 $\text{لوک } \frac{1}{2} = \text{لوک} (\text{ب} + \text{ج}) + \text{ل جم فہ} - ۱۰$
 سے

مثال

اگر $\text{ا} = ۲۳$ ، $\text{ج} = ۳۲۱$ اور $\text{ب} = ۱۶۹$ تو $\text{ا} \text{ ج ب}$ معلوم کر دو۔
 یہ دیا گیا ہے کہ

لوک $\text{ا} = ۹۹$	ل جب $\text{ا} = ۱۶۹$
لوک $\text{ب} = ۱۲۳$	ل جب $\text{ب} = ۳۲۱$
لوک $\text{ج} = ۳۲۱$	ل جم $\text{ا} = ۱۰۵۸۳۱۹۰۱$
لوک $\text{ا} = ۳۲۱$	ل جم $\text{ب} = ۳۲۱$

ہیں حاصل ہوتا ہے

$$ل\text{ مس } \frac{1}{2} (ج - ۲) = ل\text{ مم } ۱۸۰ + ل\text{ کوک } ۹۹ - ل\text{ کوک } ۲۲۲$$

$$۲۱۳۳۶۳۵۳۰ - ۱۵۹۹۵۶۳۵۲ + ۱۰۵۸۳۱۹۰۱ =$$

$$۱۰۵۲۳۲۴۶۲۳ =$$

$$\text{اب } ۱۰۵۲۳۲۴۶۲۳ - ۱۰۲۳۲۴۵۵۲ = ۲۹۰۰۰۱۷۱ \text{ اور } \frac{۱۷۱}{۳۸۵۲۴} =$$

$$۳۵۰ \text{ تقریباً ' اس لیے } \frac{1}{2} (ج - ۲) = ۵۹ \text{ ' } ۲۹۵۵ \text{ ' نیز } \frac{1}{2} (ج + ۱) = ۴۲۵ =$$

$$\text{اس لیے } ۱۵ = ۲۲ \text{ ' } ۵۹۵۵ \text{ ' ج } = ۱۳۵ \text{ ' } ۲۵۵ =$$

$$\text{نیز کوک پ } = ۹۵۸۹۱۹۷۸ + ۲۰۸۹۹۰۵۱ - ل\text{ جب } ۱۵ \text{ ' } ۲۲۵۵ =$$

$$\text{اور } ۹۵۸۹۱۹۷۸ \times ۵۶۵۵ = ۵۴۳۰۱۵۵ = ل\text{ لیے جب } ۱۵ \text{ ' } ۲۲۵۵ = ۹۵۸۹۱۹۷۸$$

$$\text{اس لیے کوک پ } = ۲۵۳۴۳۵۱۴ = \text{یعنی پ } = ۲۲۲ - \frac{۱۷۱}{۱۹۵۶} = ۲۲۱.۵۹۹۲$$

۱۳۶ — مثلث کو حل کرنا جبکہ دو ضلع اور ان میں سے

ایک کے مقابل کا زاویہ دیے جائیں۔

یہ بالعموم مبہم صورت کے طور پر مشہور ہے۔

فرض کرو کہ 'ا' کو 'ج' اور 'ا' دیے ہوئے اجزاء ہیں تو جب ج مساوی
 جب ج = ج جب اسے متعین ہوتا ہے؛ جب ج کو اس طرح معلوم کرنے
 کے بعد اگر ج = ۱۲ تو ج کی بالعموم دو قیمتیں ۸۰ سے کم ایک حادہ
 اور دوسری منفرجہ ہونگی جن کی جیب حاصل کردہ جیب کے مساوی ہوگی؛
 پس ہمیں تین صورتوں پر غور کرنا چاہیے۔

(۱) اگر ج = ۱ تو ج جب ج = ۱ جو ناممکن ہے اور اس
 حقیقت کا اظہار کرتا ہے کہ کوئی مثلث ایسا نہیں ہے جو دیے ہوئے
 اجزاء رکھتا ہو۔

(۲) اگر ج = ۱ تو ج جب ج = ۱ اور اس لیے ج کی صرف ایک
 قیمت ۹۰ ہے۔ اگر ۹۰ > ۹۰ تو دیے ہوئے اجزاء کے ساتھ ایک مثلث
 موجود ہوگا اور یہ مثلث قائم الزاویہ مثلث ہوگا۔ لیکن اگر ۹۰ < ۹۰ تو ج کی قیمت

(172)

ناقابل قبول ہوگی اور کوئی مثلث دیے ہوئے اجزاء کے ساتھ موجود نہ ہوگا۔
(۳) اگر ج جب ۱ > ۱ تو ج ج > ۱ اور اس لیے ج کی قیمتیں
ہیں ایک حادثہ اور ایک منفرد، پس
(۴) اگر ج > ۱ تو ہمیں حاصل ہونا چاہیے ج > ۱ اس لیے ج
حادثہ ہونا چاہیے، اس طرح دیے ہوئے اجزاء کے ساتھ صرف ایک مثلث
موجود ہوگا؛

(۵) اگر ج = ۱ تو ج کا حادثہ ہونا ضروری نہیں ہے اور اس کی
دونوں قیمتیں قابل قبول ہیں بشرطیکہ ۱ > ۱؛ لیکن اگر ۱ < ۱ تو دونوں
قیمتیں ناقابل قبول ہیں کیونکہ ج < ۱۔ اس لیے دیے ہوئے اجزاء کے ساتھ
دو مثلث ہونگے اگر ۱ > ۱ اور کوئی مثلث نہ ہوگا اگر ۱ < ۱؛
(۶) اگر ج = ۱ تو ج = ۱ یا ۱۸۰۔ ۱؛ ج کی قیمت ۱۸۰۔ ۱ کے لیے
مثلث کے دو ضلع ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں اس لیے ایسی صورت
میں مثلث موجود نہ ہوگا، اس طرح ج کی صرف پہلی قیمت یعنی ۱ رہ جاتی ہے
جس سے محدود رقبہ کا ایک مثلث ملے گا بشرطیکہ ۱ > ۱۔

ہم نتائج حاصلہ بالا کو اس طرح بیان کر سکتے ہیں۔

اگر ج جب ۱ < ۱، کوئی حل نہیں
ج جب ۱ = ۱، ۱ > ۱، ایک حل
ج جب ۱ = ۱، ۱ < ۱، کوئی حل نہیں
ج جب ۱ > ۱، ۱ > ۱، ایک حل
ج جب ۱ = ۱، ۱ > ۱، ایک حل
ج جب ۱ = ۱، ۱ < ۱، کوئی حل نہیں
ج جب ۱ < ۱، ۱ > ۱، دو حل
ج جب ۱ < ۱، ۱ < ۱، کوئی حل نہیں

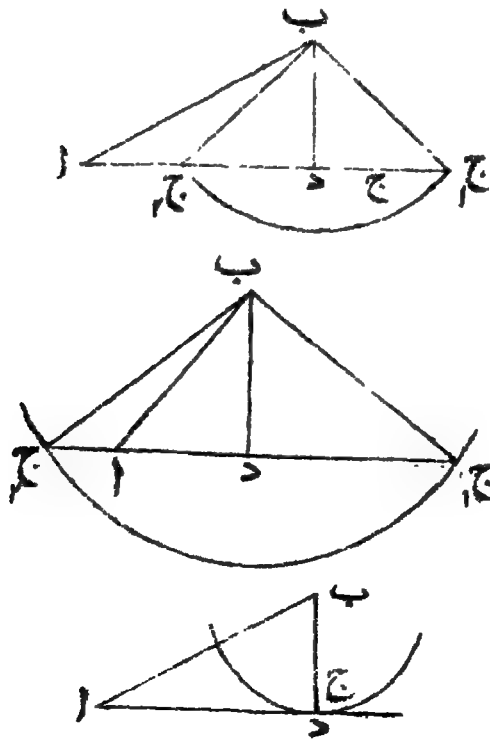
اگر ج ۱ کے قریب ہو تو اس کو اس کی جیب کے ذریعہ صحیح طور پر
معلوم نہیں کیا جاسکتا، ایسی صورت میں ضابطوں

$$\text{مس ج} = \pm \frac{\text{ج جب ا}}{1 + (\text{ج جب ا}) (\text{ا ج جب ا})} \text{ مس } (\frac{1}{\text{ج}} + \frac{1}{\text{ا}}) = \pm \frac{1 + \text{ج جب ا}}{1 - \text{ج جب ا}}$$

میں سے کوئی ایک استعمال ہو سکتا ہے۔
۱۳۶۔ دفعہ ماضی میں جن مختلف صورتوں پر بحث کی گئی ہے ان کی تحقیق ہندسی طور پر کرنا سبق آموز ہو گا۔

ضلع ب پر ب سے عمود ب د کھینچو؛ تب ب د = ج جب ا،
ب کو مرکز اور ا کو نصف قطر مان کر ایک دائرہ کھینچو؛ تب اگر
ا ج جب ا تو یہ دائرہ ضلع ا ج کو قطع نہیں کرے گا اور اس لیے
دیے ہوئے اجزائے ساتھ کوئی مثلث نہیں کھینچا جاسکتا؛ لیکن اگر
ا ج جب ا تو یہ دائرہ ضلع ا ج کو دو نقطوں ج اور ج پر قطع کرتا ہے۔
اگر ا ج اور ا ج:۹ تو ج اور ج دونوں ا کی ایک ہی جانب ہیں
(دیکھو شکل (۱۱)) اور دو مثلثیں ا ب ج اور ا ب ج میں سے ہر ایک

(178)



دیے ہوئے اجزاء لکھا ہے: زاویے A ، B اور C ، B متکم ہیں اگر $A < 90^\circ$ تو A کے پرے بنیگا اور کوئی مثلث دیے ہوئے اجزاء کے ساتھ موجود نہ ہوگا۔ اگر $A > 90^\circ$ تو A کی مقابل بنائیں، پھر ہونگے اور صرف مثلث ABC میں دیے ہوئے اجزاء ہونگے اس آخری صورت میں مثلث ABC میں A پر کا زاویہ A کے مساوی نہیں ہوگا بلکہ $180^\circ - A$ کے، اور اس لیے دی ہوئی شرطوں کو پورا نہیں کریں گے۔

اگر $A = 90^\circ$ جب A تو دائرہ A کو نقطہ C پر مس کریں گے اور قائم الزاؤ مثلث ABC مطلوبہ مثلث ہوگا جس میں دیے ہوئے اجزاء ہونگے بشرطیکہ $A > 90^\circ$ ۔

یہ قابل ذکر ہے کہ چونکہ (شکل (۱۱))

$\Delta = 90^\circ$ ، $C = 90^\circ$ اور $B = 90^\circ$ ، $A = 90^\circ$ جب A اس لیے B کی دو قیمتیں یہ ہیں۔

$C = 90^\circ$ ، $A = 90^\circ$ اور $B = 90^\circ$ ، $A = 90^\circ$ جب A یہ قیمتیں دونوں مثبت ہونگی جبکہ دو حل ہوں؛ B کی ان دو قیمتوں کو ہم حسب ذیل B کی دو درجی مساوات سے بھی حاصل کر سکتے ہیں۔

$$A = 90^\circ - B \quad B = 90^\circ - C$$

۱۳۸۔ مثلث کو حل کرنا جبکہ ایک ضلع اور دو زاویے دیے جائیں۔

فرض کرو کہ دیا ہوا ضلع a ہے اور دیے ہوئے زاویے A ، B ؛ تب مساوات $B = 180^\circ - A - C$ سے B کا تین ہوتا ہے اور ضابطوں

تغیر نہ کئے ہوں تو شلثوں کے حل کے لئے مسب ذیل تقریبی ضابطے حاصل ہوتے ہیں۔
(۱) فرض کرو کہ 'ا'، 'ج'، 'د' دیے گئے ہیں اور ج بڑا نہیں ہے، تب ضابطہ

$$ج = \frac{ا \text{ جب } ج}{جب} \text{ سے ہیں یہ تقریبی ضابطہ}$$

$$ج = ا \text{ تم } ا \{ ج - \frac{۱}{۴} ج + \frac{۱}{۱۲} ج - \frac{۱}{۱۲۰} ج + \dots \}$$

ملاحظہ ہے۔ نیز اگر 'ا'، 'ج' دونوں بڑے نہ ہوں تو

$$ج = \frac{ا (ج - \frac{۱}{۴} ج + \frac{۱}{۱۲} ج - \frac{۱}{۱۲۰} ج + \dots)}{ج - \frac{۱}{۴} ج + \frac{۱}{۱۲} ج - \frac{۱}{۱۲۰} ج + \dots}$$

$$پس ج = ا \frac{ج}{ج} \{ ۱ + \frac{۱}{۴} (ج - ج) + \dots \}$$

سے یہ تقریبی طور پر حاصل ہوتا ہے اور اس کو ج کے محسوب کرنے کے لیے استعمال کیا جاسکتا ہے۔

(۲) فرض کرو کہ 'ا'، 'ج'، 'د' حسب سابق دیے گئے ہیں؛ نیز فرض کرو کہ ج تقریباً ۹۰ ہے تب ج = $\frac{ا \text{ جب } ج}{جب}$ ؛ اس لیے جملہ ج = $\frac{ا}{جب}$

(۱-ا) $\frac{۱}{۴} ج + \frac{۱}{۱۲} ج$ ج کو تقریبی طور پر متعین کرنے کے لیے استعمال ہو سکتا ہے۔

اگر 'ا' اور ج دونوں ۹۰ کے قریب ہوں تو

$$ج = \frac{ا \text{ جب } ج}{ج} \text{ یا } ج = \frac{ا (۱ - \frac{۱}{۴} ج + \frac{۱}{۱۲} ج - \frac{۱}{۱۲۰} ج + \dots)}{۱ - \frac{۱}{۴} ج + \frac{۱}{۱۲} ج - \frac{۱}{۱۲۰} ج + \dots}$$

$$اس لیے ج = ا \{ ۱ - \frac{۱}{۴} (ج - ج) + \dots \}$$

سے ج تقریبی طور پر حاصل ہوتا ہے۔

۴۰۔ اب ہم مثلثوں کے حل کی چند مثالیں دینگے جبکہ ضلعوں اور زاویوں کی بجائے دوسرے مفروضات ہوں۔

(۱) فرض کرو کہ راسوں سے مقابل کے ضلعوں پر کھینچے ہوئے

عمود دیے گئے ہیں، ان کو 'ع'، 'ع'، 'ع' سے تعبیر کرو، تب

$$ا \times ع = ب \times ع = ج \times ع = مثلث کے رقبہ کا دو چند۔ اب چونکہ$$

$$جم = \frac{س(س-ا)}{ب \times ج} = ۱ \frac{۱}{۲}$$

$$اس لیے \quad جم = \frac{(ع \times ع + ع \times ع + ع \times ع) - (ع \times ع + ع \times ع + ع \times ع)}{ع \times ع} = ۱ \frac{۱}{۲}$$

اس سے ا معلوم ہوتا ہے۔ نیز ع = ج جب ا، اس لیے ا معلوم ہونے کے بعد ج معلوم ہوتا ہے۔

(۲) فرض کرو کہ مثلث کے زاویے اور اس کا گھیرا دیے گئے ہیں۔ تب

$$س = س (جب ا + جب ب + جب ج)$$

پس م معلوم ہوتا ہے اور پھر اضلاع بالترتیب

$$۲ م جب ا، ۲ م جب ب، ۲ م جب ج$$

$$۱ = \frac{۲ س جب ا}{جب ا + جب ب + جب ج} \quad \text{کے مساوی ہیں یا}$$

مع ب اور ج کی تناظر قیمتوں کے۔ ا کی یہ قیمت

$$س جب ا \frac{۱}{۲} \quad جم = \frac{۱}{۲} ب \frac{۱}{۲} ج$$

میں تبدیل ہوتی ہے جو لو کا زنی عمل حساب کے لیے موزوں ہے۔

(۳) فرض کرو کہ قاعدہ، ارتفاع، اور قاعدے پر کے زاویوں کا فرق دیے گئے ہیں۔ فرض کرو کہ قاعدہ ۱ ہے، ارتفاع ع، اور دیا ہوا قسب ج۔ تب

چونکہ $ج + ج = ۱۸۰ - ۱$ ، اس لیے $ب = ۹۰ + ع - \frac{۱}{۲}$ ، $ج = ۹۰ - ع - \frac{۱}{۲}$ ، نیز $۱ = ع (مجم + م ج) = ع \{مس (۱ - ع) + مس (\frac{۱}{۲} + ع)\}$

اس لیے $\frac{۱}{ع} = \frac{۲ جب ۱}{جم ۱ + جم ۲ ع}$ ، پس دو درجی مساوات

$$۱ (جم ۱ + جم ۲ ع) = ۲ ع (۱ - ع) \quad (۱ - جم ۱۲)$$

یا $جم ۱ (۱ + ع) + ۲ (جم ۲ ع) = ۲ ع (۱ - ع) - ۱ جم ۲ ع$

سے جم ۱ حاصل ہوتا ہے۔ اس دو درجی کا حل ہے

$$جم ۱ = \frac{۱}{۲} \pm \frac{۱ جم ۲ ع}{۱ + ع} \pm \frac{ع (۲ ع + ۱ جم ۲ ع)}{۱ + ع}$$

اس طرح جم ۱ کی دو قیمتیں، مسئلہ کے دو حل کے جواب میں، حاصل ہوتی ہیں۔ معطیات ذیل سے مثلث کو حل کرو:-

(۴) ج، ۱، ب

(۵) ب، ۱، ج

(۶) رقبہ اور زاویے

(۷) ج، ۱، ج + ۱

(۸) زاویے اور ارتفاع

کثیر الاضلاعوں کا حل

۱۴۱۔ کارنٹ، لہولیر، لیکسل اور دیگر علماء ریاضی نے ان رشتوں پر جو کثیر الاضلاعوں کے ضلعوں اور زاویوں کے درمیان پائے جاتے ہیں اور ان طریقوں پر بحث کی ہے جو کثیر الاضلاع کو حل کرنے کے لیے ہیں جبکہ ضلعوں اور زاویوں کی کچھ تعداد دی گئی ہو علم کثیر الاضلاع (polygonometry) کے دو بنیادی ضابطے دفعہ ۱۲ میں بیان کیے جا چکے ہیں۔

ن ضلعوں والے کثیر الاضلاع کی تعیین کے لیے اس کے ۲ ن اجزاء میں سے (۲-ن) اجزاء دیے جانے چاہئیں جن میں سے کم از کم (ن-۲) اضلاع ہونے چاہئیں۔ اس کو ثابت کرنے کے لیے فرض کر دو کہ کثیر الاضلاع کو ایک وتر کے ذریعہ ایک مثلث اور (ن-۱) ضلعوں والے ایک کثیر الاضلاع میں تقسیم کیا گیا ہے؛ اگر اس آخری کثیر الاضلاع کے ضلعوں اور زاویوں کی تعیین ہو جاتی تو چونکہ مثلث کا ایک ضلع اس کثیر الاضلاع کے ایک ضلع کے طور پر معلوم ہو چکا ہوتا تھا مثلث کے صرف دو اجزاء کا معلوم ہونا درکار ہوتا تھا کہ ن ضلعوں والے کثیر الاضلاع کی یوری طرح تعیین ہو جائے؛ پس ن ضلعوں والے ایک کثیر الاضلاع کی تعیین کے لیے ن-۱ ضلعوں والے ایک کثیر الاضلاع کی تعیین کی نسبت دو اور اجزاء معلوم ہونا چاہئے۔ اب چونکہ کثیر الاضلاع کی سادہ ترین شکل ایک مثلث ہے اور مثلث کی تعیین کے لیے اس کے تین اجزاء معلوم ہونا چاہئے جن میں سے ایک

Carnot, geometrie der Stellung

۱۰

L' Huilier, Polygonometrie. Geneva . 1789

۱۲

Lexell, Nou. comm. Petrop. vola. xix. xx

۱۳

ضلع ہو اس لیے ان ضلعوں کے لیے ایک کثیر الاضلاع کی تقیین کے لیے
 ۲+۳ (ن-۳) یعنی (۲-ن) اجزاء دیے جانے چاہئیں۔ ان (۲-ن) اجزاء میں سے اگر صرف (۲-ن) ضلع ہوں تو ان زاویے دیے جائیں گے
 لیکن اگر (۱-ن) زاویے دیے گئے ہوں تو ان زاویہ معلوم ہو سکتا ہے
 اس لیے گو یا صرف (۲-ن) غیر تابع اجزاء دیے گئے ہیں اور یہ ناکافی ہیں۔ اس لیے
 کل اجزاء میں سے کم از کم (۲-ن) اجزاء ضلع ہونے چاہئیں۔
 بعض صورتوں میں کثیر الاضلاع کو دتروں کے ذریعہ مثلثوں
 میں تقسیم کر کے اس کو آسانی سے حل کیا جاسکتا ہے؛ اس میں دتروں
 کو محسوب کرنا پڑتا ہے؛ تاہم یہ طریقہ ہمیشہ سہولت بخش نہیں ہوتا جیسا کہ
 ایک ذوارقۃ الاضلاع کی صورت پر غور کرنے سے معلوم ہو سکتا ہے جبکہ اس
 کے تین زاویے اور دو متقابلہ ضلع دیے گئے ہوں۔

۱۴۲۔ ن ضلعی کثیر الاضلاع حل کرنا جبکہ (ن-۱)

ضلع اور (ن-۲) زاویے دیے جائیں۔
 (۱) فرض کرو کہ معلوم شدنی زاویے معلوم شدنی ضلع کے متصل
 ہیں۔ ہم دفعہ ۱۲ کے مطابق ضلعوں کے درمیان خارجہ زاویوں کی
 بجائے ہم، ہم، ہم، ہم، ہم، ہم استعمال کریں گے؛ فرض کرو کہ ضلع l_1 معلوم
 شدنی ہے، تب دفعہ ۱۲ کی مساواتوں (۱۰) میں سے دوسری
 مساوات کی رو سے

$$\begin{aligned} \text{جب ہم } \{ l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_n + (l_1 + l_2 + \dots + l_n) + (l_1 + l_2 + \dots + l_n) \} \\ = \text{جم ہم } \{ l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_n + (l_1 + l_2 + \dots + l_n) + (l_1 + l_2 + \dots + l_n) \} \\ \text{پس مس یہ } \{ l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_n + (l_1 + l_2 + \dots + l_n) + (l_1 + l_2 + \dots + l_n) \} \\ \text{۱} + l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_n + (l_1 + l_2 + \dots + l_n) + (l_1 + l_2 + \dots + l_n) \} \end{aligned}$$

اس سے β دیے ہوئے زاویوں $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ اور دیے ہوئے ضلعوں $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ کی رقوم میں معلوم ہوتا ہے؛ یہ مشاہدہ طلب ہے کہ یہ مساوات غیر معلوم ضلع کے عمود پر ضلعوں کا نکل لینے سے حاصل کی گئی ہے؛ باقی زاویہ β_n رشتہ $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n = 2\pi$ سے معلوم ہوتا ہے۔

β اور β_n معلوم کرنے کے بعد ضلعوں کا α پر نکل لینے سے جو مساوات

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n)$$

حاصل ہوتی ہے اس سے α کی تعیین ہو سکتی ہے یا دفعہ ۱۲۸ کی مساوات (۱۱) کی مدد سے جس میں α کو دوسرے ضلعوں کے مربعوں اور ضلعوں اور ضلعوں کے درمیانی زاویوں کی جیوب التمام کے حاصل ضربوں کی رقوم میں بیان کیا گیا ہے۔

(۲) فرض کرو کہ معلوم شدنی زاویے ایک دوسرے کے متصل ہیں مگر معلوم شدنی ضلع کے متصل نہیں ہیں۔ فرض کرو کہ α معلوم شدنی ضلع ہے اور $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ معلوم شدنی زاویے۔

تب $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n = 2\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n)$ اس طرح $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n$ معلوم ہوتا ہے؛ نیز مساواتوں (۱۰) میں سے دوسری مساوات کی رو سے

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \cos \beta_1 + \alpha_2 \cos \beta_2 + \dots + \alpha_n \cos \beta_n = \alpha \cos \beta \\ & \alpha_1 \cos \beta_1 + \alpha_2 \cos \beta_2 + \dots + \alpha_n \cos \beta_n = \alpha \cos \beta \\ & \alpha_1 \cos \beta_1 + \alpha_2 \cos \beta_2 + \dots + \alpha_n \cos \beta_n = \alpha \cos \beta \end{aligned}$$

پس $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n$ معلوم ہو سکتا ہے اور اس لیے β ۔

اس کے بعد ضلع Δ حسب دفعہ سابق معلوم کیا جاسکتا ہے۔

(۳) اُس صورت میں جبکہ دو غیر معلوم زاویے ایک دوسرے کے متصل نہ ہوں فرض کرو کہ Δ وہ Δ اس میں جن پر کہ زاویے غیر معلوم ہیں، Δ کو Δ تو کثیر الاضلاع دو کثیر الاضلاعوں میں تقسیم ہو جاتا ہے جن میں سے ایک میں تمام ضلع سوائے ایک کے اور تمام زاویے سوائے اُن دو زاویوں کے معلوم ہیں جو غیر معلوم ضلع کے متصل ہیں۔ اس سے ہم اس کثیر الاضلاع کو (۱) کی بموجب Δ اور Δ پر کہ زاویوں کو متعین کر کے حل کر سکتے ہیں۔

دوسرے کثیر الاضلاع میں تمام ضلع سوائے ایک کے اور تمام زاویے سوائے دو متصل زاویوں کے معلوم ہیں؛ اس لئے اس کثیر الاضلاع کو (۲) کی بموجب حل کہا جاسکتا ہے۔ اس طرح دیے ہوئے کثیر الاضلاع کے سب ضلع معلوم ہوتے ہیں اور Δ پر کہ زاویے اُن دھوں کو جمع کرنے سے حاصل ہوتے ہیں جن میں وہ Δ سے تقسیم ہوئے تھے اور جو علیحدہ علیحدہ معلوم ہو چکے ہیں۔

۱۳۳۔ ن ضلعی کثیر الاضلاع کو حل کرنا جبکہ (ن-۲)

ضلع اور (ن-۱) زاویے دیے جائیں۔

$$\text{ہم رشتہ} \quad ۲ + ۴ + \dots + ۲۲ = ۳۲$$

سے فوراً باقی زاویہ معلوم کر لیتے ہیں۔

غیر معلوم ضلع کو معلوم کرنے کے لئے مساوات

$$۱ \text{ جب } ۲ + ۱ \text{ جب } (۲ + ۴ + \dots + ۲۲) \times \text{جب } (۲ + ۴ + \dots + ۲۲) = ۳۲$$

کو استعمال کر دو دوسرے غیر معلوم ضلع Δ کے عمود پر نقل لینے سے حاصل ہوئی ہے۔ پھر ہم Δ کو اسی طرح معلوم کر سکتے ہیں یا دوسری بنیادی مساوات استعمال کر سکتے ہیں۔

۱۳۴۔ ن ضلعی کثیر الاضلاع کو حل کرنا جبکہ ن ضلع اور (ن-۳)

زاویے دیے جائیں۔

فرض کرو کہ F ، Q ، S وہ راس ہیں جن پر کے زاوے نہیں دئے گئے ہیں، FQ ، QS ، FS کو ملاؤ تو کثیر الاضلاع چار حصوں میں تقسیم ہوتا ہے جن میں سے ایک مثلث ہے۔ FQS کے سوا ہر حصہ میں تمام اضلاع سوائے ایک کے اور تمام زاویے سوائے اُن دو زاویوں کے دئے گئے ہیں جو اِن غیر معلوم ضلعوں کے متصل ہیں؛ اس لئے ہم FQ ، QS ، FS اور F ، Q ، S پر کے زاویوں کو معلوم کر سکتے ہیں۔ پھر مثلث FQS پر کے زاوے معلوم کئے جا سکتے ہیں کیونکہ اس کے ضلع معلوم ہو چکے ہیں۔ اب ہم F ، Q ، S پر کے زاویوں کو جمع کر کے دئے ہوئے کثیر الاضلاع کے مطلوبہ زاویے حاصل کر لیتے ہیں۔

بلندیاں اور فاصلے

۱۴۵۔ اب ہم بلندیوں اور فاصلوں کی تعین پر مثلثوں کے حل کے اطلاقات کی چند مثالیں دینگے۔ اس مضمون پر زیادہ مکمل معلومات کے لیے مثلاً زاویوں کی پیمائش میں استعمال ہونے والے آلات کے بیان وغیرہ کے لیے پیمائش (Surveying) پر لکھی ہوئی کتابوں کا مطالعہ کرنا چاہیے۔ وہ خط مستقیم جو مقام مشاہدہ کو کسی شے سے ملاتا ہے افق کے ساتھ ایک زاویہ بنائیگا، اس زاویہ کو شے کا زاویہ ارتفاع کہتے ہیں اگر شے مذکور افق کے اوپر ہو اور زاویہ نشیب اگر وہ افق کے نیچے ہو۔

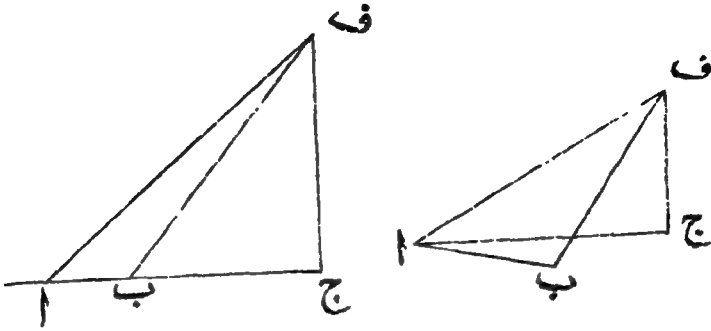
۱۴۶۔ افقی مستوی کے اوپر ایک ایسے نقطہ کی بلندی

(179)

معلوم کرنا جہاں تک رسائی نہیں ہو سکتی۔

فرض کرو کہ یہ نقطہ F ہے اور اس کا ظل افقی مستوی پر J ہے، فرض کرو کہ $FJ = f$ اور اس افقی مستوی پر کوئی خط AB = البشروط امکان ایسا منتخب کیا گیا ہے کہ AB ج ایک خط مستقیم ہے،

فرض کرو کہ ا اور ب پر ف کے زوایائے ارتفاع پیمائش کیے گئے ہیں؛



ان کو 'ف' سے تعبیر کرو۔ تب $ا = ج - ب$ اور $ف = (ج - ب) \times ف$ اس لیے

$$ف = \frac{ا \times ج - ب}{ج - ب}$$

جس سے 'ف' معلوم ہوتا ہے۔ اگر قاعدہ کے خط کو ٹھیک ٹھیک 'ج' کی سمت میں ناپنا ناممکن العمل ہو تو فرض کرو کہ اس کو کسی اور سمت میں ناپا گیا ہے، اہر ف کے زاویے ارتفاع پیمائش اور نیز زاویوں 'ف' 'ا' 'ب' (= 'ج') اور 'ف' 'ا' (= 'ج') کی پیمائش کرو۔

$$تب ف = ا = ا \times \frac{ج - ب}{ج - ب} اور ف = ا \times ف = ج - ب$$

$$ف = \frac{ا \times ج - ب}{ج - ب}$$

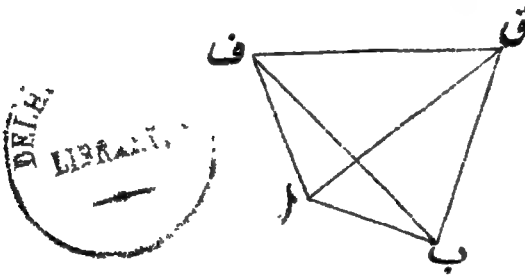
اس سے 'ف' معلوم ہوتا ہے۔

۴۱۔ ناقابل رسائی و نقطوں کے درمیان

فاصلہ معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ یہ دو نقطے ف اور ق ہیں اور فرض کرو کہ کوئی قاعدہ کا خط اب (= ا) ناپا گیا ہے، نقطوں ا اور ب کو اس طرح منتخب کیا جاتا ہے کہ ف اور ق دونوں ان میں سے ہر نقطہ سے نظر آ سکتے ہیں۔ آپ (180) ص ب ذیل تین زاویے پیمائش کرو۔

ف ا ق = ع، ق ا ب = ب، ف ا ب = ج؛



یہ مشاہدہ طلب ہے کہ زاویے ف ا ق اور ق ا ب بالعموم ایک ہی مستوی میں نہیں ہوتے۔ ب پر زاویے ف ب ا (= ضہ) اور ق ب ا (= صہ) پیمائش کرو۔

مثلثوں ا ب ف اور ا ب ق سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$ا ف = ا \frac{\text{جب ضہ}}{\text{جب (جہ + ضہ)}}$$

اور ا ق = ا \frac{\text{جب صہ}}{\text{جب (بہ + صہ)}} پس ا ف اور ا ق ان ضابطوں سے

حاصل ہوتے ہیں:-

$$\text{لوک ا ف} = \text{لوک ا} + \text{ل جب ضہ} - \text{ل جب (جہ + ضہ)}$$

$$\text{لوک ا ق} = \text{لوک ا} + \text{ل جب صہ} - \text{ل جب (بہ + صہ)}$$

ہیں مثلث ف ا ق میں ا ف، ا ق اور زاویہ ف ا ق = ع معلوم

اس لیے ہم ضابطوں

ل (س) + (افق - ا ق ف) = ل عم + ع + نوک (اق - اف)
 - نوک (اق + اف)

اف ق + ا ق ف = ۱۸۰ - ع

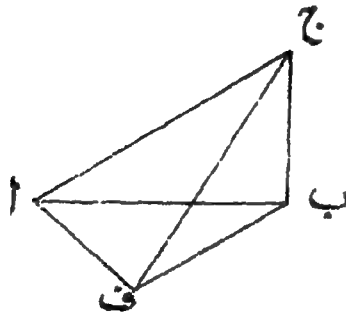
نہاویہ اف ق اور ا ق ف معلوم کرتے ہیں۔ پھر ضابطہ

نوک ف ق = نوک اف + ل جب ع - ل جب ا ق ف

کے ذریعہ ف ق معلوم ہوتا ہے۔

۱۴۸ — پوتھنٹ (Potherot) کا مسئلہ — ایک

مثلث کے مستوی ہیں وہ نقطہ معلوم کرنا جس پر مثلث کے ضلعوں کے
 محاذی دیے ہوئے نہاویہ بنیں۔



فرض کرو کہ ع، پر وہ زاویے ہیں جو مثلث ا ب ج کے ضلعوں
 ا ج ب کے محاذی نقطہ ف پر بنتے ہیں؛ فرض کرو کہ زاویوں
 ا ج ب ج کے محاذی ترتیب لا، ا سے تعبیر کیا گیا ہے؛

ف کا محل معلوم ہو جاتا ہے اگر زاویے لا اور ما معلوم ہو جائیں کیونکہ
مثلثوں ف ا ج، ف ب ج کو حل کرنے سے ف ا اور ف ب
معلوم کیے جاسکتے ہیں۔
یہیں حاصل ہوتا ہے

$$لا + ا = ۱۲۰ - ع - ب - ج$$

$$\text{نیز} \quad \frac{\text{ب جب لا}}{\text{ج جب ع}} = \frac{\text{ا جب ما}}{\text{ف جب ب}}$$

ایک امدادی زاویہ ف ا ب لو ایسا کہ

$$\text{مس ف} = \frac{\text{ا جب ع}}{\text{ب جب ب}}$$

$$\text{اس لیے} \quad \frac{\text{ج جب لا}}{\text{ب جب ا}} = \text{مس ف، پس} \quad \frac{\text{ج جب لا}}{\text{ب جب لا + ج ب ا}} = \text{مس (ف - ع)} \quad (۱)$$

$$\text{یا} \quad \text{مس} \frac{۱}{۲} (لا - ا) = \text{مس} \frac{۱}{۲} (لا + ا) \quad \text{مس (ف - ع)} \quad (۲)$$

$$= \text{مس (د۰ - ف)} \quad \text{مس} \frac{۱}{۲} (ع + ب + ج)$$

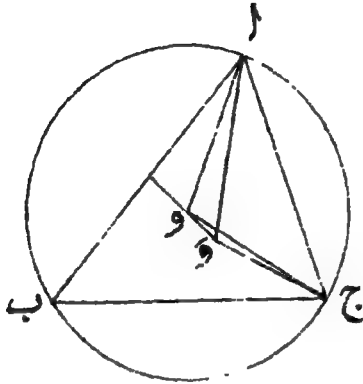
اس طرح لا - ما معلوم کیا جاسکتا ہے اور چونکہ لا + ما معلوم ہے اس لیے
لا اور ما معلوم ہو سکتے ہیں۔

مثالیں

(۱) افق مستوی میں ایک مثلث ا ب ج کے راسوں ا ب ج
میں سے ہر راس پر ایک پہاڑ کی چوٹی کا ارتفاع نہ دکھائی دیتا ہے
ثابت کرو کہ پہاڑ کی بلندی $\frac{۱}{۲}$ و مس ع فم (اسے نیز اگر ج پر کے ارتفاع میں
چھوٹی خطان واقع ہو تو بتاؤ کہ اصل بلندی بہت تقریبی طور پر ہے

$$\frac{۱}{۲} \text{ و مس ع} (۱ + \frac{\text{ج جب ا}}{\text{ب جب ب}} + \frac{\text{ج جب ا}}{\text{ب جب ب}})$$

فرض کرو کہ پہاڑ کی چوٹی کا ظل مستوی ا ب ج پر دہے تب اگر پہاڑ



کی بلندی ف ہو تو $ق = و ا$ مس $ع = و ب$ مس $ع = و ج$ مس $ع$ ؛
اس لیے $و$ ، ا ب ج کے حائلہ دائرہ کا مرکز ہے، پس $و ا = و ب = و ج$ ،
یا $ف = و$ اس $ع$ ق م ۱۔ اگر ج پر کے ارتفاع کی پائیش $ع + و$ ہو تو فرض
کرو کہ $و$ ، پہاڑ کی چوٹی کا ظل ہے، تب چونکہ $ا$ اور $ب$ پر کے ارتفاع مساوی
ہیں اس لیے $و$ ، $ا ب$ پر عمود ہے، اب فرض کرو کہ پہاڑ کی بلندی
 $ف + لا$ ہے۔ ہندسی طور پر حاصل ہوتا ہے

$$ق ا = و ا + و ج$$

$$و ج = و ج - و ج (ا ب)$$

اب اگر $و$ اس قدر چھوٹا ہو کہ اس کے مربع نظر انداز ہو سکیں، تو

$$ف - لا = ق ا$$

$$= (و ا + و ج) مس ع = و ج - و ج (ا ب) مس (ع + و)$$

$$پس لا = و ج \times ج ج \times مس ع = و ج (ا ب) مس ع + و ج ق ط ا \times ج ب$$

کیونکہ مس (ع + و) = مس ع + ق ط ا جب $و$ ، تقریباً $و$ کو ساخط کرنے سے

لاجم (۱-ب) مس ع = جم ج مس ع (وج قط ع جب ن-لا)
اس لیے ۲ لا جب ا جب ب = وج قط ع جم ج جب ن

اس لیے اصل بلندی ہے ف + لا = $\frac{1}{2} \frac{مس ع}{جب ا} (1 + \frac{جم ج}{جب ا جب ب} \times \frac{جب ن}{جب ۲ ع})$

(۲) ایک مثلث کے ضلعوں کی پیمائش کی گئی تو معلوم ہوا کہ
۵ = ب، ۴ = ج، ۶ = لیکن یہ معلوم ہے کہ ج کی پیمائش میں ایک
چھوٹی خطا ہے؛ معلوم کرو کہ کون سا زاویہ زیادہ سے زیادہ صحت کے
ساتھ معلوم کیا جاسکتا ہے۔

فرض کرو کہ ج کی صحیح قیمت لا + ۶ ہے؛ فرض کرو کہ مثلث کے زاویے
ا + مف ا، ب + مف ب، ج + مف ج ہیں جن میں اجزاء مف ا، مف ب،
مف ج منحصر ہیں لا پر؛ ہم لاکو اس قدر چھوٹا مان لینگے کہ اس کا مربع
نظر انداز ہو سکتا ہے۔
ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$جم (ا + مف ا) = \frac{۲۵ - (لا + ۶) + ۱۶}{(لا + ۶) ۴ \times ۲} = \frac{۵۱۲ + ۲۴}{(لا \frac{۱}{۴} + ۱) ۴۸} = \frac{۲۴}{۴۸} (1 + \frac{لا}{۱۲} - \frac{۱}{۴})$$

$$= \frac{۲۴}{۴۸} (1 + \frac{۵}{۱۸} لا) تقریباً$$

$$پس جب ا \times مف ا = لا - \frac{۵}{۳۲} لا$$

$$نیز جم (ب + مف ب) = \frac{۱۶ - (لا + ۶) + ۲۵}{(لا + ۶) ۵ \times ۲} = \frac{۲}{۴} (1 + \frac{لا}{۱۰})$$

$$پس جب ب \times مف ب = لا - \frac{۳}{۱۰} لا$$

$$اور نیز جم (ج + مف ج) = \frac{۲۵ - (لا + ۶) - ۱۶ + ۲۵}{۴ \times ۵ \times ۲} = \frac{۱}{۸} (1 - \frac{لا}{۵})$$

$$پس جب ج \times مف ج = لا - \frac{۳}{۱۰} لا$$

$$\text{نیز } \frac{\text{جب } ۱}{۵} = \frac{\text{جب } ۲}{۴} = \frac{\text{جب } ۳}{۶}$$

اس طرح ۲۴ مف ۱ = ۴۰ مف ۲ = ۵۰ مف ۳
اس لیے مف ۱، مف ۲ اور مف ۳ سے عدد اُچھوٹا ہے اور اس لیے
زاویہ ب زیادہ سے زیادہ صحت کے ساتھ معلوم کیا جاسکتا ہے۔

گیارہویں باب پر مثالیں

۱۔ ایک مثلث کے ضلع ۸، ۷، ۵ ہیں؛ چھوٹے سے چھوٹا زاویہ معلوم کرو۔
یہ دیا گیا ہے کہ

$$\text{لوک } ۱۱۲ = ۲۵۰۳۹۲۱۸۰$$

$$\text{لوک } ۶۱۹ = ۹۹۹۷۵۴۰۸۳ \text{، فرق } ۶۰ \text{ کے لیے } = ۴۳۷۰۰۰۰$$

۲۔ اگر ایک مثلث میں ۸ = ۷۵، ۲ = ۴۵، ۱ = ۱۶، ج = ۶۰، تو دوسرے زاویے معلوم کرو۔
یہ دیا گیا ہے کہ

$$\text{لوک } ۲۴۷۷۱۲۱۳ = ۴۷۷۷۷۷۷ \text{، ل مس } ۶۰ = ۱۰۵۰۲۰۲۲۰۳$$

$$\text{لوک } ۷ = ۸۴۵۰۹۸۰ \text{، ل مس } ۶۱ = ۱۰۵۰۲۰۴۷۳۱$$

۳۔ ایک مثلث کے ضلع ۳، ۵، ۷ فٹ ہیں۔ زاویے معلوم کرو۔ یہ دیا گیا ہے کہ (183)

$$\text{لوک } ۱۳۵ = ۱۷۱۳۰۳۳۳۸ \text{، لوک } ۱۲ = ۱۵۱۴۶۱۲۸۰$$

$$\text{ل جم } ۱۰ = ۵۳۵۷۹۹۲۱۷۵ \text{، ل جم } ۱۰ = ۵۴۹۹۲۰۹۳۲$$

۴۔ اگر ضلع = ۵، ۵، ۵، ج = ۶۰، ۱ = ۲۰۰، فٹ، تو ب معلوم کرو۔ یہ دیا گیا ہے کہ

$$\text{لوک } ۲ = ۳۰۱۰۳۰۰ \text{، لوک } ۱۷۲۳۷۱۴۱۳ = ۱۷۲۳۷۱۴۱۳$$

$$\text{ل جب } ۵۵ = ۹۹۱۳۳۶۴۵ \text{، لوک } ۱۷۲۳۷۱۴۱۳ = ۱۷۲۳۷۱۴۱۳$$

۵۔ اگر ایک مثلث میں ب = ۲۵، ۲۵، ۲۵ فٹ، ج = ۵۴، ۵۴، ۵۴ فٹ، تو ب معلوم کرو۔ یہ دیا گیا ہے کہ

- لوک ۲ = ۳۰۱۰۳۰ = ۴۷۲۸۹۴۳۳ = ۴۷۲۸۹۴۳۳ ل م ۴ = ۱۰۶۲۹۲۸۳۳
- لوک ۱۳ = ۴۷۲۸۹۴۳۳ = ۴۷۲۸۹۴۳۳ ل م ۱۳ = ۴۷۲۸۹۴۳۳ = ۴۷۲۸۹۴۳۳
- ۷۔ اگر ایک مثلث کے دو ضلعوں کے طولوں میں نسبت ۷:۹ ہو اور ان کا درمیانی زاویہ ۴۵° ہو تو دوسرے زاویے معلوم کرو۔ یہ دیا گیا ہے کہ
- لوک ۲ = ۳۰۱۰۳۰۰ = ۴۷۲۸۹۴۳۳ = ۴۷۲۸۹۴۳۳ ل م ۲ = ۳۰۱۰۳۰۰ = ۴۷۲۸۹۴۳۳
- لوک ۱۵ = ۵۳۱۴۹۴۳۳ = ۴۷۲۸۹۴۳۳ فرق آ کے لیے = ۴۷۲۸۹۴۳۳
- ۸۔ ایک مثلث کا ایک زاویہ ۹۰° ہے، رقبہ ۳۱۰۰ اور گھیرا ۲۰، باقی زاویے اور ضلع معلوم کرو۔ یہ دیا گیا ہے کہ
- لوک ۲ = ۳۰۱۰۳۰۰ = ۴۷۲۸۹۴۳۳ = ۴۷۲۸۹۴۳۳ ل جب ۲ = ۴۷۲۸۹۴۳۳ = ۴۷۲۸۹۴۳۳
- لوک ۴ = ۸۲۵۰۹۸۰ = ۴۷۲۸۹۴۳۳ = ۴۷۲۸۹۴۳۳ ل جب ۴ = ۴۷۲۸۹۴۳۳ = ۴۷۲۸۹۴۳۳
- ۹۔ ایک مثلث ا ب ج میں یہ دیا گیا ہے کہ ۱ = ۱۰، ا ف ٹ ا ب = ۹، ف ٹ ا ج = ۳ (۳) میں معلوم کرو۔ اگر ا اور ب کے ناپے میں ایک انچ سے بڑی اور ج کی پیمائش میں ا سے بڑی خطائیں نہ ہوں تو ثابت کرو کہ ج کی محسوب کردہ قیمت میں جو خطا ہے وہ ۲۵۰۰ سے کم ہوگی۔
- ۱۰۔ اگر ہم صورت میں مثلث کے ا ب ز ا ب، ب دیے گئے ہوں جہاں ۱ = ۱۰، ب اور میرے ضلع کی قیمتیں ج، ج ہوں تو ثابت کرو کہ ج = ۲، ج ج ج = ۲، ج ج ج = ۲، ج ج ج = ۲
- ۱۱۔ ایک مثلث کا قاعدہ اس کے ارتفاع کے مساوی ہے اور دوسرے دو ضلع معلوم طول کے ہیں۔ مثلث کے دیگر اجزاء معلوم کرو ان ضابطوں سے جو لوکارٹی عمل حساب کے لیے موزوں ہوں۔ ثابت کرو کہ دیے ہوئے ضلعوں میں جو نسبت ہے اس کو ۱ (۱-۱) اور ۱ (۱-۱) کے درمیان واقع ہونا چاہیے۔
- ۱۲۔ زمین کے ایک مثلثی ٹکڑے میں اس کا طویل ترین ضلع ۱۰ گز ہے، دوسرے دو ضلعوں کا مجموعہ ۱۰۰ گز ہے اور اس کا ایک زاویہ ۶۰° ہے۔ دوسرے زاویے

معلوم کرو۔ یہ دیا گیا ہے کہ

$$916248519 = 23 \text{ ل میں}$$

$$913419333 = 1513 \text{ ل میں}$$

۱۳۔ ایک مثلث کا ایک زاویہ 26° ہے، مقابل کا ضلع 2 اور ارتفاع 5.1 ہے۔ مثلث کو حل کرو۔

۱۴۔ اگر ایک مثلث کا کوئی ضلع $\frac{1}{2}$ (۳-۵) \times گھیرائے کم ہو تو تباؤ کرنا اور اس سے مقابل کے ضلعوں پر کھینچے ہوئے عمودوں سے ایک مثلث کا بنانا ناممکن ہے لیکن اگر ہر ضلع $\frac{1}{2}$ گھیرے سے بڑا ہے تو یقیناً ایسا مثلث بنانا ممکن ہے۔

۱۵۔ اگر اجزاء ج = ۵، ب = ۲، ج = ۶ سے ایک مثلث کو حل کیا جائے تو تباؤ کہ ج کی قیمت میں ۱۰ کی خطا سے ب کی محسوب کردہ قیمت میں تقریباً 25.22 کی خطا پیدا ہوگی۔

۱۶۔ ایک مثلث کے ضلع سلسلہ حسابیہ میں ہیں۔ اگر اس کا اوسط ضلع اور اس کے مقابل کا زاویہ دیے گئے ہوں تو مثلث کو حل کرنے کے لیے ضابطوں کی تلاش کرو اور دیے ہوئے زاویہ کی بڑی سے بڑی ممکن قیمت معلوم کرو۔ اگر اوسط ضلع 5.22 فٹ اور مقابل کا زاویہ 59° ہو تو مثلث کو حل کرو۔

۱۷۔ ایک مثلث کے وسطی خط کا طول اور وہ زاویے دیے گئے ہیں جن میں یہ خط راسی زاویہ کو تقسیم کرتا ہے۔ اس مثلث کو حل کرو۔

۱۸۔ ایک مثلث کا ایک ضلع، اس کے مقابل کا زاویہ، اور اس زاویہ سے ضلع پر کا عمود دیے گئے ہیں۔ مثلث کو حل کرو۔

۱۹۔ ایک مثلث کو دیے ہوئے اجزاء 'ب'، 'ا' سے حل کیا گیا ہے۔ اگر 'ا' ب کی قیمتیں چھوٹی خطاؤں 'لا'، 'ما' سے علی الترتیب متاثر ہوں تو ان کی وجہ سے 'ا' سے مقابل کے ضلع پر کھینچے ہوئے عمود کے محسوب کرنے میں جو خطا واقع ہوتی ہے اس کو معلوم کرو اور ثابت کرو کہ یہ خطا صفر ہے اگر

$$لا جبب \times ج = ج (جبب - جبب ج)$$

۲۰۔ ایک کشتی جنوب سے 5° مشرق کی سمت میں چل رہی ہے اس سے

ایک روشنی کا مینار دیکھا گیا ہے جو شمال سے ۵° مشرق والی سمت میں نظر آتا ہے کشتی ایک میل آگے جانے کے بعد پھر اس مینار کا مشاہدہ کیا گیا تو وہ ٹھیک شمال کی سمت میں نظر آیا۔ اس آخری مشاہدہ کے وقت مینار کا فاصلہ 'گزوں تک صحیح' معلوم کرو۔ یہ دیا گیا ہے کہ

$$\text{ل جب } ۲۰ = ۹۵۳۲۰۵۲ \text{ ' لوک } ۳۰۱۰۳۰۰ = ۲$$

$$\text{لوک } ۲۵۳۱۳۸۹۶ = ۲۵۳۱۵۹۰۰ = ۲۰۴ \text{ ' لوک } ۳۱۵۹۰۰ = ۲۰۴$$

۲۱۔ ایک چٹان پر ایک مینار ہے جس کو دریا میں کی ایک کشتی سے دیکھا گیا تو معلوم ہوا کہ مینار کی چوٹی کا ارتفاع ۲۰ ہے؛ پھر ساحل کی طرف پہلے مشاہدے کے مستوی میں ۵۰۰ گز کا فاصلہ طے کرنے کے بعد معلوم ہوا کہ مینار کی چوٹی اور اس کے قاعدے کے ارتفاع علی الترتیب ۹۰ اور ۵۰ ہیں۔ چٹان اور مینار کی بلندیوں معلوم کرو۔

۲۲۔ ایک انقباضی ستون کا پائین اسے۔ ب اور ج 'ا کے ٹھیک مشرق میں ہیں اور 'د' ج کے جنوب میں ہے۔ ب پر ستون کا جو ارتفاع ہے وہ ج کے ارتفاع کا دوگنا ہے اور وہ زاویہ من 'ا' ہے جو 'ب' کے محاذی 'د' پر بنتا ہے نیز ج ج = ۲۰ فٹ 'ج = ۳۰ فٹ۔ ستون کی بلندی معلوم کرو۔

۲۳۔ ایک خاص مقام سے ایک پہاڑ شمال مشرقی سمت میں نظر آتا ہے۔ اس مقام سے اس پہاڑ کی چوٹی کا ارتفاع مشاہدہ کیا گیا ہے۔ مذکورہ مقام سے مشرق جنوب مشرق کی سمت میں ایک ٹیلہ ہے جس کا ارتفاع ۵۰ معلوم ہے اگر ٹیلہ جاتا ہے اور ٹیلہ کی چوٹی سے پہاڑ کی چوٹی شمال میں زاویہ ارتفاع پر دیکھا جاتی دیتی ہے۔ ثابت کرو کہ مقام قبل الذکر کے اوپر پہاڑ کی چوٹی کی بلندی ف جب ع جم بم ق م (ع۔ ب) ہے۔

۲۴۔ دو متقیم متقاطع پٹریوں میں سے ایک پر ایک ٹرین جا رہی ہے۔ جب اس کے پہلے ڈبہ کا اگلا رخ پٹریوں کے مقام اتصال پر پہنچتا ہے تو ٹرین کے محاذی دوسری پٹری پر کے کسی خاص مقام پر زاویہ بنتا ہے اور جب اس کے آخری ڈبہ کی ٹیٹ پہنچتی ہے تو زاویہ بنتا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ دو پٹریاں ایک

دوسرے سے زاویہ ط پر مائل ہیں جہاں ط، مسادات م مم ط = مم عہ مم عہ سے حاصل ہوتا ہے۔

۲۵۔ ایک اسطوانی مینار ایک افقی میدان پر قائم ہے؛ ایک آنکھ جو میدان میں واقع ہے مینار کے اوپر کے سرے کی کور کی قوس کو دیکھتی ہے جو نظر آرہی ہے۔ اگر اس قوس کے کسی سرے کے زاویاتی ارتفاع میدان کے اوپر عہ عہ، عہ عہ ہوں جبکہ آنکھ علی الترتیب ج، ج، ج، ج فاصلوں پر واقع ہو تو ثابت کرو کہ

$$(ج - ج^۲) (ج^۲ - ج) + مم عہ + (ج - ج^۲) (ج - ج) = مم عہ۔$$

۲۶۔ ایک غبارہ شمال مشرقی سمت میں ارتفاع عہ پر دکھایا گیا؛ دس منٹ بعد ٹھیک شمال میں ارتفاع یہ پر وہ نظر آیا۔ بعد ازاں معلوم ہوا کہ جس شرح سے وہ نیچے اتر رہا تھا وہ چھ میل فی گھنٹہ تھی؛ اس کی افقی حرکت کو یکساں فرض کر کے ثابت کرو کہ اس کی افقی حرکت کی شرح

۶

$$\frac{۲۸}{۳۰} \text{ مس عہ - مس ب}$$

میل فی گھنٹہ تھی؛ اس دوران میں ہوا کی سمت مشرقاً تھی۔

۲۷۔ مجھے دو میناروں کی چوٹیاں ایک خط مستقیم میں زاویاتی ارتفاع عہ پر نظر آتی ہیں، اور ساکن پانی میں ان کے عکسوں کے زاویاتی نشیب یہ اور جہ دکھائی دیتے ہیں۔ اگر میری آنکھ کی بلندی سطح آب کے اوپر ج ہو تو ثابت کرو کہ میناروں کے درمیان افقی فاصلہ ہے

$$\frac{۲}{۳} \text{ ج مم عہ جب (ب - ج)}$$

$$\text{جب (ب - ج) جب (ج - ع)}$$

۲۸۔ ایک برج کے جنوب میں مقام م سے برج کا زاویاتی ارتفاع م ہے اور مقام ب پر جو م سے ل فاصلہ پر اس کے مغرب میں واقع ہے برج کا ارتفاع م ہے۔ بتانے کہ برج کی بلندی $\frac{۲}{۳} \frac{۲۸}{۲۵}$ ہے۔

۲۹۔ ایک برج - ۵۰ فٹ بلند ہے اور زمین سے ۲۵ فٹ بلندی پر اس پر ایک نشان ہے؛ بتاؤ کس قاعدہ پر برج کے یہ دو حصے ایک آنکھ پر مساوی زاویے بنائینگے جبکہ آنکھ سطح زمین سے ۵ فٹ بلند واقع ہو۔

۳۰۔ ایک شخص مسیحیدان سے جس پر ایک برج ہے اور برج پر ایک مینار ہے مشاہدہ کرتا ہے کہ جب وہ برج کے پائین سے زاویہ قائمہ پر ہوتا ہے تو اس کی چوٹی اور ایک پہاڑ کی چوٹی ایک خط مستقیم میں نظر آتی ہیں۔ برج کے پائین سے ۵ فٹ اور پرے چلنے سے وہ دیکھتا ہے کہ مینار کے محاذی اس کی آنکھ پر حسب سابق وہی زاویہ بناتا ہے اور اس کی چوٹی اور پہاڑ کی چوٹی ایک خط مستقیم میں ہیں؛ ثابت کرو کہ اگر مینار کی آنکھ میں سے نزلنے والے افقی مستوی کے اوپر برج کی بلندی ج فٹ ہو تو پہاڑ کی بلندی اسی مستوی کے اوپر $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ ج فٹ ہوگی۔
۳۱۔ ایک شخص ۵ فٹ قد والا ایک مخروط مضلع کے قاعدہ کے نزدیک کھڑا ہے جس کا قاعدہ مربع ہے، وہ دیکھتا ہے کہ آفتاب مخروط مضلع کے ایک کنارہ پر اس کے وسط میں غائب ہوتا ہے۔ اگر نزدیک ترین کناروں سے شخص مذکور کے فاصلے h اور سورج کا ارتفاع h' ہو تو ثابت کرو کہ مخروط مضلع کی بلندی ہے

$$1 + \frac{h}{h'} \text{ مس } \frac{1}{2} (5 - 2 - 2 + 1) \text{ فٹ}$$

۳۲۔ ایک پہاڑی کی چوٹی سے نیچے کے میدان پر کے ایک نقطہ کا زاویہ θ (186) ہے اور پہاڑی سے تین چوتھائی راستہ نیچے اترنے کے بعد اسی نقطہ کا زاویہ θ ہے۔ آئنگ صحیح پہاڑی کا میلان معلوم کرو۔

۳۳۔ $\angle B = 90^\circ$ ، ایک کمرہ کا سطحی فرش ہے جس کا طول AB فٹ ہے۔ کمرہ کی بلندی معلوم کرو اگر ج پر کمرے کی بلندی کے محاذی کونہ A پر زاویہ θ بنے اور کونہ B پر زاویہ ϕ بنے۔ اگر $1 = 8$ فٹ، $\theta = 45^\circ$ ، $\phi = 30^\circ$ تو ثابت کرو کہ بلندی تقریباً ۸ فٹ۔ (ایچ ہے۔)

۳۴۔ ایک برج ایک افقی مستوی پر ایک پہاڑی سے جس کا میلان θ ہے

۱ فاصلہ پر واقع ہے۔ پہاڑی پر کے ایک شخص کو برج کے اوپر سے ایک تالاب عین دکھائی دے سکتا ہے، اس تالاب کا فاصلہ برج سے ج ہے۔ اگر مشاہد کا فاصلہ پہاڑی کے پائین سے ج ہو تو ثابت کرو کہ برج کی بلندی ب ج جب ع ہے۔

۳۵ — ایک شخص دو برجوں کے درمیان کھڑا دیکھتا ہے کہ ان میں سے ہر ایک برج اس کی آنکھ پر زاویہ ع بناتا ہے؛ پھر وہ ایک سیدھے راستہ پر جو برجوں کو ملانے والے خط سے زاویہ ج پر نکل ہے ۱ فٹ چلتا ہے اور دیکھتا ہے کہ اس کی آنکھ پر ان میں سے ہر برج کے محاذی زاویہ ب بنتا ہے؛ برجوں کی بلندیاں معلوم کرنے کے لیے حسب ذیل رشتے ثابت کرو۔

$$\text{ف ف (م م ب - م م ع) = ڈ}^2$$

$$(\text{ف - ف}) (\text{م م ب - م م ع}) = ۲ \text{ م م ج}$$

جن میں ف، ف سے برجوں کی بلندیاں تعبیر ہوتی ہیں۔

۳۶ — ایک پہاڑی کی چوٹی سے ایک پل کے دو ستونوں کے زاویہ نشیب م، م، مشاہدہ کیے گئے ہیں اور ستونوں کا درمیانی فاصلہ ۱ مشاہدہ کے نقطہ پر زاویہ ط بناتا ہے؛ ثابت کرو کہ پہاڑی کی بلندی ہے:

$$\frac{۱}{۲} \text{ م م ف ق ط } \frac{۱}{۲} \text{ ط م } \text{ج ب ع جب ب}$$

$$\text{جہاں } \text{ج م ف} = ۲ \text{ ج م } \frac{۱}{۲} \text{ ط م } \text{ج ب ع جب ب} \text{ (ج ب ع + ج ب ب)}$$

۳۷ — ایک پہاڑی پر سے ایک شخص دیکھتا ہے کہ تین برج جو ایک افقی مستوی پر واقع ہیں اس کی آنکھ پر مساوی زاویے بناتے ہیں اور ان کے قاعدوں کے زاویے نشیب ع، ع، ع ہیں؛ اگر ج، ج، ج برجوں کی بلندیاں ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{ج ب (ع - ع)}}{\text{ج ج ب ع}} + \frac{\text{ج ب (ع - ع)}}{\text{ج ج ب ع}} + \frac{\text{ج ب (ع - ع)}}{\text{ج ج ب ع}} =$$

۳۸۔ ایک قلعہ سے ایک توپ ۱ داغی گئی تو معلوم ہوا کہ دو مقامات ب اور ج پر اس کی روشنی کے نظر آنے اور آواز کے سنائی دینے میں جو وقفہ ہوئے وہ علی الترتیب ت، ت ہیں؛ خط مستقیم ج میں ا سے معلومہ فاصلہ ۱ پر د ایک نقطہ ہے؛ اگر ب = د، اور ج = د ج تو ثابت کرو کہ آواز کی رفتار ہے

$$\left\{ \frac{(ب - ج) (ج - د)}{ب ت - ج ت} \right\}$$

اس صورت کا امتحان کرو جب، و = ب ج

۳۹۔ ایک پہاڑی کی چوٹی پر ایک چوکونی مینار ہے اور پہاڑی کا ڈھال مستقل میلان رکھتا ہے۔ ڈھال پر کئے ایک نقطہ سے مینار کے سرے کا زاویہ ارتفاع ع مشاہدہ کیا گیا اور پھر پہاڑی کی چوٹی کی طرف ۱ فٹ آگے بڑھنے سے زاویہ ارتفاع ب معلوم ہوا۔ اگر مینار کی بلندی ف ہو تو ثابت کرو کہ پہاڑی کا میلان افق کے ساتھ ہے

$$\left\{ \frac{ج ب ع جب ب}{جب (ب - ع)} \times \frac{۱}{ف} \right\} جم$$

۴۰۔ ایک کر دی گنبد کے راس پر ایک صلیب نصب ہے؛ کسی خاص نقطہ پر

صلیب کا زاویہ ارتفاع ع اور گنبد کا زاویہ ارتفاع ب مشاہدہ کیا گیا ہے؛ گنبد

کی طرف فاصلہ ۱ طے کرنے کے بعد معلوم ہوا کہ صلیب گنبد کے عین اوپر ہے (۱۸۷)

اور اس کا زاویہ ارتفاع ج ہے۔ ثابت کرو کہ سطح زمین کے اوپر گنبد کے مرکز

کی بلندی ہے

$$\frac{ج ب ع جم ب - جم ع جب ب}{جم ب - جم ع} \times \frac{۱}{جب (ج - ع)}$$

۴۱۔ کسی دن دوپہر کے وقت آفتاب کا ارتفاع ع ہے۔ ایک شخص اس وقت

ایک ابر کے ٹکڑے میں ایک دائری شکاف دیکھتا ہے جو اس کے جنوب میں ۱۰ فاصلہ پر کے ایک مقام کے اوپر انتصاباً واقع ہے۔ وہ مشاہدہ کرتا ہے کہ شکاف کے محاذی اُس کی آنکھ پر ۲ طہ کا زاویہ بنتا ہے اور زمین پر کا روشن دماغ اُس کی آنکھ پر ۲ فہ کا زاویہ بناتا ہے۔ اگر ابر کے ٹکڑے کی بلندی زمین کے اوپر لا چوتھ ثابت کر دو کہ

$$\frac{لا (م م ع م ف - م م ط)}{۲ - لا م م ع م ف + لا (م ف - م ط)} =$$

۴۲۔ ایک پہاڑی کے ڈھال پر کے ایک نقطہ سے دویدھے راستے بنائے گئے ہیں، ایک راستہ ایک انتصابی مستوی میں جنوباً واقع ہے، دوسرا راستہ دوسرے انتصابی مستوی میں جو قبل الذکر کے علی القوام ہے مشرقاً واقع ہے۔ یہ راستے ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ عہ بناتے ہیں اور ان کے طول اُس افقی ٹرک تک جو پہاڑی کے پائین میں ہے علی الترتیب ۱ اور ۲ ہیں۔ ثابت کر دو کہ پہاڑی

$$\text{افقی سمت کے ساتھ زاویہ جب } \frac{لا + ب - ۲ - لا ب جم ع}{لا ب جب ع م ع} \text{ پر مائل ہے۔}$$

۴۳۔ ایک سیدھی ندی کا عرض اس طرح محسوب کیا گیا ہے کہ اس کی ایک جانب ۱ طول کا ایک قاعدہ ناپا گیا ہے اور اس کے سروں کو مقابل کے کنارہ پر کے ایک نشان سے ملانے والے خطوط مستقیم جزاویہ قاعدے کے ساتھ بناتے ہیں ان کا مشاہدہ کیا گیا ہے۔ اگر اُس آلہ سے جس سے زاویہ ناپے گئے ہیں زاویوں کی قیمتیں اصلی قیمتوں سے (۱ + ن) گنی حاصل ہوئی ہوں جہاں ن بہت چھوٹا ہے تو ثابت کر دو کہ دریا کے محسوب کردہ عرض میں جو خطا ہے وہ

$$\frac{ن \times ب جب ع - ع جب ع}{ب جب ع (ع - ب)}$$

کے بہت قریب ہے؛ ع، بہ مذکورہ بالا زاویوں کے دائری ناپ ہیں۔

۴۴۔ ایک مشاہد ایک جہاز کے عرشہ سے جو سطح سمندر سے ۲۰ فٹ اوپر ہے دور کے روشنی کے مینا کی چوٹی کو عین دیکھ سکتا ہے، وہ پھر جھڈے کے ڈنڈے پر اوپر تک چڑھتا ہے جہاں وہ عرشہ سے ۸۰ فٹ بلند ہو جاتا ہے تو اسے روشنی کے

مینار کا دروازہ نظر آتا ہے جس کی بلندی سمند کے اوپر مینار کی بلندی کا چوتھائی ہے۔ مینار سے اُس کا فاصلہ اور مینار کی بلندی معلوم کرو اگر یہ مان لیا جائے کہ زمین ایک کرہ ہے جس کا نصف قطر ... میل ہے۔

۴۵ — ایک سیدھی ہنر کے کنارے پر تین کھجے ایک ایک میل کے فاصلے پر گائے گئے ہیں، ان میں سے ہر ایک کی بلندی سطح آب کے اوپر ایک ہی ہے۔ اگر پہلا اور تیسرے کھجوں کے سروں کو ملانے والا نظری خط درمیانی کھجے کو اس کے سرے سے آٹھ انچ نیچے قطع کرے تو زمین کا نصف قطر ایک میل تک صحیح معلوم کرو۔

۴۶ — تین نقطوں ۱، ۲، ۳ ج پر جو ایک افقی مستوی میں ہیں سورخ ڈال کر مودم کی ٹیکار لگایا گیا تو معلوم ہوا کہ وہ علی الترتیب ۱، ۲، ۳ ج گہرائیوں پر ہے؛ نیز ۱ ج = ۲ ج، ۲ ج = ۳ ج، ۳ ج = ۴ ج، اگر مودم کی تہ کی اوپر کی سطح، مستوی ہو تو ثابت کرو کہ افق کے ساتھ اس کا میلان ذ مساوات ذیل سے حاصل ہوتا ہے۔

$$188) \text{ مس } ۲ = \frac{\text{ج (۱-ب) } ۲}{\text{ج (۲-ب) } ۲} + \frac{\text{ج (۳-ب) } ۲}{\text{ج (۴-ب) } ۲} \text{ کم نم}$$

۴۷ — ایک ستون کا زاویائی ارتفاع ۷ ہے جبکہ اس کو ایک مقام سے جو اس کے شمال میں ہے دیکھا جاتا ہے اور ۲ ہے جبکہ اس کو ایک مقام سے جو اس کے مشرق میں اس سے ج فاصلہ پر ہے دیکھا جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ ستون کی بلندی ہے

$$\frac{\text{ج جب ۷ جب ۲}}{\text{ج (۷-ب) جب (۷+ب) } ۲}$$

۴۸ — ایک بندرگاہ سے شمال میں ۹ میل فاصلے پر ایک روشنی کا مینار ہے۔ بندرگاہ سے ایک کشتی اُس سمت میں جو مشرق سے شمال کی طرف ۱۲۰° کا زاویہ بنتی ہے حرکت کرتی ہے یہاں تک کہ روشنی کا مینار اس سے شمال مغربی سمت میں نظر آتا ہے، پھر وہ مڑتی ہے اور روشنی کے مینار کی طرف حرکت کرتی ہے یہاں تک کہ بندرگاہ اس کے جنوب مغربی سمت میں نظر آتا ہے

پھر وہ مڑتی ہے اور بندرگاہ میں اس کی طرف حرکت کرتی ہوئی داخل ہوتی ہے ثابت کرو کہ کشتی کی اس گردش کا طول تقریباً ۱۶ میل ہے۔

۴۹ — نصف قطر کے ایک دائری تالاب کے گرد یکساں عرض ب کا راستہ ہے جس کے گرد بلندی د کی باڑ لگی ہوئی ہے۔ ایک شخص جس کی لمبائی ف ہے باڑ کے عین اندر کھڑا ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ باڑ کا وہ حصہ جس کے بلند ترین نقطے پانی میں انعکاس کے ذریعہ اس شخص کو نظر آسکتے ہیں $\frac{1}{2}$ دن ہے جہاں

$$\left\{ \frac{2 + \frac{F}{D}}{1 + \frac{F}{D}} \times \frac{F + D}{2F} \right\} \text{ جہاں } \frac{2}{\pi} = \frac{1}{n}$$

بشرطیکہ $F > D(1 + \frac{1}{2})$ اور $\frac{D}{2} + 1 < \frac{D}{2}$

۵۰ — ایک کروکی حلقہ (Croquet-hoop) کا عرض، اس کے تاروں کی موٹائی، اور گولہ کا قطر دیے گئے ہیں؛ گولہ ایک دیے ہوئے محل میں ہے، بتاؤ کہ وہ شرطیں کس طرح معلوم کی جائیں کہ گولہ کے لیے یہ عین ممکن ہو جائے کہ وہ حلقہ میں سے جاسکے (۱) سیدھا (۲) ایک تار کو ٹکرانے کے بعد (۳) دونوں تاروں کو ٹکرانے کے بعد؛ یہ مان لو کہ زاویہ وقوع زاویہ انعکاس کے مساوی ہے۔

۵۱ — تین پہاڑوں کی چوٹیاں 'ا'، 'ب'، 'ج' ایک مشاہد کو ایک ہی خط مستقیم نظر آتی ہیں جبکہ وہ دو مقامات ف اور ق میں سے ہر ایک پر کھڑا رہتا ہے؛ یہ مقامات ایک ہی افقی مستوی میں ہیں، 'ا' ب اور ب ج کے محاذی ہر مقام پر زاویہ عہ بنتا ہے اور زاویے اق ف، ج ف ق، علی الترتیب خد اور پ ہیں۔

ثابت کرو کہ پہاڑوں کی بلندیوں میں نسبت ہے:

$$\text{مم } ۲ + \text{مم } ۲ : (\text{مم } ۲ + \text{مم } ۲) : (\text{مم } ۲ + \text{مم } ۲) : \text{مم } ۲ + \text{مم } ۲$$

نیز ثابت کرو کہ اگر ق ب خط Δ ج کو Δ پر قطع کرے تو Δ ج Δ جیب Δ (م پ + مم Δ)
 ۵۲ — ایک شخص ریل کی ایک سیدھی پٹری سے ج فاصلہ پر کھڑا ہوا ایک
 ٹرین دیکھتا ہے جو پٹری پر کھڑی ہے اور جس کا قریب ترین سرا پٹری کے
 اُس نقطہ سے Δ فاصلہ پر ہے جو اس شخص کے قریب ترین ہے۔ وہ شخص
 ٹرین کے محاذی جو زاویہ بنتا ہے اس کا مشاہدہ کرتا ہے اور پھر ٹرین کا طول
 محسوب کرتا ہے۔ اگر زاویہ Δ کے مشاہدہ کرنے میں اُس سے ایک چھوٹی خط
 ط مرزد ہو جائے تو ثابت کرو کہ اس کی وجہ سے محسوب کردہ طول میں جو خط
 وقوع پذیر ہوگی اس کو اصلی طول کے ساتھ یہ نسبت ہے

$$\frac{\text{ج ط}}{\text{جب ع (ج جم ع - وجب ع)}}$$

۵۳ — ایک پہاڑ کی بلندی ف حسب ذیل مشاہدہ کردہ چیزوں کی قیمتوں سے
 معلوم کرنی ہے، ایک افقی قاعدہ کا خطب ج (و) 'زاویے Δ ب ج'
 Δ ج ب اور زاویہ (ی) جو Δ ب، انتصابی خط کے ساتھ بناتا ہے۔
 بتاؤ کہ

$$ف = \frac{\text{وجم ی جب ج}}{\text{جب (ب + ج)}}$$

(189) اگر ف تقریباً معلوم ہو تو ثابت کرو کہ ج ج کی مناسب ترین سمت

$$\text{ب} = \frac{\text{مس} - ۱}{\left(\frac{\text{وجم ی - ف}}{\text{وجم ی + ف}} \right)}$$

سے ملتی ہے ایسی کہ ج کی پیمائش میں جو خطا ہو اس کا اثر ف کی مذکورہ بالا قیمت
 کی صحت پر کم سے کم ہوتا ہے۔

۵۴ — تین انتصابی جھنڈے ایک افقی مستوی پر قائم ہیں۔ اس مستوی میں
 تین نقطے Δ ، ب، ج ہیں جن میں سے ہر ایک پر ان تین جھنڈوں میں سے

دو کے سرے ایک ہی خط مستقیم میں نظر آتے ہیں : اور یہ خطوط مستقیم اوتار کے ساتھ علی الترتیب زاویے α یا β بناتے ہیں۔ جھنڈوں کے سروں میں جو مستوی گذرتا ہے وہ افق کے ساتھ زاویہ θ بناتا ہے۔ ثابت کرو کہ جھنڈوں کے طول ہیں

ب ج

$$\frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \beta} \right) = \frac{1}{\sin \theta}$$

اور دو متشابہ جملے۔ بتاؤ کہ جذروں کی علامتیں کس طرح لی جانی چاہئیں۔
 ۵۵۔ ایک بُرج α ب ایک افقی مستوی پر قائم ہے اور اس پر ایک مینا β ج ہے۔ ایک پہاڑ جس کا رخ ایک مائل مستوی خیال کیا جاسکتا ہے ایک مشاہد مقام γ پر کھڑا دیکھتا ہے کہ α ب β ج میں سے ہر ایک کے محاذی اس کی آنکھ پر زاویہ θ بناتا ہے، α ب وہ مقام γ تک حرکت کرتا ہے اور فاصلہ γ ف $(= 1)$ کی پیمائش کرتا ہے اور دیکھتا ہے کہ پھر α ب β ج اس کی آنکھ پر وہی زاویے θ بناتے ہیں، α ب وہ زاویوں α ف $(= \beta)$ اور β ج ف $(= \gamma)$ کی پیمائش کرتا ہے۔ اگر α ب β ج کی بلندیاں h اور h' ہوں تو بتاؤ کہ

$$\frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \beta} \right) = \frac{1}{\sin \theta}$$

نیز اگر γ ف کا نقطہ وسطی θ ہو اور θ میں سے گزرنے والے خط میلان اعظم پر θ وہ نقطہ ہو جس پر α ب β ج مساوی زاویے θ بناتے ہیں اور اگر θ β تو ثابت کرو کہ افق کے ساتھ پہاڑ کا میلان θ مساوی ذیل سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \beta} \right) = \frac{1}{\sin \theta}$$

(190)

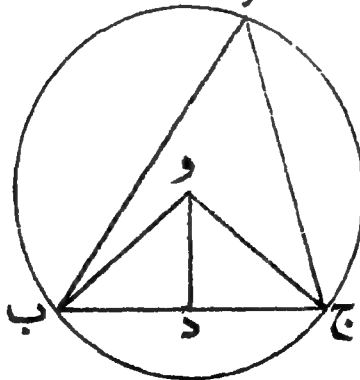
بارہواں باب

مثلثوں اور ذواربعۃ الاضلاعوں کے خواص

۱۵۰۔ — اس باب میں ہم اکثر اقلیدسی ہندسہ کے ان مسئلوں کو بلا ثبوت مان لیتے جو ہمارے مقصد کے لیے ضروری ہیں اور ان مسئلوں کی تحقیق کے لیے نظری ہندسہ پر لکھی ہوئی کتابوں کا حوالہ دینگے۔

مثلث کا حائط دائرہ

۱۵۱۔ — ایک مثلث کے حائط دائرہ کے نصف قطر کے لیے ضابطہ $\frac{1}{4} \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$ = ۱۲۰ میں حاصل ہو چکا ہے۔ اس ضابطہ کو یوں بھی حاصل کیا جاسکتا ہے:



(1)

فرض کرو کہ Δ حائل دائرہ کا مرکز ہے، مثلث Δ ب ج کے ضلع
ب ج پر عمود و د کھینچو، تو ب ج کا نقطہ وسطی د ہے اور زاویہ Δ ب و د
چونکہ Δ ب و د = Δ ب ج ب و د، اس لیے

$$\frac{1}{2} \Delta = \Delta \text{ ب ج ب} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{2} \Delta = \Delta \text{ ب ج ب} \quad (1)$$

اگر مثلث کا رقبہ Δ سے تعبیر ہو تو

$$\Delta = \Delta \text{ ب ج ب}$$

اس طرح حائل دائرہ کے نصف قطر کے لیے چاروں جملہ حاصل ہوتا ہے

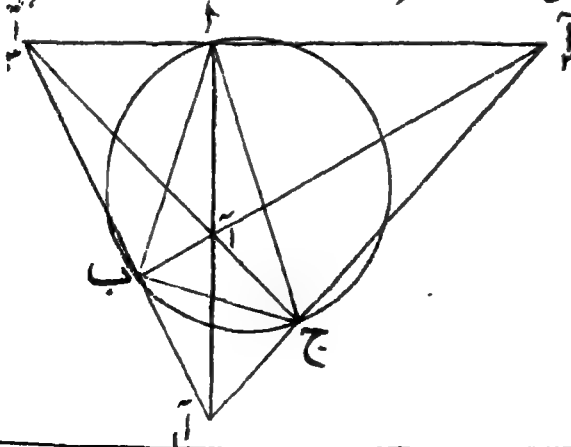
$$\Delta = \Delta \text{ ب ج ب} \quad (2)$$

$$\Delta = \Delta \text{ ب ج ب} = \Delta \text{ ب ج ب}$$

نیز

مثلث کے اندرونی اور جانبی دائرے

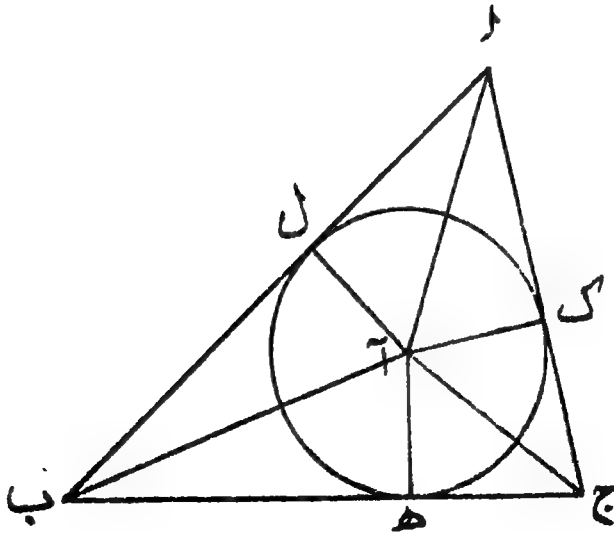
۱۵۲۔ ہم جانتے ہیں کہ ایک مثلث کے تین ضلعوں کو
مس کرنے والے چار دائرے کھینچے جاسکتے ہیں، اندرونی دائرہ ہر ضلع
کو داخلی طور پر مس کرتا ہے، فرض کرو کہ اس کا مرکز آ ہے، ہر جانبی دائرہ مثلث
کے ایک ضلع کو اور دوسرے دو محدودہ ضلعوں کو مس کرتا ہے، فرض کرو کہ



ان جانبی دائروں کے مرکز آ، آ، آ ہیں۔ ہم جانتے ہیں کہ آ، آ، آ ج، آ ج، آ ج، علی الترتیب زاویوں آ، آ، آ کی تنصیف کرتے ہیں، اور آ، آ، آ ج علی الترتیب زاویوں آ، آ، آ کی خارجی طور پر تنصیف کرتے ہیں۔ پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ مثلث آ، آ، آ کے راسوں آ، آ، آ سے مقابل کے ضلعوں پر عمود آ، آ، آ، آ، آ، آ ج آ، آ ہیں اور اس مثلث آ، آ، آ کا مرکز عمودی آ ہے۔

مثلث اب ج کا حائط دائرہ، مثلث آ، آ، آ کا زر نقطی دائرہ ہے اور اس لیے یہ حائط دائرہ ضلعوں آ، آ، آ، آ، آ، آ کے نقاط وسطی میں سے اور نیز آ، آ، آ، آ، آ، آ کے نقاط وسطی میں سے گذرتا ہے۔

۱۵۳۔ فرض کرو کہ مثلث اب ج کے ضلعوں اب، ب ج، ج ا کو اس کا اندر دنی دائرہ علی الترتیب نقطوں ل، ہ، ک پر مس کرتا ہے۔



۴۵۱ — دفعہ سابق کے جملوں کے جواب میں جانبی دائروں کے نصف قطروں $\frac{1}{2}b, \frac{1}{2}c, \frac{1}{2}a$ کے لیے جملے معلوم کیے جاسکتے ہیں۔

فرض کرو کہ مثلث ABC کے ضلعوں BC, CA, AB کو وہ دائرہ جس کا مرکز O ہے نقطوں D, E, F پر مس کرتا ہے۔ تب

$$\frac{1}{2}a = AD + BE + CF \quad \frac{1}{2}b = BD + CE + AF \quad \frac{1}{2}c = CD + AE + BF$$

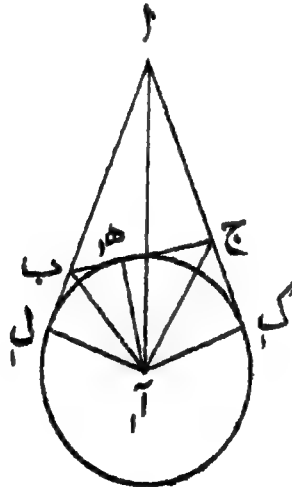
$$\text{اس لیے} \quad \frac{1}{2}a = (b + c - a) \quad \frac{1}{2}b = (c + a - b) \quad \frac{1}{2}c = (a + b - c)$$

اور اس لیے جانبی دائروں کے نصف قطروں کے لیے ہمیں ضابطے ملتے ہیں

$$\frac{1}{2}a = \frac{b+c-a}{2}, \quad \frac{1}{2}b = \frac{c+a-b}{2}, \quad \frac{1}{2}c = \frac{a+b-c}{2} \quad \dots \dots (۷)$$

$$\text{نیز چونکہ} \quad \frac{1}{2}a = \frac{b+c-a}{2} \quad \frac{1}{2}b = \frac{c+a-b}{2} \quad \frac{1}{2}c = \frac{a+b-c}{2}$$

$$\text{اس لیے} \quad \frac{1}{2}a = \frac{b+c-a}{2} \quad \frac{1}{2}b = \frac{c+a-b}{2} \quad \frac{1}{2}c = \frac{a+b-c}{2} \quad \dots \dots (۸)$$



اس سے ضابطہ ملتا ہے

۱ = ۴ س = ۱ جب ۱ = ۱ جم ۱ = ۱ ب جم ۱ = ۱ ج (۹)
اسی طرح ۱ اور ۱ کے لیے متناظر جملے حاصل ہوتے ہیں۔

پھر چونکہ

$$ب = ۱ = ۱ ب ل اور ج = ۱ = ۱ ج ک اور ا ک = ۱ = ۱ ا ل$$

اس لیے ۱ ب = ۱ ج = ۱ س = ۱ ج = ۱ س = ۱ ب = ۱ ا ک = ۱ ا ل = ۱ س
اس طرح ہمیں ضابطے ملتے ہیں

$$۱ = ۴ س = ۱ = ۱ (س - ج) = ۱ = ۱ (س - ب) = ۱ = ۱ ج (۱۰)$$

مثالیں

(۱) ثابت کرو کہ

$$\begin{aligned} ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۴ س \\ ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۴ س \\ ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۴ س \end{aligned}$$

(۲) ایک مثلث کے ضلعوں اور زاویوں کے لیے حسب ذیل جملے جو جابجائی دائروں کے نصف قطروں کی رقوم میں ہیں ثابت کرو:-

$$(ع) ۱ = ۱ = ۱ (ب) ۱ = ۱ (ج) ۱ = ۱$$

$$(د) ۱ = ۱ = ۱$$

$$(۳) ثابت کرو کہ ۱ = ۱$$

(۴) ثابت کرو کہ $۱۶ \text{ سر } ۱۶ \text{ سر } ۱۶ \text{ سر } ۱۶ = ۱۶ \text{ سر } ۱۶$

(۵) ثابت کرو کہ $\frac{۱۶ - ۱۶ + ۱۶}{۱۶} = ۱$ جم

(۶) اگر وہ جانبی دائرہ جو ضلع (کوس کرنا ہے) حائط دائرہ کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ

جم ۱ = جم ب + جم ج

(۷) ثابت کرو کہ $۱۶ (۱۶ + ۱۶) = ۱۶ (۱۶ + ۱۶) = ۱۶ (۱۶ + ۱۶)$ جم ج

(۸) اگر اندرونی اور جانبی دائروں کے مرکزوں کے فاصلے اس سے ۱۶ جم ۱۶ جم ہوں اور ۱۶ سے ب ج پر عودع ہو تو ثابت کرو کہ

(۱) $۱۶ \text{ سر } ۱۶ = ۱۶ \text{ سر } ۱۶$

(ب) $۱۶ \text{ سر } ۱۶ + ۱۶ \text{ سر } ۱۶ = ۱۶ \text{ سر } ۱۶$

(ج) $۱۶ \text{ سر } ۱۶ + ۱۶ \text{ سر } ۱۶ = ۱۶ \text{ سر } ۱۶$

(۹) بتاؤ کہ اس شلت کا رقبہ جو جانبی دائروں کے مرکزوں کو ملانے سے بنتا ہے یہ ہے

$\frac{۱۶ \text{ سر } ۱۶}{۱۶}$ یا $۱۶ \text{ سر } ۱۶$ جم $\frac{۱۶}{۱۶}$ ب جم $\frac{۱۶}{۱۶}$ ج

(۱۰) ثابت کرو کہ اندرونی اور جانبی دائروں کے مرکزوں کو ملانے سے جو چار شلت بنتے ہیں ان میں کسی کے گرد کھینچے ہوئے دائرہ کا نصف قطر، سر کا ڈگنا ہوتا ہے۔

(۱۱) ثابت کرو کہ رقبہ $\frac{۱۶}{۱۶}$ ، $\frac{۱۶}{۱۶}$ ، $\frac{۱۶}{۱۶}$ ، $\frac{۱۶}{۱۶}$ ، $\frac{۱۶}{۱۶}$ ، $\frac{۱۶}{۱۶}$ ، $\frac{۱۶}{۱۶}$ ، $\frac{۱۶}{۱۶}$ ایسے بدلتے

ہیں جیسے $\frac{۱۶}{۱۶}$ ، $\frac{۱۶}{۱۶}$ ، $\frac{۱۶}{۱۶}$ ، $\frac{۱۶}{۱۶}$

(۱۲) ثابت کرو کہ $\frac{۱۶}{۱۶} = \frac{۱۶}{۱۶} + \frac{۱۶}{۱۶} + \frac{۱۶}{۱۶}$ (۱) $\frac{۱۶}{۱۶} = \frac{۱۶}{۱۶} + \frac{۱۶}{۱۶} + \frac{۱۶}{۱۶}$

(ب) $\frac{۱۶}{۱۶} \times \frac{۱۶}{۱۶} \times \frac{۱۶}{۱۶} = \frac{۱۶}{۱۶} \times \frac{۱۶}{۱۶} \times \frac{۱۶}{۱۶}$

(۱۳) اگر ایک مثلث کے راسوں سے آ کے فاصلے فہ، فہ، فہ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{r} = \frac{f_a + f_b + f_c}{s}$$

(۱۴) اگر اس مثلث کے ضلع آ، ب، ج ہوں جو باہنی دائروں کے نقاط تماس

$$h_a, h_b, h_c \text{ کو لانے سے بنتا ہے تو ثابت کرو کہ } \frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$$

(۱۵) دائروں ب، ج، آ، ب، ج کے مرکزوں کو لانے سے جو مثلث بنتا ہے

اس کے ضلعوں میں نسبت جب ۲ : ۱ : ۱ جب ۲ : ۱ : ۱ جب ۲ : ۱ : ۱ ہوگی۔

(۱۶) ثابت کرو کہ مبہم صورت میں جبکہ آ، ب، ج دیکھ جائیں جو دو مثلث

حاصل ہوتے ہیں ان کے حائلہ دائرے مساوی ہوتے ہیں۔ نیز ثابت کرو کہ ان کے مرکزوں کے درمیان فاصلہ ہے

$$(b^2 + c^2 - a^2) / 4$$

(۱۷) مثلث کے حل کی مبہم صورت میں ثابت کرو کہ دیے ہوئے ضلعوں میں سے

بڑے ضلع کے ساتھ اندرونی دائروں کے نقاط تماس کا فاصلہ تیسرے ضلع کی قیمتوں کے فرق کے نصف کے مساوی ہوتا ہے۔

(۱۸) اگر مثلثوں آ، ب، ج، آ، ب، ج کے حائلہ دائروں کے

نصف قطر غہ، عم، غم ہوں تو ثابت کرو کہ ۲ - ۲ - ۲ = (عم + غم + غہ)

$$- غم - غم - غم = ۰$$

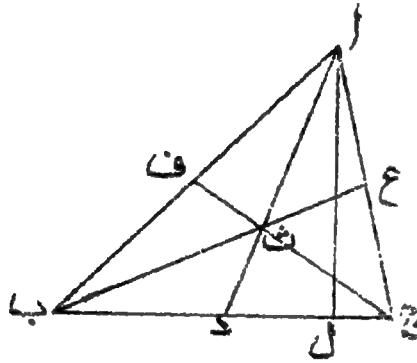
(۱۹) ثابت کرو کہ ایک مثلث کے باہنی دائروں کے نصف قطر، کبھی سارا

$$لا - لا (۲ + ۲ + ۲) \div ۲ - ۲ = ۰$$

کی اصلیت ہیں۔

خطوط وسطی

۵۵ — ایک مثلث کے راسوں کو مقابل کے ضلعوں کے نقاط وسطی سے ملانے والے خطوط مستقیم 'ا د' 'ب ع' 'ج ف' خطوط وسطی کہلاتے ہیں۔



خط وسطی 'ا د' کا طول 'مشہور مسئلہ' $ا ب^2 + ا ج^2 = ۲(ا د^2 + ب د^2)$ سے حاصل ہوتا ہے، اس طرح خطوط وسطی کے طولوں کے مربع مساواتوں

$$م_ا^2 = \frac{1}{4} ب ا^2 + \frac{1}{4} ج ا^2 - \frac{1}{4} و ا^2 = \frac{1}{4} م_ب^2 + \frac{1}{4} م_ج^2 - \frac{1}{4} و ا^2$$

$$م_ب^2 = \frac{1}{4} و ا^2 + \frac{1}{4} ب ا^2 - \frac{1}{4} ج ا^2 \dots (۱۱)$$

سے ملتے ہیں جہاں 'م'، 'م'، 'م' خطوط وسطی کے طول ہیں۔ فرض کرو کہ زاویہ 'ا د ج' 'م' سے تعبیر ہوتا ہے، تب

$$\frac{م_ا^2}{ا ب} = \frac{م_ب^2}{ا ج} = \frac{م_ج^2}{ا ب} = \frac{م_ا^2 + م_ب^2 + م_ج^2}{ا ب + ا ج + ا ب}$$

جہاں 'ا' ب ج پر عمود ہے؛ پس 'م' مساوات

$$\text{مم م} = \frac{1}{2} (\text{م ب} - \text{م ج}) \quad \dots \dots (۱۲)$$

سے حاصل ہوتا ہے۔

نقطہ 'م' جس پر خطوط وسطی ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں
مثلث کا مرکز ہندسی کہلاتا ہے۔ یہ بہت مشہور ہے کہ خطوط وسطی
میں سے ہر ایک کوٹ، نسبت ۱:۲ میں تقسیم کرتا ہے۔

(198)

مثالیں

(۱) ثابت کرو کہ مم اٹ ر + مم ب ٹ د + مم ج ٹ ع = مم ا
+ مم ب + مم ج

(۲) اگر دائروں 'ب' ٹ 'ج'، 'ج' ٹ 'ا'، 'ا' ٹ 'ب' کے مرکز 'ع'، 'د'، 'ر' ہوں اور مثلثوں 'ا ب ج'، 'ع د ر' کے رتبے 'ق'، 'ق' تو ثابت کرو کہ

$$۴۸ ق ق = (۲ا + ۲ب + ۲ج)$$

(۳) اگر دائروں 'ب'، 'ج'، 'ج'، 'ا'، 'ا'، 'ب' کے نصف قطر 'ر'، 'د'، 'ر' ہوں تو ثابت کرو کہ

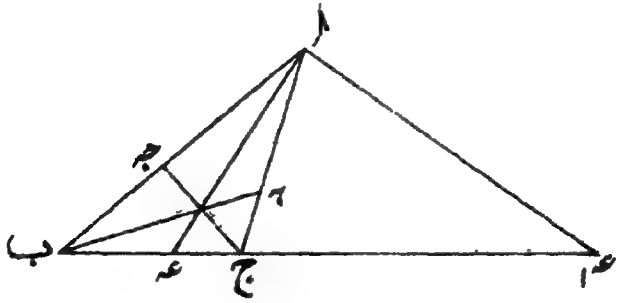
$$\frac{۲(ب-ج)}{ر} + \frac{۲(ج-ا)}{د} + \frac{۲(ا-ب)}{ر} = ۰$$

(۴) اگر زاوے 'ب'، 'ا'، 'ج' ب 'ع'، 'ج' ب 'ا'، 'ا' ب 'ج' ف علی الترتیب 'ع'، 'د'، 'ر' ہوں اور زاوے
ج 'ا'، 'ا' ب 'ع'، 'ب' ج 'ا' ف علی الترتیب 'ع'، 'د'، 'ر' ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\text{مم ع} + \text{مم د} + \text{مم ر} = \text{مم ع} + \text{مم د} + \text{مم ر}$$

زاویوں کے ناصف

۱۵۶۔۔۔۔۔ فرض کرو کہ زاویہ ا کے داخلی اور خارجی ناصف مقابل کے ضلع سے نقطوں ع اور ع پر ملتے ہیں۔ فرض کرو کہ داخلی ناصفوں ا ع، ب ع، ج ع کے طول ف، گ، ہ ہیں اور خارجی ناصفوں ا ع، ب ع، ج ع کے طول ف، گ، ہ۔ تب ع اور ع کے محل معلوم کرنے کے لیے ہمیں منسل ہوتے ہیں $\frac{ب}{ج} = \frac{ا}{ج} = \frac{ب}{ج} = \frac{ا}{ج}$ اس لیے $ب = \frac{ا}{ب+ج}، ج = \frac{ا}{ب+ج} = \frac{ا}{ب+ج} = \frac{ا}{ب+ج}$



اور طول ف، گ معلوم کرنے کے لیے

۵ ا ب ع + ۵ ا ج ع = ۵ ا ع ب = ۵ ا ع ب۔ ۵ ا ع ج
اس لیے ف (ب+ج) جب ۱ = ۱ ف (ج-ب) جم ۱ = ۲ س
پس ف = $\frac{۲}{ب+ج}$ جم ۱ = ۱ ف = $\frac{۲}{ج-ب}$ جب ۱ = ۲ س (۱۳)۔۔۔ (۱۹۷)

مثالیں

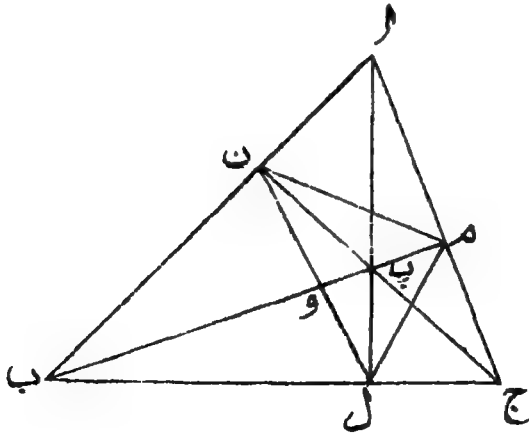
(۱) اگر $\angle A = 90^\circ$ ہو، جو $\angle A$ کے دو ضلعوں AB اور AC کے ساتھ بناتے ہیں تو ثابت کرو کہ $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ۔
(۲) اگر زاویوں کے ماضفوں کو حلقہ دائرہ تک خارج کیا جائے اور ان کے طول نام AD ، BE ، CF ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{AD}{BC} + \frac{BE}{AC} + \frac{CF}{AB} = \frac{AD}{BC} + \frac{BE}{AC} + \frac{CF}{AB} = 1$$

اور $\frac{AD}{BC} + \frac{BE}{AC} + \frac{CF}{AB} = 1$ ۔
(۳) ثابت کرو کہ $\angle A$ ، $\angle B$ ، $\angle C$ کے کوسینت $\cos A$ ، $\cos B$ ، $\cos C$ کے مجموعے میں قطع کرنا ہے۔

مثلث پائیں

۱۵۴۔ ایک مثلث کے راسوں A ، B ، C سے مقابل کے ضلعوں پر عمود AD ، BE ، CF نکلنے گئے ہیں، ان عمودوں کے پایوں کو ملانے سے جو مثلث DEF بنتا ہے اس کو ΔDEF کا مثلث پائیں کہتے ہیں۔



فرض کرو کہ مثلث ا ب ج کا مرکز عمودی پ ہے، تب چونکہ پ م
پ ن قائمہ زاویے ہیں اس لیے ایک دائرہ جس کا قطر پ م ہو شکل
پ م ان کے گرد بھیجا جا سکتا ہے، اس لیے
مرن = پ ا + اُس زاویہ کی جیب جو قطاع م ر ن میں بنتا ہے
یعنی م ر ن = پ ا جب ا

اب اگر مائلط دائرہ کا مرکز O ہو اور OD b ج پر عمود ہو تو یہ ظاہر ہے کہ $ab = 1$ اور ہم نے دفعہ ۱۵ میں یہ بتا دیا ہے کہ $OD = \text{سرجم } a$ اس لیے

من = ۲ سر جب ۱ حجم ۱ = ۱ حجم ۱
 نیز زاویوں پر ۱ ہر ۱ ن میں سے ہر ایک، ۱ کا تم ہے یا ہر ۱ ن
 = ۱۲ - ۱۱، پس مثلث، پائیں کے ضلع اور زاویے علی الترتیب میں

$$(13) \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{ج. حم ب' ج. حم ج} \\ \text{ج. ۲-۱۲ ب' ۲-۱۲ ج} \end{array} \right.$$

یہ توجہ طلب ہے کہ آ آ آ کا مثلث پائیں اب ج ہے۔ ل من کا مثلث پائیں، اب ج کا دوسرا مثلث پائیں کہلاتا ہے اور علیٰ ہذا القیاس۔ ہم نے اوپر یہ مان لیا ہے کہ مثلث حادۃ الزاویہ ہے، اگر زاویہ منفرج ہو تو یہ آسانی سے ثابت ہو سکتا ہے کہ مثلث پائیں کے زاویے ۱۲۰-۱۸۰°، ۲°، ۲° ج میں اور اس کے ضلع - (۱) حجم ا، ب حجم ب، ج حجم ج ہیں۔

مثالیں

(۱) ثابت کرو کہ مثلث LMN کے اندرونی دائرہ کا نصف قطر $\frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ جم ہے۔

(۲) اگر دائروں میں پ، ن، ت، پ، ل، پ، م کے قطر، ہ، ہ، ہ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{پ ج}{ب ج} + \frac{ج ع}{ل ب} + \frac{ع ہ}{ل پ} = ۱$$

(۳) اگر مثلث پائیں کے اندرونی اور جانی دائروں کے نصف قطر، ر، ر، ر، ک، ک، ک، ہوں تو

$$\frac{ر ک}{ر ک} = \frac{ر ک}{ر ک}$$

(۴) اگر ا، ل، ب، م، ج، ن، حاط دائرہ سے نقطوں ل، م، ن پر ہیں تو

$$\frac{ا ل}{ا ل} + \frac{ب م}{ب م} + \frac{ج ن}{ج ن} = ۲$$

خاص نقطوں کے درمیان فاصلے

۱۵۔ فرض کرو کہ مثلث ا، ب، ج کا مرکز عمودی پ، حاط دائرہ کا مرکز و، اندرونی دائرہ کا مرکز آ، ایک جانی دائرہ کا مرکز آ، مرکز ہندسی ث، اور نو نقطی دائرہ کا مرکز ع ہے۔ آ، پ، ج کے مشہور بیٹے کی بموجب تین نقطے و، ث، پ ایک خط منقسم پر واقع ہوتے ہیں اور پ، ث = ۲ و، ث؛ نقطہ ع بھی و، پ پر واقع ہے اور اس کا وسطی نقطہ ہے۔ زاویوں آ، آ، و، آ، پ میں سے ہر ایک، $\frac{۱}{۲}$ (ب، ج) کے مساوی ہے؛ نیز $ا و = س، ا، پ = ۲ س، ا، ج$

$$ا آ = ر، م، ا = ۲ س، ا، ج، ب، ج، ا، ج$$

۱ آ = ۲ س، ا، ج، م، ا، ج، ب، ج، م، ا، ج، پ، آ، ع کے درمیان ایک دوسرے

(199)

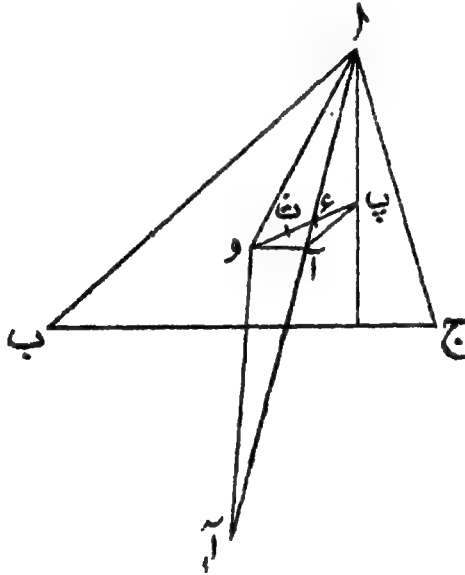
سے جو فاصلے ہیں اُن کے لیے جملے معلوم کر سکتے ہیں۔

(۱) و آ معلوم کرنا۔ فرض کرو آ = ضہ تو حاصل ہوتا ہے

$$\text{ضہ}^۲ = ۱۰ + ۱۰ - ۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰ \text{ جم و آ}$$

اس لیے ضہ = سُر [۱۰ + ۱۰ جب ۱۰ جب ۱۰ ج - ۸ جب ۱۰ جب ۱۰ ج × جم ۱۰ (ب - ج)]

یا ضہ = سُر (۱ - ۸ جب ۱۰ جب ۱۰ جب ۱۰ ج)



پس ہمیں آئیلر کا ضابطہ ضہ = سُر - ۲ سُر ... (۱۵)

حاصل ہوتا ہے و آ معلوم کرنا۔ فرض کرو آ = ضہ تو

ضہ = سُر [۱۰ + ۱۰ جم ۱۰ جب ۱۰ جب ۱۰ ج - ۸ جم ۱۰ جب ۱۰ جب ۱۰ ج جم ۱۰ (ب ج)]

یا ضہ = سُر (۱ + ۸ جب ۱۰ جب ۱۰ جب ۱۰ ج جم ۱۰ ج)

جس سے حاصل ہوتا ہے ضہ = س + ۲ س + ۲ ... (۱۶)

(۳) و پ معلوم کرنا۔ مثلث و ا پ سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{و پ} = \text{و} + \text{ا} + \text{ا پ} - ۲ \text{ و} - ۱ \times \text{ا پ} \text{ جم و ا پ}$$

$$\text{یا و پ} = \text{س} + [۱ + \text{جم} - ۱ - ۲ \text{ جم} + \text{جم} (ب - ج)]$$

جس سے حاصل ہوتا ہے و پ = س (۱ - ۱ جم + ۱ جم ب جم ج) ... (۱۷)

(۴) آ پ معلوم کرنا۔ ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{آ پ} = ۲ \text{ س} + \text{جم} + ۱ + ۱۶ \text{ س} + \text{جم} + ۱ \text{ ب جب} + ۱ \text{ ج}$$

$$- ۱۶ \text{ س} + \text{جم} + ۱ \text{ ب جب} + ۱ \text{ ج} - \text{جم} (ب - ج)$$

اس لیے آ پ = س { ۲ + (۱ - جم ب) + (۱ - جم ج) - جم ا جب ب جب ج

$$- \text{جم} (۱ - جم ب) (۱ - جم ج) }$$

یا آ پ = س { (۱ - جم) + (۱ - جم ب) (۱ - جم ج) - جم ا جب ب جم ج }

.... (۱۸)

یا آ پ = ۲ - ۲ س + ۲ س + ۱ جم ب جم ج

(۵) آ ع معلوم کرنا۔ ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{آ ع} = \text{آ پ} + \text{ا} + \text{ا و} - \frac{1}{2} \text{ و پ}$$

$$\text{اس لیے آ ع} = \text{ر} + \frac{1}{2} \text{ س} - \text{س} - \frac{1}{2} \text{ س} = \text{س} - \frac{1}{2} \text{ س}$$

$$\text{اس لیے آ ع} = \frac{1}{2} \text{ س} - \text{س}$$

اسی طرح یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ آ ع = ۱/۲ س + ۱/۲ س - ۱/۲ س - ۱/۲ س

نقطی دائرہ کا نصف قطر ہے اس لیے آء، آء کے لیے جو چلے ہم نے حاصل کیے ہیں ان سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اندرونی اور جانبی دائرے نقطی دائرہ کو مس کرتے ہیں۔ پس نیورباک (Feuerbach) کا مسئلہ علم مثلث کے ذریعہ ثابت ہو چکا، اس مسئلہ کے متعدد ہندسی ثبوت دیے گئے ہیں۔

مثالیں

(۱) اگر جانبی دائروں کے مرکزوں سے حائط دائرہ کے تماس کھینچ جائیں اور ان کے طول ج، ج، ج ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{\frac{1}{ج} + \frac{1}{ج} + \frac{1}{ج}} = \frac{1}{\frac{1}{ج} + \frac{1}{ج} + \frac{1}{ج}}$$

(۲) ثابت کرو کہ مثلث آ و پ کا رقبہ ہے

$$۲ - \frac{1}{ج} \left(\frac{1}{ج} - \frac{1}{ج} \right) \left(\frac{1}{ج} - \frac{1}{ج} \right) \left(\frac{1}{ج} - \frac{1}{ج} \right)$$

(۳) ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{ج} = \frac{1}{ج} + \frac{1}{ج} + \frac{1}{ج}$$

اور ث آ + م م ر = $\frac{1}{ج} (ج + ج + ج) - \frac{1}{ج} (ج + ج + ج)$

(۴) ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{ج} = \frac{1}{ج} + \frac{1}{ج} + \frac{1}{ج}$$

(۵) اگر راسوں سے نقطی دائرہ کے مرکز کے فاصلے م، م، م ہوں اور

مرکز عمودی سے اس کا فاصلہ ثابت ہو تو ثابت کرو کہ

$$ع^۲ + ب^۲ + ج^۲ + ث^۲ = ۳ س^۲$$

(۶) ثابت کرو کہ نو نقطی دائرہ حائل دائرہ کو قطع نہیں کرتا الا اس صورت کے جبکہ مثلث کا ایک زاویہ منفرج ہو اور اس صورت میں یہ دائرے ایک دوسرے کو زاویہ

$$ج^۲ = (۱ + ۲ + ۱) جم بٹ جم ج$$

پر ملے کرتے ہیں۔

(۷) اگر حائل دائرہ کے مرکز اور مرکز عمودی کے درمیان فاصلہ $\frac{1}{2}$ ہو تو

(201)

ثابت کرو کہ یا مثلث قائم الزاویہ ہے، یا مس ب مس ج = ۹

(۸) اگر نو نقطی دائرہ کا مرکز ق ہو تو ثابت کرو کہ

$$(ق آ - ق ب) (ق ب - ق ج) = (ق آ - ق ج) (ق ب - ق ج)$$

(۹) اگر و آ پ ایک مساوی الاضلاع مثلث ہو تو ثابت کرو کہ

$$ج^۲ = ۳ + جم ب + جم ج = ۳$$

(۱۰) اگر اندرونی دائرہ کا مرکز، حائل دائرہ کے مرکز اور مرکز عمودی سے

مساوی الفاصل ہو تو ثابت کرو کہ مثلث کا ایک زاویہ ۹۰° ہے۔

مثلث کے رقبہ کے لیے جملے

۱۵۹ — مثلث کے رقبہ کے لیے اس سے متعلق مختلف خطوط

اور زاویوں کی قیوم میں تعلقات کی ایک بہت بڑی تعداد مندرجہ

ہو چکی ہے۔ ایسے بہت سے ضابطے Mathesis. Vol. III میں اور

Annals of math. Vol. I. No. 6 میں دیے گئے۔

ان میں سے چند ضابطے ہم ذیل میں درج کرتے ہیں اور ان کی تصدیق کا

کام طالب علم پر مشق کے طور پر چھوڑتے ہیں :-

$$[۱] \frac{1}{2} (۲) \frac{1}{2} (۳) \frac{1}{2} (۴) \frac{1}{2} (۵) \frac{1}{2} (۶) \frac{1}{2} (۷) \frac{1}{2} (۸) \frac{1}{2} (۹) \frac{1}{2} (۱۰) \frac{1}{2}$$

جہاں $\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} = 2$ (۳) $\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} = 2$ (۳)

(۵) $\frac{1}{f} + \frac{1}{g} + \frac{1}{h} = 2$ (۵) $\frac{1}{f} + \frac{1}{g} + \frac{1}{h} = 2$ (۵)

(۶) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$ (۶) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$ (۶)

(۸) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$ (۸) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$ (۸)

مثلثوں کے مختلف خواص

۱۶۰۔ اگر مثلث ا ب ج کے متوی میں کوئی نقطہ ہو تو ہمیں متاثر شدہ
 Δ ق ب ج + Δ ق ج ا + Δ ق ا ب \equiv Δ ا ب ج
 حاصل ہوتا ہے جبکہ ان مثلثوں کے رقبے جن کا اس قی ہے واجب
 علامت کے ساتھ لیے جائیں؛ مثلاً Δ ق ب ج منفی ہوگا اگر ق
 اور ا ب ج کی مخالف جانبوں میں واقع ہوں۔ ق کو
 مختلف مقامات پر لینے سے مثلث کے زاویوں کے درمیان
 مختلف مشہور رشتے حاصل ہوتے ہیں۔
 (۱) فرض کرو کہ ق، و پر منطبق ہوتا ہے تو متذکرہ صدر رشتہ ہو جاتا ہے
 جب ۱ + جب ۲ ب + جب ۲ ج = ۲ جب ۱ جب ۲ ب جب ج
 کیونکہ زاویے ب و ج ج و ا، ا و ب علی الترتیب ۱، ۲، ۳
 ج ہیں۔

(202)

(۲) فرض کرو کہ ق، آ پر ہے تو ہمیں رشتہ حاصل ہوتا ہے

$$\text{جب } \frac{1}{p} \text{ جب } \frac{1}{p} (\text{ب} + \text{ج}) + \text{جب } \frac{1}{p} \text{ ب جب } \frac{1}{p} (\text{ج} + ۱)$$

$$+ \text{جب } \frac{1}{p} \text{ ج جب } \frac{1}{p} (۱ + \text{ب}) = ۲ \text{ جم } \frac{1}{p} \text{ ۱ جم } \frac{1}{p} \text{ ب جم } \frac{1}{p} \text{ ج}$$

(۳) فرض کرو کہ ق، ۶ پر ہے تو

$$\text{جب } ۱ \text{ جم } (\text{ب} - \text{ج}) + \text{جب } \text{ب جم } (\text{ج} - ۱) + \text{جب } \text{ج جم } (۱ - \text{ب})$$

$$= ۲ \text{ جب } ۱ \text{ جب } \text{ب جب } \text{ج}$$

۱۶۱ ————— دفعہ سابق کا مثانلہ رشتہ جو ایک مستوی میں کے کسی چار نقطوں ا، ب، ج، ق کے باہمی چھ فاصلوں کے درمیان قائم رہتا ہے متعدد شکلوں میں بیان کیا جا سکتا ہے۔

(۱) مساوات $\Delta \text{ ق ب ج} + \Delta \text{ ق ج ۱} + \Delta \text{ ق ۱ ب} = \Delta \text{ ا ب ج}$

کو استعمال کرنے اور ان چار مثلثوں میں سے ہر مثلث کے رقبہ کو اس کے ضلعوں کی رقوم میں بیان کرنے سے مطلوبہ رشتہ ایک ایسی شکل میں ملتا ہے جس میں چار جذر المربع شامل ہوتے ہیں۔

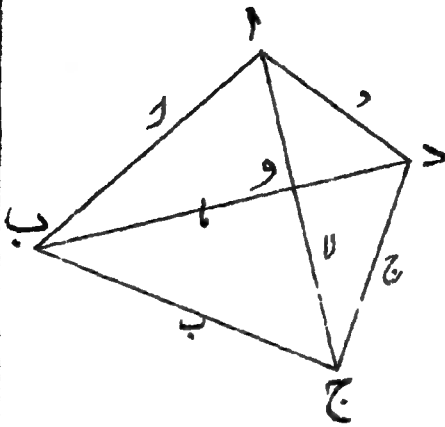
(۲) اسی ربط کو منطق شکل میں حاصل کرنا ہو تو زاویوں ب ق ج، ج ق ۱، ۱ ق ب کو علی الترتیب ۱، ۲، ۳ سے تعبیر کرو تو چونکہ ۱ + ۲ + ۳ = ۱۸۰ ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$۱ - \text{جم } ۱ - \text{جم } ۲ - \text{جم } ۳ = ۰$$

اب جم ۱ کی بجائے اس کی قیمت (ق ب + ق ج - ب ج) / ۲ ق ب بد ق ج درج کرنے سے اور علیٰ ہذا جم ۲ اور جم ۳ کی بجائے ان کی متناظر قیمتیں رکھنے سے ہمیں مطلوبہ رشتہ حاصل ہو جاتا ہے۔

۱۶۲ ————— کسی مثلث کے ضلعوں اور زاویوں کے درمیان کوئی عام رشتہ لیکر اس سے دوسرا رشتہ اخذ کیا جا سکتا ہے اگر ان ضلعوں اور

(204)



ہے۔ ضلعوں (ب، ب، ج)
ج د ا کو علی الترتیب
و، ب، ج د سے اور
و تروں ا ج، ب د
کو علی الترتیب لا، ا سے
تبعیہ کرو، نیز فرض کرو کہ (ا)
ج = ۲ = ۲ اور فہ = و تروں
کا درمیان فی زاویہ -

ہم ذواربعۃ الاضلاع کے رقبہ میں کے لیے ایک حملہ، و، ب، ج
د اور ص کی رقوم میں معلوم کریں گے۔ چونکہ

$$ا^۲ = ا^۲ + د^۲ - ۲ ا د ج = ب^۲ + ج^۲ - ۲ ب ج ج$$

$$اس لیے ا د ج = ۱ - ب ج ج = \frac{۱}{۲} (ا^۲ + د^۲ - ب^۲ - ج^۲)$$

$$ا د ج ب = ۱ + ب ج ج = ۲$$

نیز ان مساواتوں کی متناظر طرفوں کا مربع لیا اور جمع کر تو

$$ا^۲ د^۲ + ب^۲ ج^۲ - ۲ ا ب ج د ج = ۲ + ۲ + ۲ + ۲ - ۲ (ا^۲ + د^۲ - ب^۲ - ج^۲)$$

$$پس ۱۶ س = ۴ (ا د + ب ج) - (ا^۲ + د^۲ - ب^۲ - ج^۲) - ۱۶ ا ب ج د ج$$

$$یا ۱۶ س = (ا د + د ا - ب ج - ج ب) - (ا^۲ + د^۲ - ب^۲ - ج^۲) - ۱۶ ا ب ج د ج$$

$$- ۱۶ ا ب ج د ج$$

$$اس لیے س = (س - ا) (س - ب) (س - ج) (س - د)$$

$$- ا ب ج د ج = ... (۱۹)$$

$$س = ۲ = ا + ب + ج + د$$

جہاں

اُس ذواربعۃ الاضلاع کی صورت میں جس کے گرد ایک دائرہ

کھینچا جاسکے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$11 = 2$$

اس لیے $س^2 = (س - ۱) (س - ب) (س - ج) (س - د)$
جملہ (۱۹) سے یہ ظاہر ہے کہ وہ ذواربعۃ الاضلاع جس کے ضلع دیے گئے

ہوں بڑے سے بڑے رقبہ والا ہوگا جبکہ $س = \frac{1}{4} 11$ ، یعنی جبکہ ذواربعۃ الاضلاع
ایک دائرہ کے اندر کھینچا جاسکے۔

مسئلہ (۲۰) کو برہما گیتا (Brahma-gita) نے، جو چھٹی صدی مسیح
میں ایک ہندو مہندس نے لکھا ہے، دریافت کیا تھا۔

۱۶۵ — ذواربعۃ الاضلاع کے رقبہ کے لیے یہ پتہ معلوم کیے
جاسکتے ہیں جن میں وتر وتر کے طول اور ان کا درمیانی زاویہ
شامل ہوں۔

ذواربعۃ الاضلاع کا رقبہ ان چار مثلثوں کے رقبوں سے مجموعہ
کے مساوی ہے جن میں یہ ذواربعۃ الاضلاع وتر وتر سے تقسیم ہوا ہے
اب چونکہ ان میں سے ہر مثلث کا رقبہ
$$= \frac{1}{2} \times \text{وتروں کے ان دو متقاطعہوں کا حاصل ضرب}$$

مثلث کے ضلع میں x جب فہ

جہاں فہ وتروں کا درمیانی زاویہ ہے اس لیے پانچوں مثلثوں کے رقبوں کو جمع کرنے سے

$$س = \frac{1}{4} \text{ لانا واجب نہ } \dots \dots \dots (۲۱)$$

نیز چونکہ $۱۵۱ \times د ب = ح م ف = و ا + و ب + و ج + و د$

$$۱۵۲ \times و ج = د د ح م ف = و ج + و د + و ا + و ب$$

$$۱۵۱ \times و د = د د ح م ف = و د + و ا + و ب + و ج$$

$$۱۵۲ \times و ا = ح م ف = و ا + و ب + و ج + و د$$

اس لیے ۲ لا ماحم نہ = ب^۲ + د^۲ - ج^۲ (۲۲) . . .

اس لیے سی = $\frac{1}{4}(ب^2 + د^2 - ج^2)$ مس نہ (۲۳) (205)
اور نہ کو ساقط کرنے سے ہمیں بریشنی ڈے (Bretschneider) کا غابط

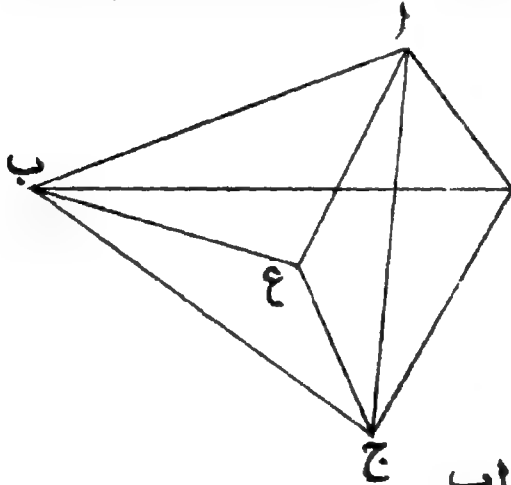
سی = $\frac{1}{4}(ب^2 + د^2 - ج^2)$ مس نہ (۲۴) . . .
حاصل ہوتا ہے جو ذواربعتہ الاضلاع کے رقبہ کو ضلعوں اور وتروں کی رقوم میں بیان کرتا ہے۔

اگر ذواربعتہ الاضلاع میں ایک دائرہ بنایا جاسکے تو $ج + د = ب + د$ اس لیے ضابطے (۲۳) اور (۲۴) ہو جاتے ہیں

$$سی = \frac{1}{4}(ج + د - ب)(ج - د + ب)$$

$$سی = \frac{1}{4}[لا^2 - (ج + د - ب)^2]$$
 اور

۱۶۶ — ذواربعتہ الاضلاع کے وتروں کے حاصل ضرب کے لئے ایک جملہ ضلعوں اور دو متقابلہ زاویوں کے حاصل جمع کی جیب تمام کی رقوم میں معلوم کیا جاسکتا ہے۔



ب اور ج سے
خطوط مستقیم ب ع اور
ج ع کھینچو ایسے کہ زاویہ
ج ب ع، ج ع د، ج ع ب، ج ع د
علی الترتیب زاویوں
ا ب د، ا د ب کے
ساوی ہوں مثلث
ج ب ع، ج ع د
متشابه ہیں اس لئے

$$\frac{ا ب}{ج ب} = \frac{ب د}{ج د} = \frac{ج د}{ج ب}$$

اس طرح $ا د \times ج ب = ب د \times ج ع$

نیز یہ کہ زاویے $ج ب د$ ، $ا ب ع$ مساوی ہیں اور

$ا ب : ب ع = ب د : ب ج$

اس لیے مثلث $ا ب ج$ ، $ج ب د$ متشابه ہیں اور اس لیے

$ا ب \times ج د = ب د \times ج ا$

اب چونکہ $ا ج^2 = ا ع^2 + ع ج^2 - ۲ ا ع \times ج ع \cos(ا + ج)$

اس لیے $ب د$ سے ضرب دینے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$لا^2 = ا ج^2 + ب د^2 - ۲ ا ب ج \cos(ا + ج)$ (۲۵)

اگر $ا = ۹۰^\circ$ تو ٹولمی کا مسئلہ $لا = ا ج + ب د$ حاصل ہوتا ہے جو ایسے ذواربعتہ الاضلاع کے لیے صحیح ہے جو ایک دائرہ کے اندر کھینچا جاسکے۔

اگر $ا = ۹۰^\circ$ تو $لا^2 = ا ج^2 + ب د^2$ اور ایسے ذواربعتہ الاضلاع کے لیے صحیح ہے جس میں دو متقابلہ زاویوں کا حاصل جمع ایک زاویہ قائمہ ہو۔

۱۶۷۔ اس ذواربعتہ الاضلاع کی

صورت میں جو ایک دائرہ کے اندر کھینچا جاسکے

وتروں $لا$ ، $ما$ کے اور اس میں سے وتر کے

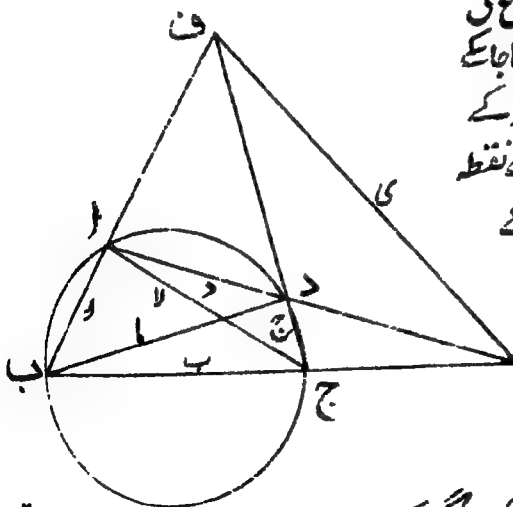
طولوں کو جو ضلعوں $ا د$ اور $ج ب$ کے نقطہ

تقاطع کو ضلعوں $ب د$ اور $ج ا$ کے

نقطہ تقاطع سے ملانے سے متشابه

ضلعوں کی رقوم میں معلوم

کیا جاسکتا ہے۔



نیز اس کو کہ تیسرا وتر

فگ ہے اور ا ج، ب د، فگ کے طول علی الترتیب $لا$ ، $ما$ سے تعبیر ہوتے

ہیں۔ تب چونکہ

$$لا^۲ = د^۲ + ب^۲ - ۲ د ب \cos ب$$

$$لا^۲ = ج^۲ + د^۲ - ۲ ج د \cos د$$

اور

$$اس لیے لا^۲ \left(\frac{1}{ج د} + \frac{1}{د ب} \right) = \frac{د^۲ + ب^۲}{ج د} + \frac{ج^۲ + د^۲}{د ب}$$

$$پس لا^۲ = (د ج + ب د) (د ج + ب د) \backslash (د ب + ج د) (د ب + ج د)$$

(۲۶).....

اور اسی طرح یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ

$$ما^۲ = (د ج + ب د) (د ب + ج د) \backslash (د ب + ج د) (د ب + ج د)$$

نیز چونکہ

(207)

$$فا = د جب د = \frac{د لا}{د ب + ج د + لا ج م}$$

$$اور اسی طرح فب = \frac{ب ا}{د ب + ج د + لا ج م}$$

$$اس لیے \frac{فا}{دلا} = \frac{فب}{ب ا} = \frac{فب - فا}{ب ا - دلا} = \frac{ا}{ب ا - دلا}$$

$$پس فا \times فب = \frac{ا^۲ ب دلا}{۲ (ب ا - دلا)}$$

اسی طرح یہ دکھایا جاسکتا ہے

$$گج \times گب = \frac{ب^۲ ا ج لا}{۲ (ا ج - لا ج لا)}$$

اب چونکہ فگ پر کا مربع، ف اور گ سے دائرہ تک کھینچے ہوئے

عماموں پر کے مربعوں کے مجموعہ کے مساوی ہے (دیکھو Mc Dowell's Geometry

صفحہ ۹۲) اس لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$ی = لا ا \left\{ \frac{ب^۲ ا ج لا}{۲ (ا ج - لا ج لا)} + \frac{ا^۲ ب دلا}{۲ (ب ا - دلا)} \right\}$$

اب لا اور ۱ کی ان قیمتوں سے جو اوپر حاصل ہو چکی ہیں ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{لا}{رد + ب ج} = \frac{۱}{وب + ج د} = \frac{ب - ۱ - د لا}{وب - ۱ - د لا} = \frac{۱ - ۱ - ج لا}{ب - ۱ - ج لا}$$

اس لیے ی کے مندرجہ بالا جملہ میں اندہ ا ج کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$۱ = (رد + ب ج) (وب + ج د) \left\{ \frac{۱ - ج لا}{ب - ۱ - ج لا} + \frac{ب - ۱ - د لا}{وب - ۱ - د لا} \right\} \dots (۲۰)$$

مثالیں

(۱) اگر ذواربعۃ الاضلاع ایک دائرہ کے اندر کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ دائرہ

کے نصف قطر ہے

$$\frac{۱}{۲} \left\{ \frac{(وب + ج د) (رد + ب ج) (۱ ج + ب د)}{(س - ۱) (س - ج) (س - د)} \right\} = \frac{۱}{۳}$$

(۲) ثابت کرو کہ نصف قطر کے دائرہ کے مرکز اور اس دائرہ کے اندر کھینچے ہوئے ایک ذواربعۃ الاضلاع کے وتروں کے نقطہ تقاطع کے درمیان فاصلہ

$$\frac{۱}{۲} \frac{(وب + ج د) (رد + ب ج) (۱ ج + ب د)}{(س - ۱) (س - ج) (س - د)} = ۱$$

(۳) ثابت کرو کہ ایک دائرہ میں کھینچے ہوئے ذواربعۃ الاضلاع کے وتر

ایک دوسرے سے ذیل کے زاویہ پر ملتے ہیں

$$\frac{۱}{۲} \frac{(وب + ج د) (رد + ب ج) (۱ ج + ب د)}{(س - ۱) (س - ج) (س - د)} = ۱$$

اور نیز ثابت کرو کہ ایک وتر کے مقطوعوں کا حاصل ضرب ہے

$$\frac{وب ج د (۱ ج + ب د)}{(وب + ج د) (رد + ب ج)}$$

(۴) اگر ایک ذواربعۃ الاضلاع ایک دائرہ میں کھینچا جائے اور اس کا رقبہ (س) ہو تو ثابت کرو کہ متقابلہ ضلعوں کے نقاط وسطی کو ملانے والے خطوط متقیم ہر دو پر

$$\left\{ \frac{(د+ب)(ج+د)}{ج+د} \times \frac{س}{(ب+س)(ج+س)} \right\}$$

(208) (۵) اگر ایک دائرہ میں کھینچے ہوئے ذوالربعۃ الاضلاع کے تین دتروں میں سے دو دو کے نقاط تقاطع، ف، گ ہوں تو ثابت کرو کہ مثلث ف گ کے رقبہ کو ذوالربعۃ الاضلاع کے رقبہ سے نسبت ہے

اَبْجَا: (اَبْجَا) (اَبْجَا) (اَبْجَا)

(۶) ثابت کرو کہ ایک ذواربعۃ الاضلاع کا رقبہ جس کے اندر ایک دائرہ کھینچا جا سکتا ہے

اوج د جب $\frac{1}{2}$ (۱+ج) ہے۔ نیز ثابت کرو کہ ارد جب $\frac{1}{2}$ = اوج جب $\frac{1}{2}$ ج

(۷) اگر چار خطوط مستقیم دیئے جائیں تو ان سے تین جداگانہ ذوالرباعۃ الاضلاع بنائے جاسکتے ہیں جن میں سے ہر ایک، ایک دائرہ میں کھینچا جاسکتا ہے۔ ان کے رقبے مساوی ہوتے ہیں، ان کے وہ چہرہ و تہہ جو دائرہ کے اندر متقاطع ہوتے ہیں زوج زوج مساوی ہوتے ہیں؛ اور اگر ان خطوں کے طول نہ برابر ہوں اور مشترک رقبہ سے اور دائرہ کا نصف قطر سے ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{2.25}{2.5} = 0.9$$

(۸) دو مثلثوں کے رقبوں کا فرق جن کے قاعدے ایک ذواربعۃ الاضلاع کے ضلع ب، و ہیں اور جن کے اس ذواربعۃ الاضلاع کے وتروں کے نقطۃ تقاطع پر منطبق ہوتے ہیں حسب ذیل ہوگا

$$\sqrt{(r_2 - r_1 - r_1 + r_0) - r_2 r_1} \cdot \frac{1}{r}$$

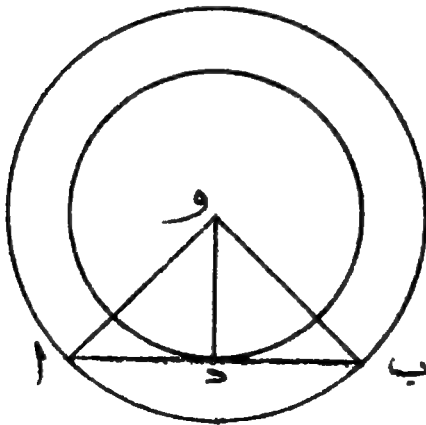
(۹) اگر ایک ذواربعتہ الاضلاع ایسا ہو کہ وہ سب مستطیل جو اس کے گرد کھینچے جاسکتے ہیں متشابه ہیں تو ثابت کرو کہ $ا^۲ + ج^۲ = ب^۲ + د^۲$
 (۱۰) ایک ذواربعتہ الاضلاع ایسا ہے کہ ایک دائرہ اس کے گرد کھینچا جاسکتا ہے اور دوسرا اس کے اندر؛ ثابت کرو کہ اس دوسرے دائرہ کا نصف قطر $\frac{۲}{ا + ب + ج + د}$ ہے۔

(۱۱) اگر ایک ذواربعتہ الاضلاع کے وتر نقطہ و پر قطع کریں تو ثابت کرو کہ

$$رَبِّ اَوْ ب \times رَبِّ اَب ج د = رَبِّ اَب ج \times رَبِّ ا ب د$$

منظم کثیر الاضلاعوں کے خواص

۱۶۸۔ فرض کرو کہ و، اُن دائروں کا مرکز ہے جو ضلعوں والے ایک منظم کثیر الاضلاع کے گرد اور اس کے اندر کھینچے گئے ہیں۔ فرض کرو کہ قبل الذکر دائرہ کا نصف قطر سما ہے اور مابعد الذکر دائرہ کا نصف قطر ر، اور فرض کرو کہ کثیر الاضلاع کے ایک ضلع کا طول ا ہے۔



(209) اگر کثیر الاضلاع کا ایک ضلع اب رہو اور اندرونی دائرہ کے ساتھ

اس کا نقطہ تماس د ہو تو زاویہ ا و ب = $\frac{\pi}{n}$ اور زاویہ د و ا = $\frac{\pi}{n}$ پس

$$1 = 2\pi \text{ جب } \frac{\pi}{n} = 2\pi \text{ مس } \frac{\pi}{n} \dots \dots \dots (28)$$

اس طرح دائروں کے نصف قطر معلوم ہو جاتے ہیں اگر ایک ضلع دیا گیا ہو۔ مثلث و اب کا رقبہ ہے

$$\frac{1}{2} \text{ مس } \frac{\pi}{n} \text{ جب } \frac{\pi}{n} \text{ یا } \frac{1}{2} \text{ ر، یا } \frac{1}{2} \text{ مس } \frac{\pi}{n}$$

اس لیے کثیر الاضلاع کا رقبہ

$$\frac{1}{2} n \text{ مس } \frac{\pi}{n} \text{ یا } \frac{1}{2} n \text{ ر مس } \frac{\pi}{n} \dots \dots (29)$$

یہ امر مشاہدہ طلب ہے کہ ایک دائرہ کے اندر یا گردن ضلعوں والے منظم کثیر الاضلاع کے کھینچنے کا سوال زاویہ $\frac{\pi}{n}$ کے دائری تفاعل کی تعیین کے سوال میں تحویل ہوتا ہے۔

۱۶۹ ————— مثالیں

(۱) ایک مثلث کے ضلعوں ا، ب، ج کو قطر مانکر دائرے کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ اُس دائرہ کا قطر جو ان تین دائروں کو بیرونی طور پر مس کرتا ہے ایسا ہے کہ

$$\sqrt{\frac{ق}{س-ا}} + \sqrt{\frac{ق}{س-ب}} + \sqrt{\frac{ق}{س-ج}} = 1 - \sqrt{\frac{ق}{س}}$$

اگر دیئے ہوئے مثلث کے ضلعوں کے نقاط وسطی د، ع، ف ہوں اور
اُس دائرہ کا مرکز وہو جس کا قطر ہے تو

$$ود = \frac{1}{2}(ق-ا) \quad وع = \frac{1}{2}(ق-ب) \quad وف = \frac{1}{2}(ق-ج)$$

نیز مثلث د ع ف کے ضلع $\frac{1}{2}ا$ ، $\frac{1}{2}ب$ ، $\frac{1}{2}ج$ ہیں، پس رشتہ

$$۵ وع ف + ۵ وف د + ۵ ود ع = ۵ د ع ف$$

میں مثلثوں کے رقبوں کو ضلعوں کی رقوم میں بیان کرنے سے مشابہہ رشتہ حاصل
ہو جاتا ہے۔

(۲) ایک نقطہ پ سے مثلث ا ب ج کے ضلعوں پر عمود پ ل
پ م، پ ن کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث ل م ن کا رقبہ ہے
 $\frac{1}{2}(س-ا-ب-ج)$

جس میں ف سے وہ فاصلہ م ر ہے جو پ اور حاطہ دائرہ کے مرکز کے درمیان ہے۔
و پ کو خارج کرو تا کہ وہ حاطہ دائرہ سے نقطہ ا پ پر ملے، پ سے مثلث کے
ضلعوں پر عمود پ ل، پ م، پ ن کھینچو تو ان سے پائیں ایک خط استقیمہ پر
واقع ہوتے ہیں جس کو اس مثلث سے لحاظ سے پ کے برائے پائیں کہتے ہیں۔ ایک نقطہ
سے ایک مثلث کے ضلع پر جو عمود کھینچا جائے وہ مثبت شمار ہوتا ہے اگر نقطہ اسی جانب
واقع ہو جس جانب ضلع کے مقابل کا زاویہ واقع ہے اور منفی شمار ہوتا ہے اگر نقطہ
مذکورہ بالا جانب کے مقابل واقع ہو۔

$$ابہیں حاصل ہوتا ہے \quad \frac{پ ل - ود}{پ ل - ود} = \frac{د پ}{و پ} = \frac{ف}{س}$$

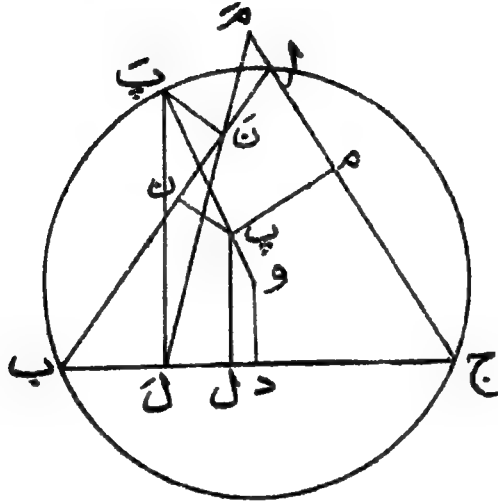
(210)

$$اس لیے پ ل = (س-ف) \cdot جم + ا \cdot ف$$

اسی طرح پ م، پ ن کے لیے مشابہہ جملے ملتے ہیں۔ اب

$$۵ ل م ن = پ م \times پ ن جب + پ ن \times پ ل جب + پ ل \times پ م جب$$

$$= (ف - ر) \times ج ب ا . ج ب ا . ج ب ا + \frac{ف}{ر} \times ج ب ا \times ج ب ا + \frac{ف}{ر} \times ج ب ا \times ج ب ا$$



نیز $\frac{1}{r} \times ج ب ا \times ج ب ا \times ج ب ا = شلث ل م ن$ کا رقبہ ہے جو صفر ہے اور

$$\frac{1}{r} \times ج ب ا \times ج ب ا \times ج ب ا = \frac{1}{r} \times ج ب ا \times ج ب ا \times ج ب ا = \frac{1}{r} \times ج ب ا \times ج ب ا \times ج ب ا$$

اور $ج ب ا . ج ب ا . ج ب ا = ج ب ا . ج ب ا . ج ب ا$

پس $ل م ن = (ف - ر) \times ج ب ا . ج ب ا . ج ب ا + ۲ \times (ف - ر) \times ج ب ا$

$$\times ج ب ا . ج ب ا . ج ب ا = (ف - ر) \times ج ب ا . ج ب ا . ج ب ا$$

(۳) اگر 'ا' ب 'ج' کوئی تین ثابت نقطے ہوں اور 'پ' کوئی نقطہ ایک دائرہ پر ہوں جس کا مرکز وہی ہے تو ثابت کرو کہ اس دائرہ پر 'پ' کے تمام مقامات کے لیے

$$ا پ \times ج ب ا + ج ب ا \times ج ب ا + ج ب ا \times ج ب ا = ا ب \times ج ب ا$$

مستقل ہے۔

زاویوں ب وج ج د ا ا د ب کو ع ب ب سے تعبیر کرو تو ع + ب + ج

$$= \pi ۲، \text{ فرض کرو کہ زاویہ پ د ا } = ط - اب چونکہ$$

$$ا پ = و پ + و ا - ۲ و ا \times د پ \text{ جم ط}$$

مع ب پ ا ج پ ا کے لیے متشابہ جلوں کے، اس لیے مندرجہ بالا جملہ

$$= و پ \times ۵ ا ب ج + ۳ و ا ا ب و ج - ۲ و پ ۳ و ا \times ۵ ب و ج \text{ جم ط}$$

(211) اس جملہ کی پہلی دو قسمیں، دائرہ پر پ کے محل پر منحصر نہیں ہیں اور آخری رقم میں ۲ و پ کا

$$\frac{1}{4} و ا \times د ب \times و ج \text{ جم ط جب ع + جم (ط + ج) جب ب + جم (ب - ط) جب ج}$$

$$\text{یا } \frac{1}{4} و ا \times د ب \times و ج \text{ جم ط (جب ع + جب ب جم ج + جم ب جب ج)}$$

اور یہ جملہ صفر ہے، اس لیے مسئلہ ثابت ہو چکا۔

اس مسئلہ کی مخصوص صورتیں حسب ذیل ہیں :-

$$(۱) پ ا جب ۲ + پ ب ا جب ۲ + پ ج ا جب ۲ \text{ مستقل ہے جبکہ}$$

پ، حاطہ دائرہ پر واقع ہوتا ہے۔

$$(ب) پ ا جب ۱ + پ ب ا جب ب + پ ج ا جب ج \text{ مستقل ہے جبکہ پ}$$

اندرونی دائرہ پر واقع ہوتا ہے۔

$$(ج) پ ا جب ۱ جم (ب - ج) + پ ب ا جب ب جم (ج - ا) +$$

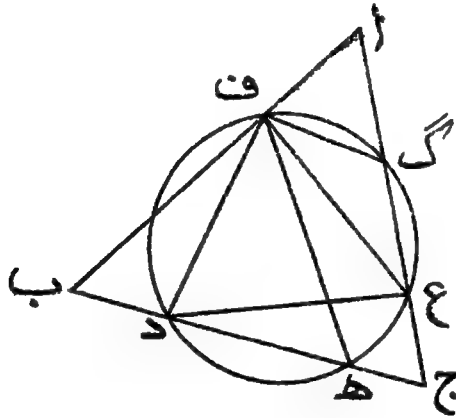
$$پ ج ا جب ج جم (ا - ب) \text{ مستقل ہے جبکہ پ، نو نقطی دائرہ پر واقع ہوتا ہے}$$

(۲) ثابت کرو کہ اُس اقل متساوی الامتلاخ مثلث کے ضلع کا طول

$$\frac{-۲۶۵۲}{۵۳۶ + ۴ + ج + ب + ا}$$

ہے جو ایک دیے ہوئے مثلث ا ب ج کے اندر کھینچا جاسکے اس طور پر کہ اس کے ر اس دیے ہوئے مثلث کے ضلعوں پر واقع ہوں، جملہ بالا میں ۵ سے مثلث ا ب ج کا رقبہ مراد ہے۔

فرض کرو کہ ایسا تساوی الاضلاع مثلث د ع ف ہے اور فرض کرو کہ د ع ف کا حائلہ دائرہ ب ج اور ا ج کو علی الترتیب ہ اور گ میں قطع کرتا ہے، زاویوں ف گ ا، ف ہ ب میں سے ہر ایک ۹۰ ہے، اور اس لیے ف گ، ف ہ ثابت سمتوں میں ہیں، نیز زاویہ ہ ف گ = ۱۲۰ - ج



اگر ا ف کو لا سے تعبیر کریں تو

$$\text{ف گ} = \frac{\text{لا جب ا}}{\text{جب ۹۰}}، \text{ف ہ} = \frac{\text{لا جب ب}}{\text{جب ۹۰}}$$

اس لیے ہ گ = ۹۰ - [لا جب ا + (ج - لا) جب ا - ۲ (ج - لا) جب ب]

$$\times \text{ جب ا جب ب جم } (۱۲۰ - ج)$$

اب دائرہ کا نصف قطر ہے ہگ ۲ جب (۱۲۰-ج) پس دائرہ اقل ہرگا
جکہ ہگ اقل ہو۔ اب کسی دو درجی جملہ لہ لا + ۲ مہ لا + نہ کی اقل قیمت
نہ - $\frac{۲}{۳}$ ہے (جہاں لہ مثبت ہے) کیونکہ لہ لا + ۲ مہ لا + نہ اس شکل لہ (لا + $\frac{۲}{۳}$) +
نہ - $\frac{۲}{۳}$ میں لکھا جاسکتا ہے۔ اس لیے ہگ جب ۹۰ کی اقل قیمت کے لیے حاصل ہوتا ہے
[ج جب ب - {ج جب ا + ج جب ا جب ب جم (۱۲۰-ج)}] $\frac{۱}{۲}$
ج ب ا + ج ب ب + ۲ جب ا جب ب جم (۱۲۰-ج)

$$= \frac{\text{ج جب ا جب ب جب (۱۲۰-ج)}}{\frac{۱}{۲} \{ \text{ج ب ا} + \text{ج ب ب} + ۲ \text{ جب ا جب ب جم (۱۲۰-ج)} \}}$$

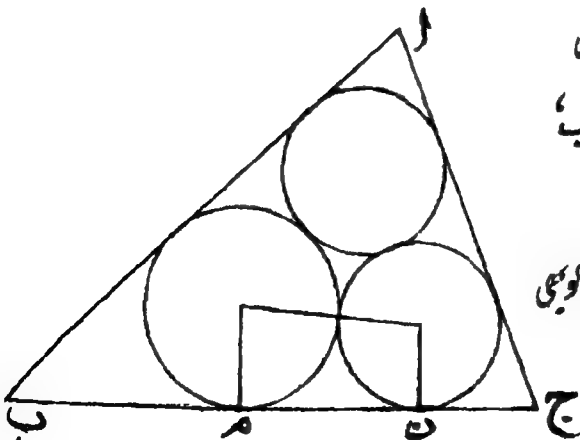
$$= \frac{[\text{ج} \text{ جب ا جب ب جب (۱۲۰-ج)}]}{\text{ج ب ج} [\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + ۲ \text{ مہ لا} + ۵]}$$

اب مساوی الاسلاع کا ضلع ہے ہگ جب ۹۰ جب (۱۲۰-ج) پس اس ضلع

$$\frac{۲۱۵۲}{۵۳۶۴ + \text{ج} + \text{ب} + \text{ا}}$$

کی اقل قیمت ہے

(۵) تین دائرے
بناؤ جو باہم مس کریں
اور ان میں سے ہر ایک
ایک دیے ہوئے
مثلث کے دو ضلعوں کو بھی
مس کرے۔



فرض کرو کہ دائروں کے نصف قطر غم، غم، غم ہیں، تب مر = ۲ ما غم غم

اس لیے مر = بمر + جمر + مر = غم مم + ب + غم مم + ج + ۲ ما غم غم
مع ب اور ج کے لیے متشابہ جلوں کے۔

فرض کرو لا = غم مم + ا، ما = غم مم + ب، ی = غم مم + ج

اس ب مس + ج = جم ع، اس ب مس + ج = جم ب، جم ب = جم ب

نو جب ع = ا - مس ب مس + ج = ی، اور ا کی طرح جب ب = ب - مس ب مس + ج
اس لیے ہمیں مساواتیں ملتی ہیں

$$\frac{ا + ی - ۲ ما ی جم ع}{جب ع} = \frac{ی + لا - ۲ ی لا جم ب}{جب ب} = \frac{لا + ا - ۲ لا ما جم ج}{جب ج} = س$$

یہ مساواتیں دفعہ ۶۸ مثال (۱۲) میں زیر بحث آچکی ہیں، اس میں جو پہلا حل حاصل ہوا تھا اس کیلئے (213)

لا = اس جم (ش - ع)، ما = اس جم (ش - ب)، ی = اس جم (ش - ج)

جہاں ۲ ش = ع + ب + ج - اس لیے غم = س مس + ا، جم (ش - ع)

ع = س مس + ب، جم (ش - ب) = غم = س مس + ج، جم (ش - ج)

دائرہ کے مطلوبہ نصف قطر ہیں۔ محمولہ بالا مثال کے دوسرے حلوں سے دائروں کے
تین جٹوں کے نصف قطر ملتے ہیں، یہ دائرے ایسے ہیں کہ ہر جٹ میں سے دو دائرے
مثلث کے دو محدودہ ضلعوں کو مس کرتے ہیں، ایک ایسے جٹ کے نصف قطر ہیں

س مس + ا، جم (س - ج)، س مس + ب، جم (س - ج)، س مس + ج، جم (س - ب)

ہیں دائروں کے کل آٹھ جٹ ہیں جو دیے ہوئے مسئلہ کی شرطوں کو پورا کرتے ہیں۔

تناسب ہوں تو ثابت کرو کہ ان فاصلوں کے درمیانی زاویے ہونگے

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$$

۱۱۔ ان چار دائروں میں سے جو ایک مثلث کے تین ضلعوں کو مس کرتے ہیں ہر ایک دائرہ کے نقاط تماس ملائے گئے ہیں ؟ اندرونی دائرہ ہے اس طور پر جو مثلث بناتا ہے اس کا رقبہ ان مثلثوں کے رقبوں کے مجموعہ سے تفریق کیا گیا ہے جو باہنی دائروں سے مذکور الصدر طریقہ پر حاصل ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ حاصل تفریق اصلی مثلث کے رقبہ کا دگنا ہے۔

۱۲۔ اگر ا ب ج د ایک متوازی الاضلاع ہو اور اس کے اندر کوئی نقطہ پ تو ثابت کرو کہ

$$\Delta \text{ ا ب ج } \times \text{م ا ب ج} - \Delta \text{ ب پ د } \times \text{م ب پ د} = \Delta \text{ پ د ا } \times \text{م پ د ا}$$

۱۳۔ تین دائروں کو جو ایک دوسرے کو بیرونی طور پر مس کرتے ہیں ایک چوتھا دائرہ مس کرتا ہے جس کے اندر یہ سب دائرے ہیں۔ اگر اندرونی تین دائروں کے نصف قطر ا ب، ب ج ہوں اور ان کے مرکوزوں کے فاصلے بیرونی دائرہ کے مرکز سے علی الترتیب ع، ہ، ج ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{r}$$

۱۴۔ ایک مثلث کے ضلعوں ب ج، ج ا، ا ب میں علی الترتیب نقطے پ، ق، ر

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{r}$$

ج ر ا اقل ہوگا جبکہ پ، ق، ر، ضلعوں کی تنصیف کریں۔

۱۵۔ ایک مثلث کے ضلعوں ا ب، ب ج پر مثلث کے بیرونی جانب قطاع دائرے کھینچے گئے ہیں جن کے اندر علی الترتیب زاوے ع، ہ، ج بنے ہیں ا د ع + ہ + ج = ۲ ان دائروں کے مرکوزوں کو ملا کر ایک مثلث بنایا گیا ہے۔

ثابت کرو کہ اس مثلث کے زاوئے عہ، بہ، جہ ہیں۔
 ۱۶۔ ایک مثلث کے ضلعوں کے نقاط وسطی سے مقابل کے زادیوں کے
 باصفوں پر عمود کھینچے گئے ہیں اور ان سے ایک دوسرا مثلث بنایا گیا ہے۔ ثابت
 کرو کہ اس مثلث کا رقبہ اُس مستطیل کے رقبہ کا چوتھائی ہے جس کے متصل اضلاع
 قبل الذکر مثلث کا گھیرا اور اس کے حائط دائرہ کا نصف قطر ہیں۔
 ۱۷۔ مثلث ا ب ج کے مستوی میں ایک نقطہ پ ہے اور اس نقطہ سے ضلعوں
 پر کے عمودوں کے پائین ل، م، ن ہیں۔ اگر م ن + ن ل + ل م مستقل
 ہو اور ل کے مساوی ہو تو
 ثابت کرو کہ پ ا + پ ب + پ ج کی اقل قیمت ہے
 ل

$$\text{جب } \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} \text{ جب } \text{ا} + \text{ب} + \text{ج}$$

۱۸۔ ایک مثلث ا ب ج کے ضلعوں ب ج، ج ا، ا ب کے متوازی
 علی الترتیب د، ر، م، ناصلوں پر خطوط مستقیم ب ج، ج ا، ا ب کھینچے گئے ہیں۔
 مثلث ا ب ج کا رقبہ معلوم کرو۔
 اگر ایسے آٹھ مثلث بنائے جائیں تو ان کے گھیروں کا اوسط مثلث ا ب ج
 کے گھیرے کے مساوی ہوتا ہے لیکن ان کے رقبوں کا اوسط مثلث ا ب ج کے
 رقبہ سے بقدر

$$\text{د}^2 + \text{ر}^2 + \text{م}^2 + \text{ج}^2 + \text{ا}^2 + \text{ب}^2$$

$$\Delta \text{ م}$$

کے بڑا ہوتا ہے۔

۱۹۔ ایک مختلف الاضلاع مثلث ا ب ج کے ضلعوں کو قاعدے مانکر
 متشابه تساوی السامین مثلث بنائے گئے ہیں ایسے کہ یا تو سب کے سب
 اندرونی جانب ہیں یا سب کے سب بیرونی جانب۔ ان تساوی السامین مثلثوں
 کے راسوں کو ملا کر ایک نیا مثلث ا ب ج بنایا گیا ہے۔ اگر ا ب ج
 تساوی الاضلاع مثلث ہو تو ثابت کرو کہ تساوی السامین مثلثوں کے

قاعدوں پر کے زاویوں میں سے ہر ایک ۲۰ ہے لیکن اگر $\angle A$ ج ' مثلث $\triangle ABC$ کے متساویہ ہوں تو ان زاویوں میں سے ہر ایک مساوی $\frac{54}{2} = 27$ ہے جہاں ۵۴ سے مثلث $\triangle ABC$ کا رقبہ مراد ہے۔

۲۰۔ ایک خط مستقیم تین ہم مرکز دائروں کو نقطوں A ، B ، C پر قطع کرتا ہے اور ان کے مرکز سے فاصلہ پر واقع ہے۔ ثابت کرو کہ اس مثلث کا رقبہ جو $\triangle ABC$ پر کے طاسوں سے بنتا ہے۔ $\frac{AB \times BC \times CA}{2}$ ہے۔

۲۱۔ اگر ایک مثلث $\triangle ABC$ کے نقطہ D ، E ، F ہوں تو ثابت کرو کہ

$$BC \cdot \sin D + CA \cdot \sin E + AB \cdot \sin F = 0.$$

۲۲۔ ایک مثلث کے ضلع AB پر D ، E کے مساوی ناپا گیا ہے۔ BC اور CA کی تنصیف نقاط E ، F سے کی گئی ہے اور E اور F کو ملا دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ EF کے حاطہ دائرہ کا نصف قطر $\frac{1}{2} AB$ ہے۔

۲۳۔ اگر مثلث $\triangle ABC$ کے ضلعوں پر A ، B ، C کوئی نقطے ہوں تو ثابت کرو کہ

$$AB \times BC \times CA + BC \times CA \times AB + CA \times AB \times BC = 0$$

۲۴۔ اگر ایک مثلث کے اندرونی دائرہ کے مرکز کے فاصلے مثلث کے راسوں سے l ، m ، n ہوں تو ثابت کرو کہ

$$l^2 + m^2 + n^2 = 2(R^2 - r^2) \quad (1 + \cos A + \cos B + \cos C) = 2 \quad (2)$$

۲۵۔ D ، E ، F وہ نقطے ہیں جہاں مثلث $\triangle ABC$ کے زاویوں کے

(216)

ناصف مقابل کے ضلعوں سے ملے ہیں؛ اگر لا، ا، ی وہ عمود ہوں جو
ا، ب، ج سے مثلث د ع ف کے مقابل کے ضلعوں پر کھینچے گئے، میں اور
ع، ع، ع وہ عمود ہوں جو ا، ب، ج سے مثلث ا ب ج کے مقابل کے ضلعوں
پر کھینچے گئے ہیں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{ع^2}{ا^2} + \frac{ع^2}{ب^2} + \frac{ع^2}{ج^2} = ۱۱ + ۸ جب \frac{۱}{ا} جب \frac{۱}{ب} جب \frac{۱}{ج}$$

۲۶۔ ثابت کرو کہ ایک مثلث کے مرکز عمودی کے فاصلے اس کے راسوں
سے حسب ذیل مساوات کی اصلیں ہیں :-

$$لا^۳ - ۲(س۲ + ر) لا^۲ + (ر^۲ - ۲س۲ + س^۲) لا - ۲س(ر + س) = ۰$$

۲۷۔ اگر ایک مثلث کا ہر ضلع اس کے گھیرے کے ساتھ ایسی نسبت رکھے جو
۵ : ۲ سے کم ہے تو ایک مثلث بنایا جاسکتا ہے جس کے ضلع جانبی دائروں
کے نصف قطروں کے مساوی ہوں۔

۲۸۔ ایک دائرہ کے اندر ایک مثلث ا ب ج بنایا گیا ہے اور ب ج کے
نقطہ وسطی د سے ایک خط ا ب ج کے علی القوائم کھینچا گیا ہے جو دائرہ کے محیط سے
ع اور ف پر ملتا ہے۔ ا ع اور ا ف کو ملایا گیا ہے اور اس طرح
مثلث ا ع ف کو حاصل کیا گیا ہے۔ اسی طرح ا ب، ا ج کی تنصیف
کر کے باقی اور دو مثلث بنائے جائیں تو ثابت کرو کہ ان تین مثلثوں کے رقبے
نسبت جب (ب-ج)؛ جب (ج-ا)؛ جب (ا-ب) میں ہیں۔

۲۹۔ تین دائرے جن کے نصف قطر ا، ب، ج ہیں ایک دوسرے کو
بیرونی طور پر مس کرتے ہیں؛ ثابت کرو کہ ان دو دائروں کے نصف قطر جو ان
تین دائروں کو مس کرتے ہوئے کھینچے جاسکتے ہیں یہ ہیں

ا ب ج

$$(بج + ج + ا) (ا ب) \pm ۲ ا ب ج (ا + ب + ج)$$

۳۰۔ اب ج ایک مثلث ہے؛ اس کے بیرونی جانب اس کے ضلعوں پر متساوی الاضلاع مثلث 'آب ج'، 'ب ج ا'، 'ج ا ب' بنائے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$(۱) \text{آ} + \text{ب} + \text{ج} = \text{ایک نقطہ و ہر ملتے ہیں؛}$$

$$(۲) \text{و} = \text{آ} + \text{ب} + \text{ج}؛$$

$$(۳) \Delta \text{آ ب ج} = \frac{۵}{۴} \Delta \text{ب ج ا} + \frac{۳}{۴} \Delta \text{ج ا ب} + \frac{۱}{۴} \Delta \text{ا ب ج}؛$$

۳۱۔ ایک مثلث کے ضلعوں 'ا'، 'ب' کے وسطی نقطے 'آ'، 'ب' ہیں؛

'ا' سے مقابل کے ضلعوں پر کے عمودوں کے پائیں 'د'، 'ع' ہیں؛ اور 'آد'، 'ب' کی تحصیف نقطوں 'پ'، 'ق' سے ہوتی ہے۔ ثابت کرو کہ

$$\text{پ ق} = \frac{۱}{۲} (\text{ا} + \text{ب} + \text{ج})$$

۳۲۔ ایک حادہ الزاویہ مثلث کے راسوں سے مقابل کے ضلعوں پر کے

عمود نقطہ 'پ' پر ملتے ہیں اور ایک نیا مثلث ضلعوں 'پ ا'، 'پ ب'، 'پ ج' کے ساتھ بنایا گیا ہے۔ وہ شرط معلوم کرو کہ یہ ممکن ہو اور اگر یہ ممکن ہے اور اس نئے مثلث کے زاویے 'ع'، 'ب'، 'ج' ہیں تو ثابت کرو کہ

$$۱ + \frac{\text{ج}}{\text{ب}} + \frac{\text{ب}}{\text{ج}} = \frac{۱}{۲} (\text{قط ا} + \text{قط ب} + \text{قط ج})$$

۳۳۔ نصف قطر کے ایک دائرہ کے اندر جس کا مرکز ج ہے دو نقطے

'ا'، 'ب' لیے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ اُن دائروں کے قطر جو 'ا'، 'ب' میں سے گذریں اور دیے ہوئے دائرہ کو مس کریں مساوات ذیل کی اعلیٰ ہیں:-

$$\text{لا} (\text{ر ج}) = \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} - \text{ا} (\text{ر ج}) - \text{ب} (\text{ر ج}) - \text{ج} (\text{ر ج}) = \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} - \text{ا} - \text{ب} - \text{ج} = ۰$$

جہاں چھوٹے و بڑے حروف مثلث 'ا ب ج' کے اجزاء کو تعبیر کرتے ہیں۔

۳۴۔ اگر ایک مثلث کو 'ا'، 'ب'، 'ج' سے کاٹ کر غلطہ کر لیا جائے اور اس کو

دائرہ کے مرکز سے لا، ما، ی ہوں اور صائلہ دائرہ کا قطر ہو تو ثابت کرو کہ

$$لا ما ی ق (لا + ما + ی) = ق^۲$$

۴۰۔ ایک مثلث کے اندرونی دائرہ کے مرکز کو راسوں سے ملایو اسے
خطوط مستقیم اس دائرہ کو ا، ب، ج پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث
ا ب ج کا رقبہ ہے

$$\frac{۱}{۴} (جم ا + جم ب + جم ج)$$

۴۱۔ اگر ایک مثلث کے ہر ضلع کو بقدر چھوٹی مقدار لا کے بڑھایا جائے تو
ثابت کرو کہ رقبہ میں تقریباً ۳ لا (جم ا + جم ب + جم ج) کا اضافہ ہوگا۔

۴۲۔ ایک دائرہ کے قطر ا، ب، ج ہیں اور ا، ب، ج سے
علی الترتیب ب، ج، ج، ا، ب پر کے عمودوں کے پائیں د، ع، ف ہیں۔
ثابت کرو کہ ا، د، ب، ع، ج، ف ایک نقطہ پر ملتے ہیں اور نیز ثابت کرو کہ رقبوں
ا ب ج، د ع ف میں نسبت ۱ : ۲ : ۳ جم ب، جم ج ہے۔

۴۳۔ اگر ایک مثلث کے اندرونی دائرہ کے مرکز آ سے منسلکوں پر عمود
آد، آع، آف کھینچے جائیں تو آع، آف، آد، آد، آد ج ع
میں کھینچے ہوئے دائروں کے نصف قطر معلوم کرو؟ اگر یہ نصف قطر علی الترتیب
غم، غم، غم ہوں تو ثابت کرو کہ

$$(د - ۲ غم) (ع - ۲ غم) (ف - ۲ غم) = د^۲ - ع^۲ - ف^۲$$

۴۴۔ تین دائرے جن کے نصف قطر ا، ب، ج ہیں ایک دوسرے کو
بیرونی طور پر مس کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اُس دائرہ کا نصف قطر س جو
ان تین دائروں کو بیرونی طور پر مس کرتا ہے مساوات

$$\frac{۱}{س} (ب + ج + ا) + \frac{۱}{س} (ج + ا + ب) + \frac{۱}{س} (ا + ب + ج) = \frac{۱}{س} (ب + ج + ا)$$

۵۳۔ اگر کسی نقطہ سے مثلث ا ب ج کے ضلعوں ب ج، ج ا، ا ب پر عمود د، و ع، و ف کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ

$$م ا د ج + م ب ع + م ج ف ب = .$$

۵۴۔ اگر ب، ج، ا ب دیے گئے ہوں اور ان اجزاء کے ساتھ دو مثلث موجود ہوں تو ثابت کرو کہ ان کے اندرونی دائرے ایک دوسرے کو مس کریں گے اگر

$$ج (جم ب + جم ب - ۳) + ۲ ب ج (۱ - جم ب) + ب^۲ = .$$

۵۵۔ اگر ایک مثلث کے جانبی دائروں کے مرکزوں سے نقطہ قطعی دائرہ کے تماس کھینچے جائیں اور ان کے طول م، م، م ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{م_۱}{م_۲} + \frac{م_۲}{م_۳} + \frac{م_۳}{م_۱} = ۲ + ر$$

اور

$$\frac{م_۱^۲}{م_۲ م_۳} + \frac{م_۲^۲}{م_۳ م_۱} + \frac{م_۳^۲}{م_۱ م_۲} = ۲ + ر$$

۵۶۔ ثابت کرو کہ ایک مثلث کے راسوں سے نقطہ قطعی دائرہ کے مرکز کے فاصلوں

کے مربعوں کا حاصل جمع ہے

$$ر^۲ \left(\frac{۱۱}{۳} + جم ب + جم ج + جم ا \right)$$

۵۷۔ ایک دیے ہوئے دائرہ کے گرد چار متساوی مثلث بنائے گئے ہیں اور ان کے رقبے ق، ق، ق، ق، ق، ق ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$(۱) مثلثوں کا ایک زاویہ ۲ مم (ق ق ا) (ق ق ب) ہے،$$

$$(ب) ق = ق + ق + ق$$

$$(ج) دائرہ کا نصف قطر (ق ق ق ق ق ق) ہے۔$$

۵۸۔ ایک مثلث کے راسوں 'ا' 'ب' 'ج' سے خطوط مستقیم کھینچے گئے ہیں جو مثلث کے اضلاع کے ضلعوں سے ایک ہی جہت میں راسوں کے نقطہ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان خطوط سے جو مثلث بنتا ہے اس کے اضلاع دائرہ کا قطر ہے۔

جب (۲۲) نہ پڑے (۲۱) جم ط + جب (۲۱) ب پڑے (۲۰) جم ف + جب (۲۰) ج ط نہ پڑے (۱۹) جم پ

جب (ا + ز - پ) بب (ب + پ - ط) جب (ج + ط - ذ)

۴۔ ایک مثلث کے ضلعوں کے محاذی ایک نقطہ پر نہ اس کے

نہ، ہاں، جہنم میں، ثابت کر دو کہ

$$(a+b) \frac{1}{n} x^{n-1} (a+b) \frac{1}{n} x^{n-1} \frac{1}{n} x^{n-1} = a \frac{1}{n} x^{n-1} + a \frac{1}{n} x^{n-1} + a \frac{1}{n} x^{n-1} (1)$$

بج چبب (۱-۲)

(ج) جیب (ع-۱) + ج! : جیب (ع-۲) - (ج!) + س جیب (ع-۳) (ج)

۴۔ اگر یک مساوی الاضلاع مثلث (ضلع ۱) کے متوی میں کسی نقطہ کے فاصلے

مثلاً کے واسطوں سے ف، ف، ف، ف ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}{f_1 + f_2 + f_3} = \frac{f_1^2}{f_1 + f_2 + f_3} + \frac{f_2^2}{f_1 + f_2 + f_3} + \frac{f_3^2}{f_1 + f_2 + f_3}$$

پس ثابت کرو کہ دو مساوی الاضلاع مثلثوں کے رقبوں کا مجموعہ جن میں سے

ہر ایک مثلث کے، اس ایک ثابت نقطہ سے دئے ہوئے تین فاصلوں پر واقع ہیں

ان فاصلوں پر بنائے ہوئے مساوی الاضلاع مثلثوں سے رقبوں کے مجموعہ سے

مساوی ہے۔

۶۱۔ اگر سنت اب ج کے اندر کوئی نقطہ پ ہو اور مثلثوں ب پ ج،

ج پ ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۲۸، ۲۹، ۳۰، ۳۱، ۳۲، ۳۳، ۳۴، ۳۵، ۳۶، ۳۷، ۳۸، ۳۹، ۴۰، ۴۱، ۴۲، ۴۳، ۴۴، ۴۵، ۴۶، ۴۷، ۴۸، ۴۹، ۵۰، ۵۱، ۵۲، ۵۳، ۵۴، ۵۵، ۵۶، ۵۷، ۵۸، ۵۹، ۶۰، ۶۱، ۶۲، ۶۳، ۶۴، ۶۵، ۶۶، ۶۷، ۶۸، ۶۹، ۷۰، ۷۱، ۷۲، ۷۳، ۷۴، ۷۵، ۷۶، ۷۷، ۷۸، ۷۹، ۸۰، ۸۱، ۸۲، ۸۳، ۸۴، ۸۵، ۸۶، ۸۷، ۸۸، ۸۹، ۹۰، ۹۱، ۹۲، ۹۳، ۹۴، ۹۵، ۹۶، ۹۷، ۹۸، ۹۹، ۱۰۰، ۱۰۱، ۱۰۲، ۱۰۳، ۱۰۴، ۱۰۵، ۱۰۶، ۱۰۷، ۱۰۸، ۱۰۹، ۱۱۰، ۱۱۱، ۱۱۲، ۱۱۳، ۱۱۴، ۱۱۵، ۱۱۶، ۱۱۷، ۱۱۸، ۱۱۹، ۱۲۰، ۱۲۱، ۱۲۲، ۱۲۳، ۱۲۴، ۱۲۵، ۱۲۶، ۱۲۷، ۱۲۸، ۱۲۹، ۱۳۰، ۱۳۱، ۱۳۲، ۱۳۳، ۱۳۴، ۱۳۵، ۱۳۶، ۱۳۷، ۱۳۸، ۱۳۹، ۱۴۰، ۱۴۱، ۱۴۲، ۱۴۳، ۱۴۴، ۱۴۵، ۱۴۶، ۱۴۷، ۱۴۸، ۱۴۹، ۱۵۰، ۱۵۱، ۱۵۲، ۱۵۳، ۱۵۴، ۱۵۵، ۱۵۶، ۱۵۷، ۱۵۸، ۱۵۹، ۱۶۰، ۱۶۱، ۱۶۲، ۱۶۳، ۱۶۴، ۱۶۵، ۱۶۶، ۱۶۷، ۱۶۸، ۱۶۹، ۱۷۰، ۱۷۱، ۱۷۲، ۱۷۳، ۱۷۴، ۱۷۵، ۱۷۶، ۱۷۷، ۱۷۸، ۱۷۹، ۱۸۰، ۱۸۱، ۱۸۲، ۱۸۳، ۱۸۴، ۱۸۵، ۱۸۶، ۱۸۷، ۱۸۸، ۱۸۹، ۱۹۰، ۱۹۱، ۱۹۲، ۱۹۳، ۱۹۴، ۱۹۵، ۱۹۶، ۱۹۷، ۱۹۸، ۱۹۹، ۲۰۰، ۲۰۱، ۲۰۲، ۲۰۳، ۲۰۴، ۲۰۵، ۲۰۶، ۲۰۷، ۲۰۸، ۲۰۹، ۲۱۰، ۲۱۱، ۲۱۲، ۲۱۳، ۲۱۴، ۲۱۵، ۲۱۶، ۲۱۷، ۲۱۸، ۲۱۹، ۲۲۰، ۲۲۱، ۲۲۲، ۲۲۳، ۲۲۴، ۲۲۵، ۲۲۶، ۲۲۷، ۲۲۸، ۲۲۹، ۲۳۰، ۲۳۱، ۲۳۲، ۲۳۳، ۲۳۴، ۲۳۵، ۲۳۶، ۲۳۷، ۲۳۸، ۲۳۹، ۲۴۰، ۲۴۱، ۲۴۲، ۲۴۳، ۲۴۴، ۲۴۵، ۲۴۶، ۲۴۷، ۲۴۸، ۲۴۹، ۲۵۰، ۲۵۱، ۲۵۲، ۲۵۳، ۲۵۴، ۲۵۵، ۲۵۶، ۲۵۷، ۲۵۸، ۲۵۹، ۲۶۰، ۲۶۱، ۲۶۲، ۲۶۳، ۲۶۴، ۲۶۵، ۲۶۶، ۲۶۷، ۲۶۸، ۲۶۹، ۲۷۰، ۲۷۱، ۲۷۲، ۲۷۳، ۲۷۴، ۲۷۵، ۲۷۶، ۲۷۷، ۲۷۸، ۲۷۹، ۲۸۰، ۲۸۱، ۲۸۲، ۲۸۳، ۲۸۴، ۲۸۵، ۲۸۶، ۲۸۷، ۲۸۸، ۲۸۹، ۲۹۰، ۲۹۱، ۲۹۲، ۲۹۳، ۲۹۴، ۲۹۵، ۲۹۶، ۲۹۷، ۲۹۸، ۲۹۹، ۳۰۰، ۳۰۱، ۳۰۲، ۳۰۳، ۳۰۴، ۳۰۵، ۳۰۶، ۳۰۷، ۳۰۸، ۳۰۹، ۳۱۰، ۳۱۱، ۳۱۲، ۳۱۳، ۳۱۴، ۳۱۵، ۳۱۶، ۳۱۷، ۳۱۸، ۳۱۹، ۳۲۰، ۳۲۱، ۳۲۲، ۳۲۳، ۳۲۴، ۳۲۵، ۳۲۶، ۳۲۷، ۳۲۸، ۳۲۹، ۳۳۰، ۳۳۱، ۳۳۲، ۳۳۳، ۳۳۴، ۳۳۵، ۳۳۶، ۳۳۷، ۳۳۸، ۳۳۹، ۳۴۰، ۳۴۱، ۳۴۲، ۳۴۳، ۳۴۴، ۳۴۵، ۳۴۶، ۳۴۷، ۳۴۸، ۳۴۹، ۳۵۰، ۳۵۱، ۳۵۲، ۳۵۳، ۳۵۴، ۳۵۵، ۳۵۶، ۳۵۷، ۳۵۸، ۳۵۹، ۳۶۰، ۳۶۱، ۳۶۲، ۳۶۳، ۳۶۴، ۳۶۵، ۳۶۶، ۳۶۷، ۳۶۸، ۳۶۹، ۳۷۰، ۳۷۱، ۳۷۲، ۳۷۳، ۳۷۴، ۳۷۵، ۳۷۶، ۳۷۷، ۳۷۸، ۳۷۹، ۳۸۰، ۳۸۱، ۳۸۲، ۳۸۳، ۳۸۴، ۳۸۵، ۳۸۶، ۳۸۷، ۳۸۸، ۳۸۹، ۳۹۰، ۳۹۱، ۳۹۲، ۳۹۳، ۳۹۴، ۳۹۵، ۳۹۶، ۳۹۷، ۳۹۸، ۳۹۹، ۴۰۰، ۴۰۱، ۴۰۲، ۴۰۳، ۴۰۴، ۴۰۵، ۴۰۶، ۴۰۷، ۴۰۸، ۴۰۹، ۴۱۰، ۴۱۱، ۴۱۲، ۴۱۳، ۴۱۴، ۴۱۵، ۴۱۶، ۴۱۷، ۴۱۸، ۴۱۹، ۴۲۰، ۴۲۱، ۴۲۲، ۴۲۳، ۴۲۴، ۴۲۵، ۴۲۶، ۴۲۷، ۴۲۸، ۴۲۹، ۴۳۰، ۴۳۱، ۴۳۲، ۴۳۳، ۴۳۴، ۴۳۵، ۴۳۶، ۴۳۷، ۴۳۸، ۴۳۹، ۴۴۰، ۴۴۱، ۴۴۲، ۴۴۳، ۴۴۴، ۴۴۵، ۴۴۶، ۴۴۷، ۴۴۸، ۴۴۹، ۴۵۰، ۴۵۱، ۴۵۲، ۴۵۳، ۴۵۴، ۴۵۵، ۴۵۶، ۴۵۷، ۴۵۸، ۴۵۹، ۴۶۰، ۴۶۱، ۴۶۲، ۴۶۳، ۴۶۴، ۴۶۵، ۴۶۶، ۴۶۷، ۴۶۸، ۴۶۹، ۴۷۰، ۴۷۱، ۴۷۲، ۴۷۳، ۴۷۴، ۴۷۵، ۴۷۶، ۴۷۷، ۴۷۸، ۴۷۹، ۴۸۰، ۴۸۱، ۴۸۲، ۴۸۳، ۴۸۴، ۴۸۵، ۴۸۶، ۴۸۷، ۴۸۸، ۴۸۹، ۴۹۰، ۴۹۱، ۴۹۲، ۴۹۳، ۴۹۴، ۴۹۵، ۴۹۶، ۴۹۷، ۴۹۸، ۴۹۹، ۵۰۰، ۵۰۱، ۵۰۲، ۵۰۳، ۵۰۴، ۵۰۵، ۵۰۶، ۵۰۷، ۵۰۸، ۵۰۹، ۵۱۰، ۵۱۱، ۵۱۲، ۵۱۳، ۵۱۴، ۵۱۵، ۵۱۶، ۵۱۷، ۵۱۸، ۵۱۹، ۵۲۰، ۵۲۱، ۵۲۲، ۵۲۳، ۵۲۴، ۵۲۵، ۵۲۶، ۵۲۷، ۵۲۸، ۵۲۹، ۵۳۰، ۵۳۱، ۵۳۲، ۵۳۳، ۵۳۴، ۵۳۵، ۵۳۶، ۵۳۷، ۵۳۸، ۵

۴ غ جب ط جب ف جب پ = لاجب ط + لاجب ف + ی جب پ
جہاں پ ا، پ ب، پ ج کے طول ل ا، ی ہیں اور ط، ف، پ، ر ا دے
ب پ ج، ج پ ا، ا پ ب ہیں۔

(220) ۶۲۔ تین دائرے جن کے نصف قطر ل، ب ج ہیں ایک دوسرے کو
بیرونی طور پر مس کرتے ہیں اور م، م اُن دائروں کے نصف قطر ہیں جو ان
تین دائروں کو مس کرتے ہوئے کھینچے جاسکتے ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{2}{ج} + \frac{2}{ب} + \frac{2}{ل} = \frac{1}{پ} + \frac{1}{ا}$$

۶۳۔ اگر ایک مثلث کے زاویوں ب، ج کے نصف متقابل کے
ضلعوں سے نقطوں ع، ف پر ملیں تو ثابت کرو کہ ع، ب ج کے ساتھ
زاویہ

$$\frac{مس (ب - ج) جب ا}{(ل + ب) جم ج + (ل + ج) جم ب}$$

بناتا ہے۔

۶۴۔ اگر ا ب ج کے اندرونی دائرہ کا مرکز آ ہو، آ ب ج کے اندرونی
دائرہ کا مرکز آ ہو، آ ب ج کے اندرونی دائرہ کا مرکز آ ہو اور علیٰ انقیاس
تو بتاؤ کہ جیسے ن ل انتہا بڑھتا ہے آ آ ل، ب ج کو اُس نسبت میں تقسیم کرتا
ہے جو زاویوں ج اور ب کے نیم قطری باہوں کے درمیان ہے۔

۶۵۔ ایک مثلث کے ضلعوں ب ج، ج ا، ا ب پر نقطے د، ع، ف
لے گئے ہیں اور د، ع، ف میں سے خطوط مستقیم ب ج، ج ا، ا ب کھینچے
گئے ہیں جو علیٰ الترتیب ب ج، ج ا، ا ب سے مساوی المیلان ہیں اور
مثلث ا ب ج بناتے ہیں جو ا ب ج کے متشابه ہے۔ ثابت کرو کہ ا ب ج
کے حاطط دائرہ کا نصف قطر ہے

$$(ع ف جم ع + ف د جم ب + د ع جم ج) / (ب جب ا جب ب جب ج)$$

جہاں ا، ب، ج کے میلان علی الترتیب ب، ج، ا، ب کے ساتھ
عہدہ، جہ ہیں۔

۶۶۔ اگر ایک مثلث کے حائط دائرہ پر ایک نقطہ پ، جو جس کا خط یائیں
مثلث کے مرکز ہندسی میں سے گزرتا ہے اور اگر پ کو مرکز عمودنی سے ملائیں
خط مستقیم خط پائیں کو علی الترتیب قطع کرے تو ثابت کرو کہ

$$پ ا + پ ب + پ ج = ۲ س (۱ - اجم لجم بجم ج)$$

۶۷۔ ایک مثلث کے ضلع ب، ج میں د ایک نقطہ ہے، اگر مثلثوں
ا ب د، ا ج د کے اندرونی دائرے ضلع ا د کو ایک ہی نقطہ پر سر کریں تو
ثابت کرو کہ ا ب ج کے اندرونی دائرہ کا نقطہ تماس ضلع ب، ج کے ساتھ د
ہے، لیکن اگر دائرہ کے نصف قطر مساوی ہوں تو

$$ج د : ب د :: ق م د + ق م ج : ق م د + ق م ب$$

۶۸۔ نصف قطر کے ایک دائرہ کے اندر کسی نقطہ سے تین سمتی نصف قطر
جن کے طول م، م، م ہیں دائرہ تک کھینچے گئے ہیں اور ان میں سے ہر دو کا
دریافتی زاویہ $\frac{\pi}{2}$ ہے۔ ثابت کرو کہ

$$۳ ر ا ر ب ر ج - (ر ا ر ب + ر ب ر ج + ر ج ر ا ر ب) = (ر ا ر ب + ر ب ر ج + ر ج ر ا ر ب)$$

اور اگر اس نقطہ کا فاصلہ دائرہ کے مرکز سے ف ہو تو ثابت کرو کہ

$$(ر ا - ر ب) (ر ب - ر ج) (ر ج - ر ا) = (ر ا ر ب + ر ب ر ج + ر ج ر ا ر ب)$$

۶۹۔ ایک مثلث کے ضلع ب، ج کو مس کرنے والے باہنی دائرہ کے نقاط
د، ع، ف ہیں اور علیٰ ہذا القیاس مثلثوں د، ع، ف، ع، د، ع، ف کے
اندرونی دائرے کھینچے گئے ہیں۔ اگر ان دائروں کے نصف قطر غم، غم، غم ہوں
تو بتاؤ کہ

۷۔ $\frac{1}{\sin A} : \frac{1}{\sin B} : \frac{1}{\sin C} = 1 - \frac{1}{\sin A} : 1 - \frac{1}{\sin B} : 1 - \frac{1}{\sin C}$ ج
 (221) ایک مثلث ا ب ج میں آ، ب، ج اُن دائروں کے مرکز ہیں جن میں سے ہر ایک مثلث کے دو ضلعوں اور اس کے اندرونی دائرہ کو مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ مثلث ا ب ج کا رقبہ ہے

$$\sin \frac{A}{2} (1 - \frac{1}{\sin A}) + \sin \frac{B}{2} (1 - \frac{1}{\sin B}) + \sin \frac{C}{2} (1 - \frac{1}{\sin C})$$

$$x = \frac{1}{2} \sin \frac{A}{2} (1 - \frac{1}{\sin A}) + \frac{1}{2} \sin \frac{B}{2} (1 - \frac{1}{\sin B}) + \frac{1}{2} \sin \frac{C}{2} (1 - \frac{1}{\sin C})$$

۸۔ ایک مثلث کے اندرونی دائرہ کے وہ تین مماس کھینچے گئے ہیں جو ضلعوں کے متوازی ہیں۔ ان مماسوں سے مثلث کے کونوں پر تین مثلث بن جاتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان تین مثلثوں کے اندرونی دائروں کے نصف قطر لا مساوات

$$\frac{1}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{C}{2}} = \frac{1}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{C}{2}} = 0$$

۹۔ ایک مثلث کے اندرونی دائرہ کے مرکز اور مرکز عمودی کو ملانے والا خط مستقیم پر مثلث کے راسوں سے عموداً پڑے طول ف، ق، ر ہیں؛ ثابت کرو کہ

$$\frac{f}{\sin A} = \frac{q}{\sin B} = \frac{r}{\sin C}$$

جبکہ ف، ق، ر کی علامتوں سے متعلق ایک قرارداد کر لی جائے۔

۱۰۔ ایک متساوی الاضلاع مثلث کے اندر ایک نقطہ لیا گیا ہے اور اسوں سے اس کے فاصلے عہ، بھ، جھ ہیں۔ خطوط (بھ، جھ)، (جھ، عہ)، (عہ، بھ) کے اندرونی زاویوں کے نصف مثلث کے متناظر ضلعوں سے

نقطوں 'ف'، 'ق'، 'س' پر علی الترتیب ملے ہیں۔ ثابت کرو کہ 'ق'، 'س' کے رقبہ کو مساوی الاضلاع مثلث کے رقبہ سے نسبت ہے

$$۲:۳ :: (ب+ج): (ج+د) :: (د+ب): (ب+د)$$

۴۔ مثلث 'ا' ب ج کے مستوی میں کسی نقطہ سے 'ا' سوں کے فاصلے 'ا'، 'م'، 'ن' ہیں اور حائل دائرہ کے مرکز سے اس کا فاصلہ 'ف' ہے۔ ثابت کرو کہ

$$لجب ۱ + ۲ = ۳ جب ا ب + ۴ جب ا ب = ۵ (ف + ل) جب ا ب ب ج$$

۵۔ اگر ایک مثلث کا مرکز ہندسی ث ہو تو ثابت کرو کہ

$$م ث ا ب + م ث ب ج + م ث ج ا = ۳ م س$$

$$= م ا ب ث + م ب ج ث + م ج ا ث$$

$$\text{اور } م ا ب ث + م ب ج ث + م ج ا ث = ۳ م س$$

$$\text{جہاں } م س = م ا + م ب + م ج$$

یہ اگر مثلث میں ک ایک نقطہ ہو ایسا کہ زاوے 'ک' 'ا' ج، 'ب' ج مساوی ہیں مع دو اور متساویہ رشتوں کے تو ثابت کرو کہ

$$م ا ک ب + م ب ک ج + م ج ک ا = ۱ + ۱ + ۱ = ۳ م س$$

۶۔ ایک مثلث کے رقبہ کے اندر تین دائروں میں سے ہر دائرہ دیگر دو

دائروں کو مس کرتا ہے اور نیز مثلث کے دو ضلعوں کو مس کرتا ہے، اگر ایک ضلع پر نقاط 'ت'، 'س' کے درمیان فاصلہ ہو اور اسی طرح دیگر دو ضلعوں پر متناظر فاصلے ہو، ہر ہوں تو ثابت کرو کہ اس مثلث کا رقبہ جو ان دائروں کے مرکوزوں کو ملانے سے بنتا ہے $\frac{1}{4} (ب^2 ج + ج^2 ا + ا^2 ب)$ ہے۔

۷۔ اگر ایک ذوالربعۃ الاضلاع کے 'ا' سوں سے دتروں 'م'، 'ن' پر عمود 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' ہوں تو ثابت کرو کہ دتروں کے درمیانی زاویہ کی جیب

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{(ج + د)(ب + د)}{د} \right\} =$$

۷۸۔ اگر ا ب ج د ایک ذواربعۃ الاضلاع ہو تو کسی طریقہ سے ثابت کرو کہ وہ خط مستقیم جو زاویوں ا اور ج کے ماصفوں کے نقطہ تقاطع کو زاویوں ب اور د کے ماصفوں کے نقطہ تقاطع سے ملتا ہے ا د کے ساتھ حسب ذیل زاویہ بناتا ہے

$$\left\{ \frac{ج ب - ب ب + د ج + ج ب (ا + ب)}{ا ج + ا ب + د ج + ج ب (ا + ب)} \right\}$$

۷۹۔ ا ب ج د ع ایک مستوی خمس ہے، یہ دیا گیا ہے کہ مثلثوں

ع ا ب، ا ب ج، ب ج د، ج د ع، د ع ا کے رقبے علی الترتیب
ا، ب، ج، د، ع کے مساوی ہیں۔ ثابت کرو کہ خمس کا رقبہ ا، ب، ج، د، ع مساوی ہے

$$۱ - (ا + ب + ج + د + ع) + ۱ + (ا ب + ب ج + ج د + د ع + ع ا) = ۰$$

سے معلوم ہو سکتا ہے۔

۸۰۔ اگر ایک ذواربعۃ الاضلاع جس کے ضلع ترتیب وار ا، ب، ج،

د ہیں ایسا ہو کہ اس کے اندر ایک دائرہ بنایا جاسکتا ہے تو ثابت کرو کہ یہ دائرہ بڑے سے بڑا ہوگا جبکہ ذواربعۃ الاضلاع کے گرد ایک دائرہ کھینچا جاسکتا ہو، اور اس صورت میں اندرونی دائرہ کے نصف قطر کا مربع ہے

$$ا ب ج د$$

$$(ج + د)(ب + د)$$

۸۱۔ ۲ ضلعوں کا ایک کثیر الاضلاع ایک دائرہ کے اندر کھینچا گیا

ہے، ان ضلعوں میں سے ۲ ضلعوں کے مساوی ہیں اور ۲ ضلعوں کے مساوی۔ ثابت کرو کہ دائرہ کا نصف قطر ہے

$$\frac{1}{2} (ا + ب + ج + د) \sqrt{\frac{ا ب ج د}{ا ب ج د}}$$

۸۲۔ ایک ذواربعۃ الاضلاع جس کے ضلع و، ب، ج، د ہیں ایک دائرہ کے اندر بنایا جاسکتا ہے، اس کے خارجی زاویوں کی تنصیف کی گئی ہے، ثابت کرو کہ اس ذواربعۃ الاضلاع کے وتر جو ان ناسفوں سے بنتا ہے ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں اور اس ذواربعۃ الاضلاع کا رقبہ ہے

$$\frac{1}{4} \frac{(ا + ب + ج + د)(ا - ب)(ا - ج)(ا - د)(ب - ج)(ب - د)(ج - د)}{(ا - ب)(ا - ج)(ا - د)(ب - ج)(ب - د)(ج - د)}$$

جہاں $ا + ب + ج + د = ۲س$

۸۳۔ ذواربعۃ الاضلاع ا ب ج د ایک دائرہ میں کھینچا گیا ہے اور اس کا تیسرا وتر ع ف ہے جو اس ا کے مقابل ہے۔ اگر اسے ب ج ج د پر عمود ڈالے جائیں اور یہ عمود ان دائروں سے جو ا د، ا ب پر ان کو قطر بنا کر کھینچے گئے ہوں نقطوں پ، ق پر ملیں تو

ثابت کرو کہ $پ ق جب د = ع ف (جب ا - جب ا د)$

۸۴۔ ایک دوسرے کے لحاظ سے دو دائروں کی طاقت کی تعریف اس اضافہ سے کی جاتی ہے جو ان کے مرکزوں کے درمیانی فاصلہ کے مربع کو ان کے نصف قطروں کے مربعوں کے حاصل جمع پر حاصل ہے۔ ثلث ا ب ج کے لیے ثابت کرو کہ اندر دنی دائرہ اور اس جانبی دائرہ کی طاقت جو ا کے مقابل ہے $\frac{1}{4} \{ا^2 + (ب - ج)^2\}$ ہے اور اس سے اس امر کی تصدیق کرو کہ اگر یہ جانبی دائرہ دوسرے جانبی دائرہ کو مس کرے تو ثلث کو متساوی الساقین ہونا چاہیے۔

۸۵۔ ایک خمس کے ضلع، جو ایک دائرہ کے گرد کھینچا گیا ہے، ترتیب وار و، ب، ج، د، ع ہیں۔ ثابت کرو کہ خمس کا رقبہ مساوات

$$\frac{1}{2} \{ا^2 + (ب + ج - د)^2 - \frac{1}{4} (ا + ب - ج)^2 - \frac{1}{4} (ا + ج - ب)^2 - \frac{1}{4} (ا + د - ج)^2 - \frac{1}{4} (ا + ج - د)^2 - \frac{1}{4} (ب + ج - د)^2 - \frac{1}{4} (ب + د - ج)^2 - \frac{1}{4} (ج + د - ب)^2 - \frac{1}{4} (ج + ب - د)^2 - \frac{1}{4} (د + ب - ج)^2 - \frac{1}{4} (د + ج - ب)^2\}$$

(228)

کی ایک اصل ہے جہاں $۲س = ا + ب + ج + د + ع$
 ۸۶ - ایک دائرہ میں جس کا نصف قطر ہے ایک منظم کثیر الاضلاع
 کھینچا گیا ہے۔ اس دائرہ کے محیط پر کسی نقطہ کے فاصلے کثیر الاضلاع کے
 چار متصلہ ااسوں سے 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' ہیں۔ 'ا'، 'ب'، 'ج' اور 'د' کے درمیان
 رشتہ معلوم کرو اور ثابت کرو کہ

$$\frac{(ا + ب - ج - د)(ب + ج - د - ا)(ج + د - ا - ب)(د + ا - ب - ج)}{(ا + ب + ج + د)(ب + ج + د + ا)(ج + د + ا + ب)(د + ا + ب + ج)} = ۲$$

۸۷ - ایک محدب مخمس 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د'، 'ع' ایک دائرہ میں کھینچا گیا ہے،
 اس کا گھیرا اور رقبہ علی الترتیب ۲س اور ۱س ہیں، اور 'ع' اور 'ب' پر گئے
 زاویوں کا مجموعہ 'ہ' ہے، 'ا' اور 'ج' پر گئے زاویوں کا مجموعہ 'بہ' اور 'د' و 'س' علی ہذا۔
 ثابت کرو کہ

۲س (جب ۲ + + جب ۲ + ۲س (جب ۲ + + جب ۲) = ۲
 ۸۸ - 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' ایک محدب ذواربعۃ الاضلاع ہے جس کے ضلع ایک
 دائرے کو مس کرتے ہیں اور اس ایک دوسرے دائرہ پر واقع ہوتے ہیں۔
 مخمس کے حائط دائرہ کے تماس نقطوں 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' پر کھینچے گئے ہیں جن سے
 ایک دوسرا محدب ذواربعۃ الاضلاع بنتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس آخری
 ذواربعۃ الاضلاع کا رقبہ ہے

$$\frac{(س - ش - ۲ا - ۲ب - ج - د)(ا - ب - ج - د)(ب - ج - د - ا)(ج - د - ا - ب)(د - ا - ب - ج)}{(س - ش - ۲ا - ۲ب - ج - د)(ا - ب - ج - د)(ب - ج - د - ا)(ج - د - ا - ب)(د - ا - ب - ج)} = ۲$$

جہاں دائرہ 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' کا نصف قطر ہے اور $۲س = ا + ب + ج + د$ اور

$$۲ش = ب + ج + د + ا + ب + ج$$

تیرہواں باب

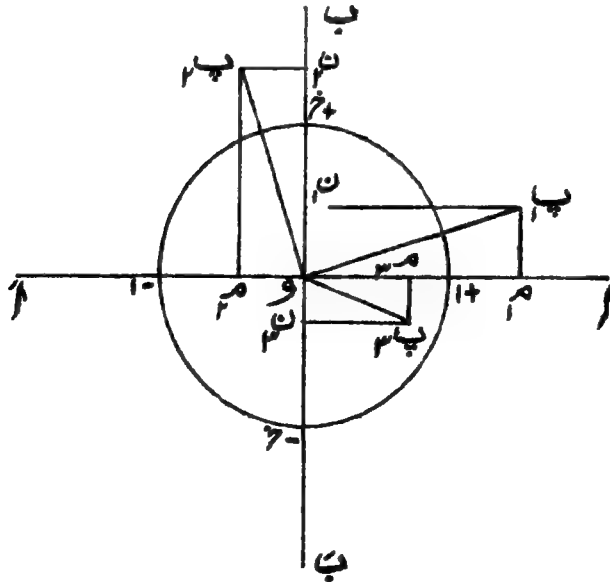
ملطف اعداد

۱۷۰۔ — جبر و مقابلہ کی کتابوں میں شکل لا + خ کے عددوں پر جنہیں ملطف اعداد کہا جاتا ہے بحث کی جاتی ہے اور جبری اعمال کے معمولی قوانین کا ان پر اطلاق درست ثابت کیا جاتا ہے۔ ہم اس باب میں اُس طریقہ پر غور کریں گے جس میں ایسے ملطف عدد ہندسی طور پر تعبیر کیے جاسکتے ہیں اور جس میں ایسے عددوں کے حاصل جمع اور حاصل ضرب ہندسی طور پر ظاہر کیے جاسکتے ہیں۔ یہ معلوم ہو گا کہ اس سلسلہ میں دائری تفاعل فطرتاً خود بخود پیش ہوتے ہیں، اور فی الواقع ایسے تفاعلوں کا إدخال ضروری ہے تاکہ ملطف عددوں کے حاصل ضرب اور حاصل تقسیم اختصاراً بیان ہو سکیں۔

ملطف عدد کی ہندسی تعبیر

۱۷۱۔ — ایک مثبت یا منفی حقیقی عدد کو ہندسی طور پر اس طرح تعبیر کرتے ہیں کہ ایک ثابت لا تنہا ہی خط مستقیم اوپر پیمانہ کے مطابق طول و $1 = 1$ کسی معروف نقطہ سے اس کی ایک سمت یا دوسری سمت میں بموجب اس کے کہ عدد لا مثبت ہے یا منفی ناپتے ہیں؛ تب ہم یہ خیال کر سکتے ہیں کہ عدد لا یا تو m کے محل سے تعبیر ہوتا

ہے یا خط مستقیم و مہ سے۔ اب خالص خیالی عدد χ کو تعبیر کرنے کے لیے کسی ثابت مستوی میں جس میں α واقع ہے ایک ثابت خط مستقیم α پر جو α و α پر عمود ہو، پھر β و β پر α سے طول α و α بنا جو β یا β کی سمت میں لیا جائے بموجب اس کے کہ ثابت ہو یا منفی؛ تب ہم یہ خیال کریں گے کہ خیالی عدد χ ما نقطہ α سے تعبیر ہوتا ہے یا نیز خط مستقیم α سے۔ اکائی نصف قطر کا دائرہ خطوط مستقیم α اور β کو ان نقطوں پر قطع کریں گے جو عددوں ± 1 ، ± 2 ، ± 3 کو تعبیر کرتے ہیں۔ ملطف عدد α + χ کو تعبیر کرنے کے لیے مستطیل و مہ α کی تکمیل کرو، تب ہم یہ خیال کریں گے کہ نقطہ β یا نیز خط مستقیم α ملطف عدد α + χ کو تعبیر کرتا ہے۔ اس طرح ہم یہ فرض کر لیتے ہیں کہ دو عددوں α اور χ کا حاصل جمع ہندسی طور پر اس متوازی الاضلاع کے وتر سے تعبیر ہوتا ہے جس کے دو ضلع خطوط مستقیم و مہ α و α ہیں جو علی الترتیب α اور χ کو تعبیر کرتے ہیں۔



مثلث میں پ، ملطف عدد لا + خ ما کو تعبیر کرتا ہے جس میں لا اور ما دونوں مثبت ہیں؛ پ، ملطف عدد لا + خ ما کو جس میں لا منفی ہے اور لا مثبت؛ پ، عدد لا + خ ما کو جس میں لا مثبت ہے اور لا منفی۔ ا و ا کو حقیقی محور کہتے ہیں اور ب و ب کو خیالی محور۔

۱۷۲۔ فرض کرو کہ و پ کا مطلق طول ر سے تعبیر ہوتا ہے اور ط وہ نزاد یہ ہے جو و پ، و ا کے ساتھ بناتا ہے جبکہ اس کو د سے مخالف سمت ساخت ناپا جاتا ہے۔ تب

$$لا = رجم ط، ما = رجب ط، ی = لا + خ ما = ر (جم ط + رجب ط)$$

$$جہاں \quad ر = \sqrt{لا^2 + ما^2} \quad ط = مس \frac{ا}{لا}$$

عدد $ر = \sqrt{لا^2 + ما^2}$ کو جو لازمی طور پر مثبت عدد ہے ملطف عدد لا + خ ما کا مقياس کہتے ہیں اور نزاد یہ ط کو اس ملطف عدد کی دلیل یا وجہ۔ پس خط مستقیم و پ جو اس متوی میں و سے کسی سمت میں ناپا گیا ہو مطلق طول کی اور سمت کی دو خصوصیتوں کی وجہ سے ایک ملطف عدد کو پوری طرح تعبیر کرنے کے قابل ہے۔ عدد لا + خ ما کو اس متوی کے کسی اور خط مستقیم سے بھی تعبیر کیا جاسکتا ہے جو و پ کے متوازی اور طول میں اس کے مساوی کھینچا گیا ہو کیونکہ ایسا خط مستقیم لا + خ ما کے مقياس اور دلیل دونوں کو تعبیر کرتا ہے۔

۱۷۳۔ فرض کرو کہ کوئی نقطہ پ، آ سے ابتدا کر کے اور مخالف سمت ساعت حرکت کرتے ہوئے ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے جس کا مرکز و اور نصف قطر ر ہے؛ تب اس ملطف عدد کا مقياس جو پ سے تعبیر ہوتا ہے مستقل اور ر کے مساوی رہتا ہے لیکن دلیل جبری طور پر - ۲۲ سے شروع کر کے مسلسل

بڑھتی جاتی ہے۔ ہم فرض کر سکتے ہیں کہ نقطہ پ دائرہ میں متعدد مکمل گردشیں کر چکا ہے، تب ہر دفعہ جب وہ کسی ثابت مقام پ سے گزرتا ہے ملتف عدد لا + خ ما کی وہی قیمت ہوتی ہے، یعنی اس کی دلیل میں π^2 کے ضعف کے اضافہ سے یہ ملتف عدد نہیں بدلتا۔ یہ الفاظ دیگر متغیر

لا + خ ما = ر (جم ط + خ جب ط)

جس کو اس کے مقیاس ر اور اس کی دلیل ط کا تفاعل خیال کیا جاسکتا ہے دلیل کے لحاظ سے دوری (Periodic) ہے۔

کسی عدد لا + خ ما کے لیے ط کی اس قیمت کو جو π اور π^2 کے درمیان واقع ہوتی ہے دلیل کی صدر قیمت کہہ سکتے ہیں، اور ہم بالعموم ایسے عدد کی دلیل کا جب ذکر کریں گے تو اس سے مراد وہی صدر قیمت ہوتی ہے۔

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ دلیل ط کی صدر قیمت کا مس ا ط کی صدر قیمت ہونا ضروری نہیں ہے (دیکھو دفعہ ۳۸) کیونکہ لا + خ ما کی ایک دی ہوئی قیمت کے جواب میں جم ط اور جب ط دونوں کی قیمتیں معلوم ہوتی ہیں اور اس لیے ط کی صرف ایک قیمت π اور π^2 کے درمیان ہوتی ہے۔

اس مفہوم میں ایک مثبت حقیقی عدد کی دلیل صفر ہے اور ایک مثبت خیالی عدد کی دلیل $\frac{\pi}{2}$ ہے اور ایک منفی خیالی عدد کی دلیل $-\frac{\pi}{2}$ ، لیکن منفی حقیقی عدد کی دلیل کی صدر قیمت حسب تعریف بالابہم ہے کیونکہ یہ π ہے یا $-\pi$ ، لیکن ہم اس کو π ہی خیال کریں گے۔ مزدوج اعداد لا + خ ما، لا - خ ما کے مقیاس تو ایک ہی ہوتے ہیں لیکن ان کی دلیلیں ط اور - ط ہیں۔

لا + خ ما کے مقیاس کو اکثر متی (لا + خ ما) سے یا لا + خ ما سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ ۱۷۴ — اس امر کا مشاہدہ کرنا بنیادی اہمیت رکھتا ہے کہ حقیقی متغیر لا جبکہ لا سے لاپ تک مسلسل بڑھتا ہے تو وہ صرف قیمتوں کے

(227)

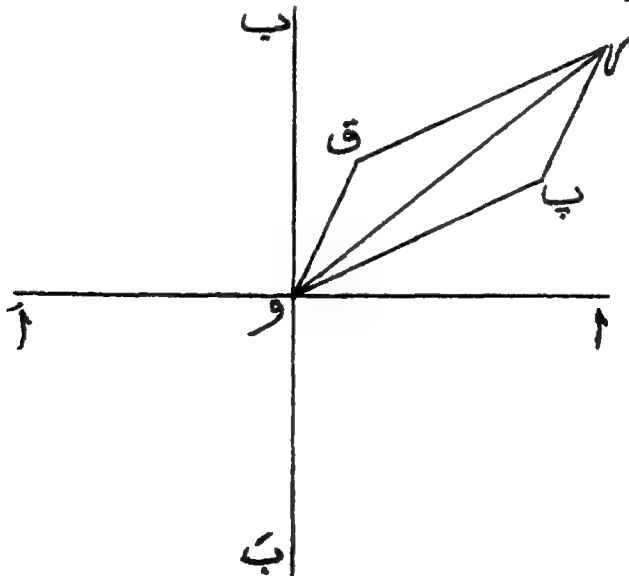
ایک جٹ میں سے گزر سکتا ہے، لیکن ملف متغیر لا + خ ما کی یہ کیفیت نہیں ہے۔ یہ فرض کر کے بھی کہ لا اور ما دونوں مسلسل بڑھتے ہیں لا انتہا طریقے ہیں جن میں ملف متغیر لا + خ ما قیمت لا + خ ما سے لا + خ ما تک مسلسل بدل سکتا ہے کیونکہ لا سے لا تک لا کا مسلسل اضافہ ہا سے ہا تک لا کے مسلسل اضافہ کے تابع نہیں ہے۔ یہ امر اس واقعہ میں لازمی طور پر شامل ہے کہ ملف عدد میں دو الگ الگ اکائیاں پائی جاتی ہیں اور اس واقعہ کی یہ ہندسی تعبیر ہے کہ شکل میں دو نقطے پ اور پ' لا انتہا طریقوں سے ایک دوسرے سے ملائے جاسکتے ہیں کیونکہ متغیر کو تعبیر کرنیوالا نقطہ پ اور پ' کو ملائیوالے کسی اختیاری منحنی پر حرکت کر سکتا ہے۔ اگر ایک حقیقی متغیر کو ہمیشہ حقیقی رہتے ہوئے لا سے لا تک بڑھنا ہے تو متغیر کو تعبیر کرنیوالے نقطہ کی حرکت محور لا میں مقید ہو جاتی ہے، اگر متغیر پر یہ قید نہ ہو کہ اس کی درمیانی قیمتیں حقیقی ہوں تو اس کو تعبیر کرنیوالا نقطہ کسی اختیاری منحنی کو مرسم کر سکتا ہے جو محور لا پر کے ان دو نقطوں کو ملا سکتا ہے۔

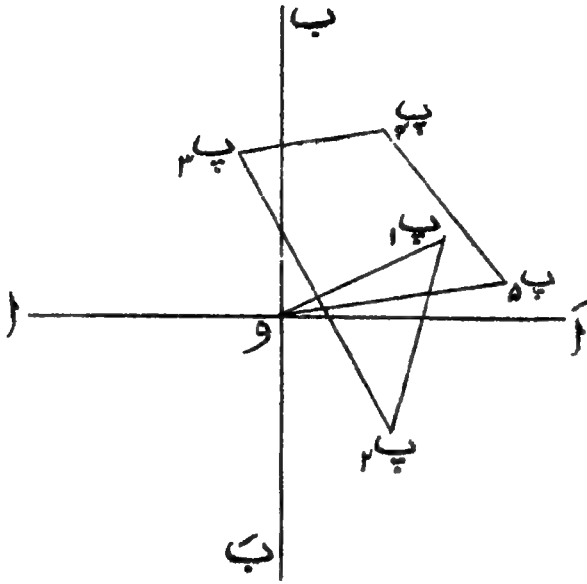
ہم اس نکتہ کو اس طرح بیان کر سکتے ہیں کہ ایک خالص حقیقی یا خالص خیالی عدد لازماً ایک بعدی ہے، لیکن ایک ملف عدد دو بعدی ہے اور اس لیے اس کی ہندسی تعبیر کے لیے دو بعدی فضاء چاہیے۔ ملف عددوں کو ہندسی طور پر تعبیر کرنا طریقہ ارگنڈ (Argand) نے ایک مقالہ میں جو ۱۸۰۶ء میں شائع ہوا تھا دیا تھا لیکن اس سے قبل ۱۷۸۵ء میں کہوں (kühn) نے ان کی ہندسی تعبیر دریافت کرنے کی سعی کی تھی۔ تعبیر کے اس طریقہ پر جو نظریہ قائم ہوا ہے اس کی توسیع و ترقی کو شلی، گاس، رین اور دوسروں نے کی۔ یہ نظریہ تفاعلوں کے موجودہ نظریہ کی بنیاد ہے۔

ملف عددوں کی جمع

۱۷۵ — فرض کر دو ملف عددوں لا + خ ما، لا + خ ما کو

نقطہ پ، قی تعبیر کرتے ہیں؛ متوازی الاضلاع و پ سرق کی تکمیل کرو؛ تب و س کا ظل کسی ایک محور پر، اس محور پر و پ، پ س یا و پ، وق کے ظلوں کے مجموعہ کے مساوی ہے؛ اس لیے فقط س، و د دئے ہوئے ملتف عددوں کے مجموعہ (لا + لا) + (خ + با + با) کو تعبیر کرتا ہے۔ پس ہم دیکھتے ہیں کہ دو ملتف عددوں کا حاصل جمع ہمیشہ طور پر اس طرح حاصل ہوتا ہے کہ ان ملتف عددوں کو تعبیر کرنے والے خطوط مستقیم کو قانون متوازی الاضلاع کی بموجب جمع کیا جائے۔ ہم نے یہ فرض کر لیا ہے کہ وہ مساوی اور متوازی خطوط مستقیم جن کے طول ایک ہی ہیں اور جو ایک ہی سمت میں کھینچے گئے ہیں ایک ہی ملتف عدد کو تعبیر کرتے ہیں، مثلاً پ س جو پ سے وق کے متوازی اور مساوی کھینچا گیا ہے ملتف عدد لا + خ با کو تعبیر کرتا ہے۔ پس ہم جمع کے قاعدے کو یوں بیان کر سکتے ہیں :- دسے خط مستقیم و پ کھینچو جو لا + خ با کو تعبیر کرے اور پھر پ سے پ س کھینچو جو لا + خ با کو تعبیر کرے؛ و س کو لاؤ؛ تب و س، یا فقط س، حاصل جمع (لا + لا) + (خ + با + با) کو تعبیر کر یگا۔



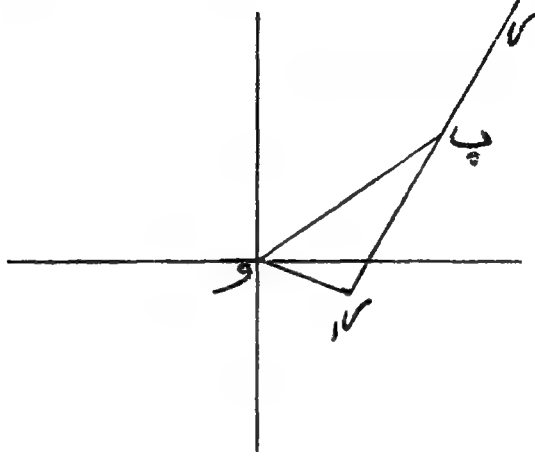


۱۷۶ — منبع کا جو طریقہ اوپر بیان کیا گیا ہے اس کی توسیع اعداد کے کسی جٹ کے لیے ہو سکتی ہے۔
 دفعہ ماقبل کی دوسری شکل میں و پ کھینچو جو لا + خ ما کو تعبیر کرے، پھر پ سے پ پ کھینچو جو لا + خ ما کو تعبیر کرے، پھر پ سے پ پ کھینچو جو لا + خ ما کو تعبیر کرے، و قس علی ہذا۔ اس کے بعد و پ کو لاؤ۔ تب ان عددوں لا + خ، لا + خ، لا + خ، ...، لان + خ مان کا حاصل جمع خط مستقیم و پ ن یا نقطہ پ ن سے تعبیر ہوگا۔

چونکہ طوں و پ، طولوں و پ، پ پ، ...، پ پ۔ ا پ ن

کے مجموعہ سے بڑا نہیں ہو سکتا اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ملف عددوں کے ایک جٹ کے حاصل جمع کا مقياس ان کے مقياسوں کے مجموعہ کے مساوی یا اس سے کم ہوتا ہے۔
 ۱۷۷ — لا + خ ما کو لا + خ ما سے تفریق کر نیکی لے پ سے ایک خط پ کا کھینچنا چاہیے جو۔ (لا + خ ما) کو تعبیر کرے، یہ خط پ سے مساوی مگر مخالف

سمت میں ہوگا۔ تب مطلوبہ حال تفریق یا فرق خط و سہ سے یا نقطہ سہ سے تعمیر ہوگا۔



ملف عددوں کی ضرب

۷۸۔ دو عددوں لا + خ ما، لا + خ ما، لا + خ ما کا حاصل ضرب

$$(لا + لا - ما + ما) + (خ + لا + ما + لا)$$

اور اگر ہم لا + خ ما، لا + خ ما، لا + خ ما کی بجائے

$$ما (جم + خ جب ط) + (جم ط + خ جب ط)$$

رکھیں تو ان کا حاصل ضرب لکھا جاسکتا ہے

$$ما (جم + ط) + (جم ط + خ جب ط)$$

اس جملہ سے ظاہر ہے کہ دو عددوں کے حاصل ضرب کا
مقیاس ان عددوں کے مقیاسوں کے حاصل ضرب کے مساوی
ہوتا ہے اور حاصل ضرب کی دلیل دلیلوں کے مجموعہ کے مساوی
ہوتی ہے۔

تاہم یہ مشاہدہ طلب ہے کہ اگر $لا + خ ما + لا$ کی دلیلوں کی صدر قیمتیں $ط$ ، $ط$ ہوں تو ضروری نہیں کہ حاصل ضرب کی دلیل کی صدر قیمت $ط + ط$ ہو۔

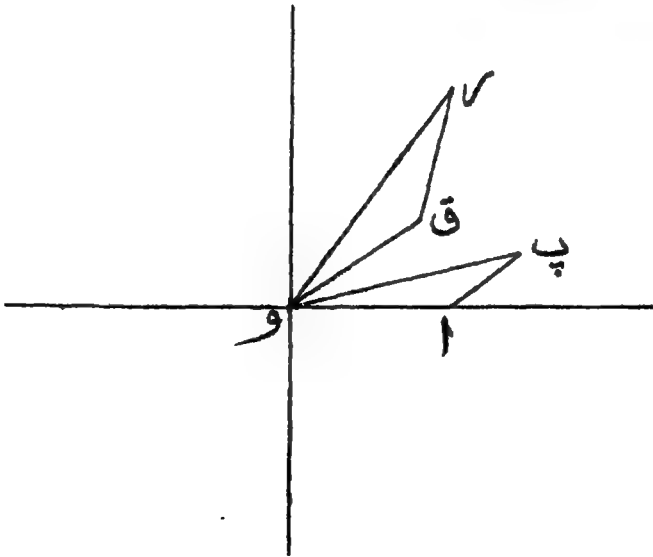
اب ہم دو عددوں کے حاصل ضرب کے لیے ہندسی عمل حاصل کر سکتے ہیں؛ فرض کرو کہ $ا$ ، $پ$ ، $ق$ ، $س$ تین عددوں $ا$ ، $لا + خ ما$ ، $لا + خ ما$ کو تعبیر کرتے ہیں؛ $ا$ ، $پ$ کو $لا$ ، $ق$ پر ایک مثلث $ق$ و $س$ اس طرح بناؤ کہ وہ $ا$ و $پ$ کے مشابہ ہو

اور زاویہ $ق$ و $س$ = $ط$ + $ط$

تب زاویہ $س$ و $ا$ = $ط$ + $ط$

اور نیز $وسا : وق = وپ : دا$

پس $وسا$ کا طول طولوں $وپ$ اور $وق$ کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ نقطہ $س$ ، حاصل ضرب $(لا + خ ما) \times (لا + خ ما)$ کو تعبیر کرتا ہے۔



اب اگر ہم ایک تیسرا جزو ضربی لایم + خ لایم = لایم (جم طیم + خ جب طیم) شامل کریں تو

$$(لا + خ لایم) (لا + خ لایم) (لا + خ لایم)$$

$$= لایم لایم لایم (جم طیم + طیم) (جم طیم + طیم) (جم طیم + طیم) + خ جب طیم (جم طیم + طیم) (جم طیم + طیم) (جم طیم + طیم)$$

$$= لایم لایم لایم (جم طیم + طیم + طیم + طیم) (جم طیم + طیم + طیم + طیم) (جم طیم + طیم + طیم + طیم)$$

اسی طرح چار یا زیادہ ملٹف عددوں کا حاصل ضرب معلوم ہو سکتا ہے۔

(231) ن ملٹف عددوں کی صورت میں ضابطہ حاصل ہوتا ہے

$$(لا + خ لایم) (لا + خ لایم) \dots (لا + خ لایم)$$

$$= لایم لایم لایم \dots لایم لایم لایم (جم طیم + طیم + طیم + \dots + طیم) (جم طیم + طیم + طیم + \dots + طیم) (جم طیم + طیم + طیم + \dots + طیم)$$

یا ملٹف عددوں کے کسی جٹ کے حاصل ضرب نکالنا

مقیاس ان کے مقیاسوں کا حاصل ضرب ہوتا ہے

اور ان کے حاصل ضرب کی دلیل ان کی دلیلوں کے

مجموعہ کے مساوی ہوتی ہے۔ ملٹف عددوں کے کسی جٹ

کے حاصل ضرب کو ہندسی طور پر حاصل کرنے کے لیے مذکورہ بالا دو عددوں

کے حاصل ضرب کے طریقے کی تکرار عمل میں لائی جاسکتی ہے۔

ایک ملٹف عدد کو دوسرے سے تقسیم کرنا

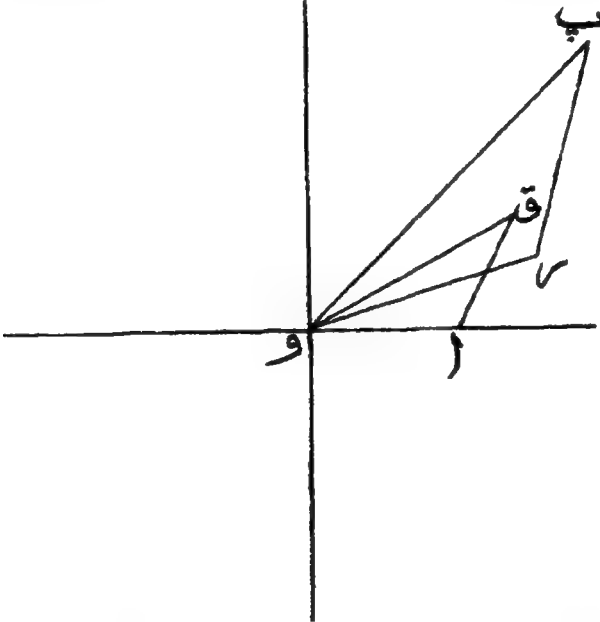
$$۱۷۹ — خارج قسمت (لا + خ لایم) \div (لا + خ لایم)$$

$$\frac{1}{p} = \frac{\{ (لا + لا + لا) - (لا + لا - لا) \}}{p}$$

$$\frac{1}{p} = \{ (حم - ط) + (خ جب - ط) \}$$

یا پس دو عددوں کے خارج قسمت کا مقياس ان کے مقياسوں کا خارج قسمت ہوتا ہے اور خارج قسمت کی دلیل ان کی دلیلوں کے فرق کے مساوی ہوتی ہے۔

خارج قسمت کو ہندسی طور پر تعبیر کرنے کے لیے نقطہ ق (لا + خ لا)



(282) کو نقطہ ۱ (۱ + ۱) سے یا 'و' اور مثلث و ر پ کو اس طور پر بناؤ کہ مثلث

و ا ق کے متشابه ہو اور زاویہ و ر پ کا ناپ - ط ہو۔ تب زاویہ

و ر ۱ = ط - ط اور و ر = $\frac{و ب}{و ق}$ اس لیے نقطہ ر حاصل تقسیم

یا خارج قسمت کو تعبیر کرتا ہے۔

کے درمیان جو قوس ہے اُس کے محاذی مرکز و پر زاویہ ط بنتا ہے۔

۱۸۱۔ قوت نماؤں کے نظریہ کے مطابق اگر ن کوئی مثبت

صحیح عدد ہو تو جملہ (لا + خ) سے وہ عدد تعبیر ہوتا ہے جس کی ن میں

قوت لا + خ ہے۔ اب چونکہ کسی عدد کے مقياس کی ن میں قوت

اُس عدد کی ن میں قوت کا مقياس ہے اور چونکہ ہر عدد کا مقياس

حقیقی اور مثبت ہوتا ہے اس لیے (لا + خ) کا مقياس ہوتا ہے

جہاں ہا، مقياس کا حقیقی مثبت ن واں جذ ہے۔ فرض کر دے

(لا + خ) کی ایک قیمت ہا (جم ذ + خ جب ذ) ہے تو

$$ر (جم ذ + خ جب ذ) = ر (جم ط + خ جب ط)$$

$$جم ن ذ + خ جب ن ذ = جم ط + خ جب ط$$

$$اس لیے جم ن ذ = جم ط، جب ن ذ = جب ط$$

$$یا ن ذ = ط + س ۲$$

جہاں س کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے بشمول صفر۔ پس

$$(لا + خ) \frac{1}{ن}$$

$$کی ایک قیمت ہے ہا \left\{ \frac{جم ط + س ۲}{ن} + خ جب ط + س ۲ \right\}$$

کیونکہ اس جملہ کی ن میں قوت لا + خ کے مساوی ہے۔ اور کے استدلال

سے یہ ظاہر ہے کہ (لا + خ) کی ہر قیمت مندرجہ بالا شکل کی ہونی چاہیے۔

اگر س کو قیمتیں ۱، ۲، ۳، ...، ن-۱ دی جائیں تو ان قیمتوں میں سے ہر ایک کے لیے

$$جم ط + س ۲ + خ جب ط + س ۲ = \frac{جم ط + س ۲}{ن}$$

کی قیمت مختلف ہوگی کیونکہ س کی دو قیمتوں س، س کے لیے اس جملہ کی مساوی قیمتیں ہوں تو ہمیں حاصل ہونا چاہیے

$$\text{جم} \frac{\pi_1 s + ط}{n} = \text{جم} \frac{\pi_2 s + ط}{n}$$

$$\text{اور جب} \frac{\pi_1 s + ط}{n} = \text{جب} \frac{\pi_2 s + ط}{n}$$

$$\text{یعنی} \frac{\pi_1 s + ط}{n} = \pi_2 k = \frac{\pi_2 s + ط}{n}$$

$$\text{یا} \quad s - s = n k$$

جہاں ک کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔ لیکن یہ ناممکن ہے اگر س اور س دونوں مختلف اور ن سے کم ہیں۔ اس لیے مذکورہ بالا قیمتیں سب کی سب مختلف ہیں۔

اگر ہم س کو دوسری قیمتیں دیں جو صفر اور ن۔ ا کے درمیان واقع نہ ہوں تو ان سے (جم ط + خر جب ط) کی کوئی اور قیمتیں حاصل نہیں ہونگی کیونکہ اگر س کی ایسی کوئی قیمت س ہو تو صفر اور ن۔ ا کے درمیان ایک عدد س کا معلوم کرنا ہمیشہ ممکن ہے ایسا کہ س - س، ن کا ایک ضعف ہو، اور اس لیے جملہ بالا کی قیمت س = س کے لیے وہی ہے جو س = س کے لیے ہے۔

پس ہم دیکھتے ہیں کہ (لا + خر ما) کی تمام قیمتیں سلسلہ

$$نار (جم \frac{\pi}{n} + خر جب \frac{\pi}{n})، نار (جم \frac{\pi}{n} + ط) + خر جب \frac{\pi}{n}$$

$$، \dots، نار (جم \frac{\pi}{n} + ط + \frac{\pi(1-n)^2}{n}) + خر جب \frac{\pi}{n}$$

سے ملتی ہیں جو ن اعداد پر مشتمل ہے اور جس میں π حقیقی اور مثبت ہے۔

۱۸۲۔ اگر π لا + خ ما کی دلیل کی صدر قیمت ط ہو یعنی دلیل کی وہ قیمت جو π اور π کے درمیان واقع ہے تو ہرسم $\frac{1}{\pi}$ (لا + خ ما) کی صدر قیمت کو جملہ

(284)

$$\pi \text{ (جم ط) } + \text{خ جب ط}$$

تصور کر سکتے ہیں۔ اب جلوں جم ط + خ جب ط، جم ط + π + خ جب ط، π کے ن ویں جذروں کی صدر قیمتیں جم ط + خ جب ط، جم ط + π + خ جب ط، π کے ن ویں جذروں کی صدر قیمتیں تصور ہو سکتی ہیں۔ اس لیے (لا + خ ما) کی مختلف قیمتیں ر اور ط کے تناظر جلوں کی صدر قیمتیں ہیں جب کہ دلیل ط کی ن مختلف قیمتیں لیجائیں۔ (لا + خ ما) کی صدر قیمت سے وہ جملہ مراد ہے جس میں ط کی صدر قیمت لی گئی ہے۔

اگر ایک مثبت حقیقی مقدار ہے تو $\frac{1}{\pi}$ کی دو قیمتیں ماو (جم + خ جب) اور ماو (جم + خ جب) ہیں یعنی ماو اور ماو جہاں کا مثبت جذر المربع ماو ہے۔

$$\pi = \frac{1}{\pi} \text{ (جم) } + \frac{1}{\pi} \text{ (خ جب) } + \pi$$

$$\pi \text{ (جم) } + \pi \text{ (خ جب) } + \pi$$

یا خ ماو، خ ماو، $\frac{1}{\pi}$ کی صدر قیمت ماو ہے اور $\frac{1}{\pi}$ کی صدر قیمت خ ماو

۱۸۳۔ دفعہ ۱۸ کے جلوں میں $\pi = 1$ ، ط = ۰ رکھنے سے

ایک کے n ویں جذر حاصل ہوتے ہیں اور اس لیے یہ جذر ہیں

$$۱، ۲، ۳، \dots، \frac{\pi^2}{n} + \text{خ جب } \frac{\pi^2}{n}، \text{جم } \frac{\pi^2}{n} + \text{خ جب } \frac{\pi^2}{n}، \dots$$

$$\dots، \text{جم } \frac{\pi^2 (1-n)^2}{n} + \text{خ جب } \frac{\pi^2 (1-n)^2}{n}$$

اب اگر ہم جذر $\frac{\pi^2}{n} + \text{خ جب } \frac{\pi^2}{n}$ کو سہ سے تعبیر کریں تو اوپر کے سب جذر

$$۱، ۲، ۳، \dots، n-1$$

سے تعبیر ہوتے ہیں۔

اب چونکہ

$$\text{جم } \frac{\pi^2}{n} + \text{خ جب } \frac{\pi^2}{n} = (\text{جم } \frac{\pi^2}{n} + \text{خ جب } \frac{\pi^2}{n})$$

$$\times (\frac{\pi^2}{n} + \text{خ جب } \frac{\pi^2}{n})$$

اس لیے نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر $(\frac{1}{n} + \text{خ})$ کی صدر قیمت $\frac{1}{n} + \text{خ}$ سے تعبیر ہو تو

$(\frac{1}{n} + \text{خ})$ کی تمام قیمتیں سلسلہ

$$\frac{1}{n} + \text{خ}، \frac{2}{n} + \text{خ}، \dots، \frac{n-1}{n} + \text{خ}$$

سے حاصل ہوتی ہیں۔

مثالیں

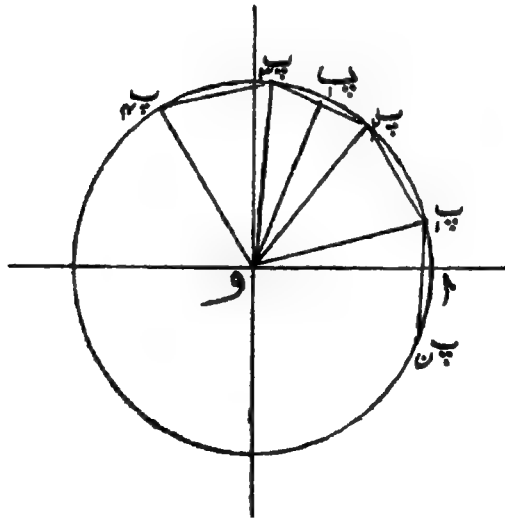
(۱) $(1-\frac{1}{4})$ اور نیز $(1-\frac{1}{4})$ کی تمام قیمتیں معلوم کرو۔

(۲) $(1+\frac{1}{4})$ کی تمام قیمتیں معلوم کرو۔

(285)

۱۸۴ — اب ہم یہ دکھائیے کہ ایک ملطف عدد کے n ویں جذروں کو ہندسی طور پر کس طرح تعبیر کیا جاسکتا ہے؟ اس ہندسی طریقہ سے n ویں جذر کی n مختلف قیمتوں کے وجود کا خود بخود ثبوت مل جائیگا۔ عمومیت کو نقصان پہنچائے بغیر ہم مقیاس کو ایک (اکائی) فرض کر سکتے ہیں، اس طرح ہمیں جملہ $(\text{جم } ط + \text{خر جب } ط)$ کی قیمتیں تعبیر کرنی ہیں۔

فرض کرو کہ ایک نقطہ P ، A سے جس پر $ط = 0$ ، چلتا ہے اور اکائی نصف قطر کا دائرہ قسّم کرتا ہے، تب P کے کسی محل میں جس کے لیے زاویہ P و A جو P سے قسّم ہوا ہے $ط$ ہے نقطہ P ، جملہ $ط + \text{خر جب } ط$ کو تعبیر کرتا ہے۔ فرض کرو کہ ایک دوسرا نقطہ P ، A سے اسی آن چلتا ہے جس آن P نکلا ہے اور فرض کرو کہ اس کی زاویائی رفتار ہمیشہ P کی رفتار کا $\frac{1}{n}$ رہتی ہے اور اس لیے زاویہ P و A ہمیشہ $\frac{ط}{n}$ کے مساوی رہتا ہے۔ تب P جم $\frac{ط}{n} + \text{خر جب } ط$ کو تعبیر کرتا ہے۔ جب P اولاً کسی محل P پہنچتا ہے تو



معلوم کرنے کے لیے صرف یہ ضروری ہے کہ ان ہندسی سوالات میں سے دوسرے کو حل کیا جائے کیونکہ اس صورت میں وہ زاویہ صفر ہے جس کو n مساوی حصوں میں تقسیم کرنا ہوتا ہے۔ پس ایک دیے ہوئے دائرہ میں n ضلعوں والا ایک منتظم اکثر الاضلاع کھینچنے کا سوال اس سوال کے مماثل ہے کہ مساوات $1 - a^n = 0$ کی اصلوں کی عددی قیمتیں حاصل کی جائیں۔ یہ ہندسی سوال حسب ذیل صورتوں میں ایک طریقہ سے حل ہو سکتا ہے جس میں صرف خطوط مستقیم اور دائروں کی ساخت کا عمل شامل ہے :-

(۱) جبکہ $n = 2$ کی کوئی قوت ہو مثلاً جبکہ $n = 2^m$ جہاں m کوئی عدد ہو

(۲) جبکہ n شکل $2^m + 1$ کا ایک مفرد عدد ہو مثلاً جبکہ $n = 3, 5, 17, 257$

اس کو گاس نے اپنی کتاب "Disquisitiones arith." میں ثابت کیا تھا۔

(۳) جبکہ n شکل $2^m + 1$ کے متعدد مفرد عددوں اور 2^m کی کسی قوت کا

حاصل ضرب ہو مثلاً جبکہ $n = 15, 17, 255$

گاس کے مسئلہ کا ثبوت اگر ہم دینے بیٹھیں تو عددوں کے نظریہ میں بہت دور تک ہمیں جانا ہوگا؛ تاہم ہم نے دفعہ ۸۵ مثال (۴) میں مخصوص صورت $n = 2^m + 1$ پر بحث کی ہے جہاں جب $\frac{1}{2^m}$ کو ایک ایسی شکل میں جو جذروں پر مشتمل ہے معلوم کیا گیا ہے۔

ڈیموائر کا مسئلہ

(237)

۱۸۶۔ م کی تمام حقیقی قیمتوں کے لئے جم م ط

$+ \text{خ جب م ط} (\text{جم ط} + \text{خ جب م ط})$ کی ایک قیمت ہے۔

یہ مسئلہ جو ڈیموائر کے مسئلہ کے نام سے مشہور ہے دفعات ۱۸۰

اور ۱۸۱ میں ان دو صورتوں $m = n$ اور $m = \frac{1}{n}$ کے لیے ثابت

کیا جا چکا ہے جبکہ ن ایک مثبت صحیح عدد ہو۔ ثبوت کی تکمیل کے لیے ہمیں ان صورتوں پر غور کرنا ہے (۱) جبکہ $m = \frac{f}{q}$ ، یعنی جبکہ m ایک مثبت کسر ہو، (۲) جبکہ m ایک مثبت غیر منطقی عدد ہو اور آخر الامر (۳) جبکہ m کوئی منفی حقیقی عدد ہو۔ یہ ظاہر ہے کہ (جم ط + خ جب ط) $\frac{f}{q}$ = (جم ف ط + خ جب ف ط) اور اس کی ایک قیمت جم $\frac{f}{q}$ + خ جب $\frac{f}{q}$ ہے۔ اس لیے مسئلہ بالا درست ہے جبکہ m ایک مثبت منطقی عدد ہو۔

یہ ذہن نشین رہے کہ (جم ط + خ جب ط) $\frac{f}{q}$ کی قیمتیں سب کی سب

$$\text{جملہ جم } \frac{f}{q} \text{ (ط + ۲س ۲) + خ جب } \frac{f}{q} \text{ (ط + ۲س ۲)} = \frac{f}{q}$$

سے ملتی ہیں جس میں $s = ۱, ۲, ۳, \dots, q-۱$ اور $\frac{f}{q}$ اپنی مختصر ترین شکل میں ایک منطقی کسر ہو۔

اگر m ایک منطقی عدد نہیں ہے تو اس کی تعریف ہمیشہ نامحدود و مختلف طریقوں سے منطقی عددوں m, m, m, \dots کے ایک مستند تواتر کی انتہا کے طور پر کی جاسکتی ہے۔ ایسے مستند تواتر میں یہ خاصیت پائی جاتی ہے کہ اگر صہ اختیاری طور پر انتخاب کردہ کوئی منطقی عدد ہو اتنا چھوٹا جتنا ہم چاہیں تو s ہمیشہ مع لوم ہو سکتا ہے ایسا کہ m_s اپنے بعد والوں m_{s+1}, m_{s+2}, \dots میں سے ہر ایک سے مطلق قیمت میں اس قدر فرق رکھے جو s سے کم ہو۔ اگر m کوئی مثبت حقیقی عدد ہے تو m کی

پس ڈیموائر کا مسئلہ ایک مثبت غیر منطق قوت نما کے لیے ثابت ہو چکا۔

(حم ط + خر جب ط م) کی عام قیمتیں ہیں

جم م (ط + ۲ س ۲) + خر جب م (ط + ۲ س ۲)

جس میں س سے کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد تعبیر ہوتا ہے۔ چونکہ م (س-س) ہرگز ایک صحیح عدد نہیں ہو سکتا جبکہ م غیر منطق ہو ہم دیکھتے ہیں کہ (حم ط + خر جب ط م) کی قیمتوں کا جٹ نامحدود طور پر بڑا ہے۔

یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ ی م کی تعریف جس کی بموجب اس کی قیمتیں جملہ

رک {جم م (ط + ۲ س ۲) + خر جب م (ط + ۲ س ۲)}

کی قیمتیں ہیں ایسی ہے کہ قوت نماؤں کے وہ قوانین جو حقیقی قوت نماؤں پر اطلاق پذیر ہیں غیر منطق قوت نماؤں کے لیے بھی اسی طرح درست ہیں۔ اگر م منطق یا غیر منطق منفی عدد۔ ک ہو تو

$$(\text{حم ط} + \text{خر جب ط م}) = \frac{1}{(\text{حم ط} + \text{خر جب ط م})}$$

اور اس کی ایک قیمت ہمیشہ

$$\frac{1}{\text{حم ک ط} + \text{خر جب ک ط}} \text{ یا } \text{حم ک ط} - \text{خر جب ک ط}$$

ہے جو جم م ط + خر جب م ط کے مساوی ہے۔ اس طرح ڈیموائر کا مسئلہ کسی منفی قوت نما کے لیے درست ہے۔

(جم ط + خ جب ط) (جم ط + خ جب ط) (جم ط + خ جب ط)

= جم (ط + ط + ... + ط) + خ جب (ط + ط + ... + ط)

سے جو طیوئر کے مسئلہ کے ثبوت میں استعمال ہوا ہے دفعہ ۴۹ کے مسئلوں (۲۸)، (۲۹)، (۳۰) کا ثبوت حاصل ہوتا ہے۔ ہم اس متماثلہ کی وائیں جانب کے جملہ کو اس شکل

جم ط جم ط ... جم ط (۱ + خ مس ط) (۱ + خ مس ط) ... (۱ + خ مس ط)

میں لکھ سکتے ہیں۔ پس اس متماثلہ کی طرفین کے حقیقی اور خیالی حصوں کو مساوی رکھنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

جم (ط + ط + ... + ط) = جم ط جم ط ... جم ط (۱ - م + م - ...)

جب (ط + ط + ... + ط) = جم ط جم ط ... جم ط (م - م + م - ...)

جہاں م سے وہ مجموعہ تعبیر ہوتا ہے جو ن حاسوں میں سے س، س حاسوں کے حاصل ضربوں کا ہے۔ (289)

دفعہ ۱۱ کے مسئلے (۳۹)، (۴۰)، (۴۱) مسئلہ جم ن ط + خ جب ن ط

= (جم ط + خ جب ط) سے فوراً حاصل ہوتے ہیں اگر اس مساوات کی بائیں جانب کو مسئلہ شنائی کی مدد سے پھیلایا جائے اور طرفین کے خیالی اور حقیقی حصوں کو مساوی رکھا جائے۔

اگر ن ایک مثبت صحیح عدد ہے تو (جم ط + خ جب ط) = جم ن ط + خ جب ن ط

اور اس لیے نیز (جم ط - خ جب ط) = جم ن ط - خ جب ن ط۔ ان سے ہمیں ضابطے

حاصل ہوتے ہیں۔ $\text{جم ن ط} = \frac{1}{p} (\text{جم ط} + \text{خر جب ط}) + \frac{1}{p} (\text{جم ط} - \text{خر جب ط})$ ،

$\text{خر جب ن ط} = \frac{1}{p} (\text{جم ط} + \text{خر جب ط}) - \frac{1}{p} (\text{جم ط} - \text{خر جب ط})$

ان میں سے پہلی مساوات فی الحقیقت اس واقعہ کا اظہار ہے جس کا ذکر دفعہ اوہ میں آچکا ہے کہ

$$1 + \text{لاجم ط} + \text{لا}^2 \cdot \text{جم} ۲ ط + \dots + \text{لا}^n \cdot \text{جم} ن ط + \dots$$

ایک متوالی سلسلہ ہے جس کا رشتہ کا پیمانہ $1 - ۲ \text{لاجم ط} + \text{لا}^۲$ ہے۔ جم ن ط کو $ع$ سے

تفسیر کرو تو $ع - ۲ \text{جم ط} + ۱ \cdot ع - ۲ = ۰$ ۔ اس مساوات کو حل کرنے کے لیے ان کو

$ع = ۲$ کن جیسا کہ بالعموم ایسی صورتوں میں کیا جاتا ہے تو کہ کے لیے ہمیں دو درجی مساوات

کہ ۲ کہ $\text{جم ط} + ۱ = ۰$ حاصل ہوتی ہے جس کی صلیں کہ $\text{جم ط} \pm \text{خر جب ط}$ ہیں

پس $ع = ۱ (\text{جم ط} + \text{خر جب ط}) + ۲ (\text{جم ط} - \text{خر جب ط})$

اُس مساوات کا مکمل حل ہے جو $ع$ میں ہے۔ $ن = ۱$ اور $ن = ۲$ رکھنے سے ہم دیکھتے

ہیں کہ $۱ = ۲ = ۱$ اور اس طرح وہ جملہ حاصل ہوتا ہے جو جم ن ط کے لیے اوپر

دیا گیا ہے۔ اسی طرح وہ جملہ معلوم ہو سکتا ہے جو جب ن ط کے لیے ہے۔

اجزائے ضربی

۱۸۸۔ اب ہم لا۔ $(۱ + \text{خر ب})$ کو لا کے لحاظ سے $ن$ خطی

اجزائے ضربی میں تحلیل کر سکتے ہیں۔ یہ جملہ معدوم ہوتا ہے اگر لا $(۱ + \text{خر ب})$

کی قیمتوں میں سے کسی ایک کے مساوی ہو، اگر اس جملہ کی قیمتیں ق،
ق، ق، ...، ق سے تعبیر ہوں تو ہمیں حاصل ہونا چاہیے

$$\text{لا۔} (و + \text{خر ب}) = (\text{لا۔ ق}) (\text{لا۔ ق}) (\text{لا۔ ق}) \dots (\text{لا۔ ق})$$

کیونکہ جب لا۔ ق = ۰ تو لا۔ (و + خر ب) معدوم ہوتا ہے اور اس لیے

لا۔ ق ایک جزو ضربی بغیر باقی کے ہونا چاہیے۔ اس طرح ہمیں ن

مختلف اجزائے ضربی حاصل ہوتے ہیں اور ظاہر ہے کہ ان سے زیادہ

اجزائے ضربی نہیں ہو سکتے۔ رکھو و = رجم ط' ب = رجب ط' تو لا۔ (و +

خر ب) کے اجزائے ضربی ہو جاتے ہیں

$$\left\{ \frac{\pi s^2 + ط}{ن} + \text{خر جب} + \frac{\pi s^2 + ط}{ن} (\text{رجم}) \right\}^{\frac{1-ن}{س}} = \frac{\pi s^2}{ن}$$

$$\text{جہیں غم} = \frac{1}{ن} = \frac{1}{ن} (و + ب) = \frac{1}{ن}$$

اس نتیجے سے متعدد جملوں کے اجزائے ضربی جو ساتویں باب میں

عائسل کیے جا چکے ہیں ماخوذ ہو سکتے ہیں۔

(241)

(۱) فرض کرو و = ۱، ب = ۰ تو ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\left(\frac{\pi s^2}{ن} - \frac{\pi s^2}{ن} (\text{رجم}) - \frac{\pi s^2}{ن} (\text{خر جب}) \right)^{\frac{1-ن}{س}} = \frac{\pi s^2}{ن}$$

$$\pi s^2 = \frac{\pi (س - ن)^2}{ن} + \frac{\pi s^2}{ن}$$

اس لیے اگر ن طاق ہو تو

$$\frac{1}{4} = \frac{s}{(1-n)} \quad \prod_{s=1}^n (1-l) = 1-l$$

$$\left(\frac{\pi s^2}{n} - \text{خریب} \frac{\pi s^2}{n} \right) \left(\frac{\pi s^2}{n} + \text{خریب} \frac{\pi s^2}{n} \right)$$

$$\frac{1}{4} = \frac{s}{(1-n)} \quad \prod_{s=1}^n (1-l) =$$

$$\left(1 + \frac{\pi s^2}{n} \right) (l^2 - \text{لاجم} \frac{\pi s^2}{n})$$

اور اگر ن جفت ہو تو

$$\frac{1}{4} = \frac{s}{(2-n)} \quad \prod_{s=1}^n (1+l)(1-l) = 1-l$$

$$\left(1 + \frac{\pi s^2}{n} \right) (l^2 - \text{لاجم} \frac{\pi s^2}{n})$$

(۲) فرض کرو ۱ = -۱ ب = . تو ہمیں ضابطے حاصل ہوتے ہیں

$$\frac{1}{4} = \frac{s}{(3-n)} \quad \prod_{s=1}^n (1+l) = 1+l$$

$$\left(1 + \frac{\pi(1+s^2)}{n} \right) (l^2 - \text{لاجم} \frac{\pi(1+s^2)}{n})$$

$$\frac{1}{4} = \frac{s}{(2-n)} \quad \prod_{s=1}^n (1+l) = 1+l$$

$$\left(1 + \frac{\pi(1+s^2)}{n} \right) (l^2 - \text{لاجم} \frac{\pi(1+s^2)}{n})$$

$$(3) \quad l^2 - \text{لاجم} \frac{\pi s^2}{n} + 1$$

$$= (l^2 - \text{لاجم} \frac{\pi s^2}{n} - \text{خریب} \frac{\pi s^2}{n}) (l^2 - \text{لاجم} \frac{\pi s^2}{n} + \text{خریب} \frac{\pi s^2}{n})$$

$$\frac{1-n}{4} = \frac{s}{n} \quad \prod_{s=1}^n \left(\frac{\pi s^2 + \text{ط}}{n} - \text{خریب} \frac{\pi s^2 + \text{ط}}{n} \right) \left(\frac{\pi s^2 + \text{ط}}{n} + \text{خریب} \frac{\pi s^2 + \text{ط}}{n} \right)$$

$$\frac{1-n}{4} = \frac{s}{n} \quad \prod_{s=1}^n \left(1 + \frac{\pi s^2 + \text{ط}}{n} \right) (l^2 - \text{لاجم} \frac{\pi s^2 + \text{ط}}{n})$$

یا لاکہ بجائے $\frac{1}{2}$ رکھنے اور طرفین کو $\frac{1}{2}$ سے ضرب دینے سے

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ جم } ط + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{ جم } ط + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

(۴) اس آخری نتیجہ سے ہم اخذ کرتے ہیں

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{ جم } ط + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

رکھو $\frac{1}{2} = \text{جم } ف + \text{خ جب } ف$ ، تو $\frac{1}{2} = \text{جم } ف - \text{خ جب } ف$
اور $\frac{1}{2} = \text{جم } ن ف + \text{خ جب } ن ف$ ، تو $\frac{1}{2} = \text{جم } ن ف - \text{خ جب } ن ف$
اس لیے، ط کون ط میں بدلنے سے،

$$\text{جم } ن ف - \text{جم } ن ط = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\text{جم } ف - \text{جم } ط + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

دائرہ کے خواص

(241)

۱۸۹ — دفعہ ماضی کے اجزائے ضربی والے ضابطوں کے ذریعہ دائرہ کے بعض مشہور خواص حاصل ہو سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ نصف قطر کے ایک دائرہ میں ن ضلعوں والا ایک کثیر الاضلاع کھینچا گیا ہے اور فرض کرو کہ دائرہ کے وسطی میں پ کوئی نقطہ

اور اس کا فاصلہ دائرہ کے مرکز و سے ج ہے۔ فرض کرو کہ زاویہ
 $\angle P$ کو ط سے تعبیر کیا گیا ہے، تب زاویے $\angle P$ و $\angle P$ و $\angle P$...
 علی الترتیب ط + $\angle P$ ، ط + $\angle P$ ، ... ہیں۔ اس لیے

$$\angle P \times \angle P \times \angle P \times \dots = \angle P \times \left[\frac{1}{2} \times 2\pi - \left(\frac{1}{2} \times 2\pi + \text{جم}(\text{ط} + \frac{1}{2} \times 2\pi) \right) \right] = \angle P \times \left[\frac{1}{2} \times 2\pi - \left(\frac{1}{2} \times 2\pi + \text{جم}(\text{ط} + \frac{1}{2} \times 2\pi) \right) \right] + \dots$$

پس ہمیں مسئلہ حاصل ہوتا ہے

$$\angle P \times \angle P \times \angle P \times \dots \times \angle P = \angle P \times \left[\frac{1}{2} \times 2\pi - \left(\frac{1}{2} \times 2\pi + \text{جم}(\text{ط} + \frac{1}{2} \times 2\pi) \right) \right]$$

جو دائرہ کی ڈیمو انٹر کی خاصیت کے نام سے مشہور ہے۔

اس صورت میں جبکہ $\angle P$ محیط پر ہو مسئلہ بالا ہو جاتا ہے

$$\angle P \times \angle P \times \angle P \times \dots \times \angle P = \angle P \times \left[\frac{1}{2} \times 2\pi - \left(\frac{1}{2} \times 2\pi + \text{جم}(\text{ط} + \frac{1}{2} \times 2\pi) \right) \right]$$

اس صورت میں جبکہ $\angle P$ نصف قطر و $\angle P$ پر ہو ط صفر ہوتا ہے اور مسئلہ
 ہو جاتا ہے

$$\angle P \times \angle P \times \angle P \times \dots \times \angle P = \angle P \times \left[\frac{1}{2} \times 2\pi - \left(\frac{1}{2} \times 2\pi + \text{جم}(\text{ط} + \frac{1}{2} \times 2\pi) \right) \right]$$

نیز اگر $\angle P$ ، زاویہ $\angle P$ و $\angle P$ کے ناصف پر واقع ہو تو ط = $\frac{1}{2} \times 2\pi$

اور مسئلہ ہو جاتا ہے

$$\angle P \times \angle P \times \angle P \times \dots \times \angle P = \angle P \times \left[\frac{1}{2} \times 2\pi - \left(\frac{1}{2} \times 2\pi + \text{جم}(\text{ط} + \frac{1}{2} \times 2\pi) \right) \right]$$

یہ آخری دو صورتیں دائرہ کی کوٹ (Cote) کی خاصیتیں کہلاتی ہیں۔

مثالیں

—۱۹۰

(۱) $\backslash \begin{matrix} 1 \\ \text{لا} \end{matrix} - \begin{matrix} 1 \\ \text{لا} \end{matrix}$ کو جزوی کسور میں بیان کر دجہاں m ایک صحیح عدد ہے n سے چھوٹا۔

اگر مساوات $\text{لا} + 1 = ۰$ کی ایک اصل عد ہو تو جزو ضربی $\text{لا} - ۱$ عد کے

جواب میں جزوی کسر ہے $\frac{\text{لا} - 1}{1 - \text{لا}} \times \frac{1}{\text{لا} - ۱}$ یا $\frac{1}{\text{لا} - ۱}$ اور اس لیے عد کی مزدوج قیمتوں کے جواب میں جو دو کسریں ہیں ان کو باہم لینے سے ہمیں کسر حاصل ہوتی ہے

$$\frac{\frac{1}{n} \text{لا} ۲ - \frac{1 + ۲}{n} \text{جم} ۲ - \pi (m - n) \frac{1 + ۲}{n}}{1 + \pi \frac{1 + ۲}{n} \text{جم} ۲ - \text{لا} ۲}$$

$$\text{یا } \frac{۲}{n} = \frac{\text{جم} (۱ + ۲) \frac{1 - m}{n} - \pi \text{لا} ۲ \text{جم} (۱ + ۲) \frac{1}{n}}{1 + \pi \frac{1 + ۲}{n} \text{جم} ۲ - \text{لا} ۲}$$

(242) اگر n طاق ہو تو مزید کسر $\frac{(1 - m)}{n(1 + \text{لا})}$ حاصل ہوتی ہے۔ پس اگر n طاق ہے تو

$$\frac{\pi \frac{m}{n} (1 + ۲) \text{جم} ۲ - \pi \frac{1 - m}{n} (1 + ۲) \text{جم} ۲}{1 + \pi \frac{1 + ۲}{n} \text{جم} ۲ - \text{لا} ۲} = \frac{1}{\text{لا} + ۱} + \frac{1}{n(1 + \text{لا})}$$

اور اگر n جفت ہے تو

$$\frac{\pi \frac{m}{n} (1 + ۲) \text{جم} ۲ - \pi \frac{1 - m}{n} (1 + ۲) \text{جم} ۲}{1 + \pi \frac{1 + ۲}{n} \text{جم} ۲ - \text{لا} ۲} = \frac{1}{\text{لا} + ۱} + \frac{1}{n}$$

(۲) $\frac{1-\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}$ کو جزوی کسروں میں بیان کرو اگر م، ن سے چھوٹا ہو۔

(۳) ثابِت کرو کہ

$$\frac{(1-\frac{1}{n})}{(1-\frac{1}{n})} = \frac{1-\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}$$

کسر $\frac{(1-\frac{1}{n})}{(1-\frac{1}{n})}$ کا نسب نما اجزائے ضربی میں تحلیل ہو سکتا ہے

اور پھر ہر جزو ضربی کے متناظر کسر مثال (۱) کے مطابق معلوم ہو سکتی ہے۔

(۴) ثابِت کرو کہ

$$\frac{1}{(1-\frac{1}{n})} = \frac{1}{(1-\frac{1}{n})} \times \frac{n}{n}$$

$$\frac{1}{(1-\frac{1}{n})} = \frac{1}{(1-\frac{1}{n})} \times \frac{n}{n}$$

(۱) کی دائیں جانب کا جملہ، جم ط کا ایک جبری تفاعل ہے اور اس لیے مثال (۱) کے مطابق جزوی کسروں میں تحلیل ہو سکتا ہے۔ مساوات (ب) (۱) کی طرفین کو ذ سے اخذ سے تفریق کرنے سے حاصل ہوتی ہے، یا دوسرے الفاظ میں ذ کو ذ + ہ میں بدل کر مساوات کی طرفین میں ہ کے سروں کو مساوی رکھنے۔

(۵) اگر جم ط + جم ذ + جم پ = ۰ اور جب ط + جب ذ + جب پ = ۰

تو ثابِت کرو کہ جم ط + جم ذ + جم پ = ۰ جم ط + جم ذ + جم پ = ۰

اور جب ط + جب ذ + جب پ = ۰ جب ط + جب ذ + جب پ = ۰

یہ اس عام طریقہ کی ایک مثال ہے جو جبری مسئلوں میں حرفوں کی بجائے
 ملتف قیمتیں رکھ کر مثلثی مسئلوں کو اخذ کر نیکار ہے۔ اگر $ا + ب + ج = ۰$ تو $ا + ب + ج$
 $۱۲ ا ب ج = ۰$ ؛ فرض کرو $ا = ج م ط + خ ج ب ط + ب = ج م ف + خ ج ب ف$ ،
 $ج = ج م ب + خ ج ب پ$ تو گویا ہمیں یہ دیا گیا ہے کہ اگر
 $(ج م ط + ج م ف + ج م پ) + (خ ج ب ط + خ ج ب ف + خ ج ب پ) = ۰$ ،
 تو $(ج م ۳ ط + ج م ۳ ف + ج م ۳ پ) + (خ ج ۳ ب ط + خ ج ۳ ب ف + خ ج ۳ ب پ)$
 $۰ = ۳ - \{ج م ط + ج م ف + ج م پ\} + \{خ ج ب ط + خ ج ب ف + خ ج ب پ\}$
 اب دونوں مساواتوں میں حقیقی اور خیالی حصوں کو الگ الگ صفر کے مساوی
 رکھنے سے مسئلہ بالا حاصل ہو جاتا ہے۔

تیرہویں باب پر مثالیں

(248)

۱۔ ثابت کرو کہ $\left(\frac{ا + ج ب ف + خ ج م ف}{ا + ج ب ف - خ ج م ف} \right)^n = ج م (\frac{ا + ج ب ف + خ ج م ف}{ا + ج ب ف - خ ج م ف}) + خ ج ب (\frac{ا + ج ب ف + خ ج م ف}{ا + ج ب ف - خ ج م ف}) - ن$

۲۔ $\{ج م ط - ج م ف + خ ج ب ط - ج ب ف\} + \{ج م ط - ج م ف + خ ج ب ط - ج ب ف\}$
 کی قیمت معلوم کرو۔

۳۔ ثابت کرو کہ $\frac{(ا + ۱) - (ا - ۱)}{۱۲}$

$= ۱ + \left(\frac{ا}{۱۲} + مس^۱ \right) \left(\frac{ا}{۱۲} + مس^۲ \right) \dots \left(\frac{ا}{۱۲} + مس^۱۲ \right)$

۸۔ اگر e ، b ، c ، d ، e کوئی پانچ زاویے ہوں ایسے کہ ان کی جیو (جیو) کا مجموعہ اور نیز ان کی جیو کا مجموعہ صفر ہے تو ثابت کرو کہ

$$\sum \text{جم } e = \frac{1}{4} \sum (\text{جم } e)^2 - \frac{1}{4} \sum (\text{جب } e)^2$$

$$\sum \text{جب } e = \sum \text{جب } e = \sum \text{جم } e$$

۹۔ اگر n مقداروں $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ میں سے ایک ایک، دو دو، تین تین، n کے حامل ضربوں کے مجموعے $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$1 - m_1 + m_2 - m_3 + \dots = \sum \text{جب } (1 - m_i) \text{ لاقم } \frac{1}{2}$$

$$m_1 - m_2 + m_3 - \dots = \sum \text{جب } (1 - m_i) \text{ لاقم } \frac{1}{2}$$

$$1 - \text{اگر } \text{جم } (b - c) + \text{جم } (c - d) + \text{جم } (d - e) = \dots = \frac{3}{4} \text{ تو ثابت کرو کہ}$$

$$\text{جم } n = \text{جم } n + \text{جم } n + \text{جم } n$$

صفر کے مساوی ہے سوائے اُس صورت کے جبکہ n کا ضعف ہو، اور اگر n کا ضعف ہے تو وہ $\frac{1}{4} \text{ جم } n$ (ع + ب + ج) کے مساوی ہے۔
۱۱۔ ثابت کرو کہ لاکھ دو قیمتیں جو مساوات

$$1 - n - \frac{n(1-n)}{2} + \frac{n(1-n)(1-n)}{3} - \dots$$

$$= \frac{1}{4} n(1+n)$$

کو پورا کرتی ہیں یہ ہیں لا = مس $\frac{\pi (1+n^2)}{n^2}$ جس میں کوئی صحیح عدد ہے۔
۱۲۔ ثنابت کرو کہ

$$\frac{\pi (1+n^2)}{1+n^2} = \frac{1 - (-1)^n}{1 + (-1)^n} \text{ جب } n \text{ زوجہ } \frac{1 - (-1)^n}{1 + (-1)^n} \text{ جب } n \text{ فردہ}$$

$$\frac{\pi}{1+n^2} = \text{جس میں } e$$

۱۳۔ اگر ضری سے ان حاصل ضربوں کا مجموعہ تعبیر ہو جو مقداروں

مس π ، مس π^2 ، مس π^3 ، ...، مس π^n میں سے س، س، س، مقداروں کو لینے سے بنتے ہیں جبکہ مقدار مس π^n (۱+۲) کو خارج کر دیا جائے اور اگر

$$\left(\frac{1 - (-1)^n}{1 + (-1)^n} \right) \text{ جب } n \text{ زوجہ } \times (1+n^2) \text{ جب } n \text{ فردہ}$$

ثنابت کرو کہ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ جہاں اصل جمعہ کی ایک سے ن تک تمام قیمتوں کے لئے لیا گیا ہے اور س کی قیمت ایک سے ن تک کوئی بھی ہے۔

۱۴۔ ن ضلعوں والا ایک منتظم کثیر الاضلاع ایک دائرہ میں بنایا گیا ہے اور دائرہ کے محیط پر کے کسی نقطہ سے کثیر الاضلاع کے راسوں تک وتر کھینچ گئے ہیں۔ اگر یہ وتر $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$ سے تعبیر ہوں (جس میں ابتدا اُس وتر سے کی گئی ہے جو قریب ترین راس تک کھینچا گیا ہے اور باقی دو سرے ترتیب وار لئے گئے ہیں) ثنابت کرو کہ منقار

نصف قطر کے ایک دیے ہوئے دائرہ میں کھینچے جاسکتے ہیں۔ ان کی تعداد، بیسیج عددوں کی اس تعداد کا نصف ہے۔ ہونے سے چھوٹے اور اس کے لحاظ سے مفرد ہیں۔

نیز یہ دیکھا کہ این کے قبیلوں کا حامل ضرب زمانہ ۱۸۸۵ء

اگر ن ایک مفرد عدد کی قوت ہو اور اگر کے مساوی ہے
اگر ن ایک مفرد عدد کی قوت نہ ہو۔

ہم اس باب میں S_n کی انتہا کو (جبکہ n کو لا انتہا بڑھا دیا جائے) ظاہر کرنے کے لیے ترقیم ہنس S_n استعمال کریں گے جب تک بھی یہ انتہا موجود ہو۔

وہ شرط کہ ہنس $S_n = S_{n-1} + a_n$ ہے کہ اختیاری طور پر منتخب کردہ ہر مثبت عدد v کے تناظر، خواہ v کتنا ہی چھوٹا ہو، n کی ایک قیمت n_v متعین ہو سکے ایسی کہ $S_{n_v} - S_{n_v-1} = a_{n_v}$ قیمت v سے کم ہوں کی ہر قیمت کے لیے جو n سے بڑی یا اس کے مساوی ہو۔

جب سلسلہ $1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots$ ، S_n کی طرف مستحق ہو تو سلسلہ $1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots$ مستحق ہے اور اس کا انتہائی مجموعہ S ۔ S_n ہے جس کو S_n سے تعبیر کیا جاسکتا ہے۔ عدد S_n کو مستحق سلسلہ $1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots$ کا n رقموں کے بعد والا باقی کہتے ہیں۔ باقی S_n ، $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ ، عددوں کا ایک تواتر بناتے ہیں ایسا کہ ہنس $S_n = 0$ ، یہ امر مشاہدہ طلب ہے کہ سلسلے کا استدقاق n لینے کے بعد ہی باقی S_n کا کوئی مفہوم ہو سکتا ہے۔

(247)

عدد $1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots$ کو S_n سے تعبیر کیا جاسکتا ہے اور عددوں S_1, S_2, S_3, \dots کو ہم n رقموں کے بعد والے جزوی باقی کہیں گے۔ یہ مشاہدہ طلب ہے کہ یہ جزوی باقی S_n ، n اور m کی تمام قیمتوں کے لیے متعین عددوں کے طور پر موجود ہوتے ہیں خواہ دیا ہوا سلسلہ مستحق ہو یا نہ ہو۔ کسی مستحق سلسلہ $1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots$ کا انتہائی مجموعہ اکثر ∞ سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

(۳) یہ ہو سکتا ہے کہ گوس کی کوئی معین انتہا نہ ہو جبکہ ن کو غیر معین طور پر بڑھا دیا جائے مگر ن کی بڑھتی ہوئی قیمتوں کے ایک تواتر (فرض کرو ن، ن، ن، ن، ن،) کا انتخاب کرنا ممکن ہو ایسا کہ س ایک معین انتہا کی طرف مستقر ہو بشرطیکہ ن صرف وہ قیمتیں اختیار کرے جو اس تواتر میں ہیں۔

اس صورت میں سلسلہ کو اہتزازی سلسلہ کہتے ہیں، لیکن بعض اوقات اہتزازی سلسلے متعین کہلاتے ہیں۔ وہ اہتزازی سلسلہ جس میں س، ن کی ہر قیمت کے لیے عدداً کسی مستقل مثبت عدد سے کم ہو عدم تعین کے محدود حدود کے درمیان اہتزاز کر نیوالا سلسلہ کہلاتا ہے۔

یہ آسانی کے ساتھ دیکھا جاسکتا ہے کہ اگر کسی سلسلہ کی قیمتیں سب کی سب ایک ہی علامت کی ہوں تو سلسلہ صورت (۱) کے مطابق متعین ہے ورنہ مستقر۔

(248)

$$\text{سلسلہ} \quad 1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots + \infty$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{\infty}$$

اور

دونوں متعین ہیں کیونکہ ہر صورت میں س، ن کے ساتھ غیر معین طور پر بڑھتا ہے اور مستقل علامت رکھتا ہے۔

$$\text{سلسلہ} \quad 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \dots \text{عدم تعین کے غیر معین}$$

حدود کے درمیان اہتزاز کرتا ہے۔ کیونکہ س، ن = $\frac{1}{n}$ جبکہ ن جفت ہو اور س، ن = $\frac{1}{n+1}$ جبکہ ن طاق ہو؛ اس طرح جیسے ن بڑھتا ہے س، عددی قیمت میں بڑھتا ہے اور نہ س، = $\pm \infty$

$$\text{سلسلہ} \quad 1 + 1 - 2 + 1 + 1 - 2 + 1 + 1 - 2 + \dots \text{عدم تعین کے}$$

..... + جب ۱۰۰۰ + جب ۱۰۰ + جب ۱۰ + جب ۱ + جب ۱۰۰۰۰
جہاں ۱۰ کوئی مستقل قیمت ہے، جو نہ صفر ہے اور نہ ۱ کا ضعف ہے، علم
تعیین کے مجدد و انتہاؤں کے درمیان امتیاز کرتا ہے۔ اس صورت میں

$$\text{بی} = \text{جیب} - \frac{\sin^2 \theta}{2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4}$$

پس یہ ظاہر ہے کہ سنی ایک معین انتہا کی طرف مستحق نہیں ہوتا کیونکہ
 جم (ان + پٹ) عہ کی کوئی معین انتہا نہیں ہے جبکہ ن کو غیر معین طور پر
 بڑھا دیا جائے۔ لیکن سنی ن کی ہر قیمت کے لیے $\frac{1}{p} (1 + \text{جم} \frac{1}{p})$ رقم ہے
 سے عدد اک کم یا اس کے مساوی ہے۔

۱۹۔ سلسلہ $1 + 1 + \dots + 1 + \dots$ کے
استدقاق کے لیے ضروری اور کافی شرط یہ ہے کہ اختیار کا
طور پر منتخب کردہ ہر مثبت عدد عا کے جواب میں خواہ عا
کتنا ہی چھوٹا ہوں گا ایک قیمت ن متعین ہو سکے ایسی کم
ن رقموں کے بعد جزوی باقی سب کے سب مطلق قیمت میں
عا سے کم ہوں ۔

یہ دیکھانے کے لئے کہ یہ شرط ضروری ہے مان لو کہ سلسلہ مستحق ہے اور
اس طرح میں کا وجود ہے۔ تب ن کی ایک قیمت ن عا مستحق ہو سکتی ہے ایسی کہ

[illegible]

سب کے سب مختلف قیمت میں $\frac{1}{n}$ عا سے کم ہیں۔ اس سے اس واقعہ کا اظہار ہوتا ہے کہ یہاں $n =$ جس جبکہ n کی اختیاری قیمتیں حساب میں لی گئی ہوں۔

$$b = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \dots + \frac{1}{n_m} = (s_1 - s_2) - (s_2 - s_3) - \dots - (s_{m-1} - s_m)$$

اور پھر یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ چونکہ $s_1, s_2, s_3, \dots, s_m$ دونوں عددوں پر n

سے کم ہیں اس لیے $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \dots + \frac{1}{n_m}$ عدد $\frac{1}{n}$ عا سے کم ہے؛

اور یہ m کی سب قیمتوں $1, 2, 3, \dots$ کے لیے درست ہے۔

پھر یہ دیکھانے کے لیے کہ اوپر کی شرط کافی ہے ہم ایک

اصول کی طرف رجوع کرتے ہیں جو استدقاق کے عام اصول (240)

کے طور پر مشہور ہے۔ اس اصول کے مطابق عددوں کے ایک تواتر

$s_1, s_2, s_3, \dots, s_m$ کی ایک معین انتہا ہوگی بشمول اختیار

ذریعہ منتخب کردہ ہر قیمت عدد عا کے جواب میں n کی ایک قیمت لگایا

متعین ہونے کے ایسی کہ اعداد

$$s_1 - s_2, s_2 - s_3, \dots, s_{m-1} - s_m, s_m - s_{m+1}$$

سب کے سب مطلق قیمت میں عا سے کم ہوں۔ یہ شرط کے کافی

ہونے کے لیے ہمیں صرف یہ دیکھنا ہے کہ آیا $s_1, s_2, s_3, \dots, s_m$ جزی باقی

$$b = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \dots + \frac{1}{n_m}$$

کے مساوی ہے۔

اگر $m =$ لیا جائے تو شرط میں یہ بات شامل ہے کہ n کی

کافی بڑی قیمت لینے سے n اتنا چھوٹا بنایا جاسکتا ہے جتنا ہم چاہتا ہے۔
پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ سلسلہ کے استدقاق کی ضروری شرط یہ ہے کہ
نہ n ... یعنی یہ شرط بطور خود کافی نہیں ہے۔
استدقاق سلسلہ کے استدقاق کی تیزی n کی اس کم سے کم
قیمت سے بڑی ہاں ہو سکتی ہے جو صہ کی ایسا دی ہوئی قیمت کے
متناظر ایسی ہو کہ سب کے سب جزوی باقی سبب مطلق
قیمت میں صہ سے کم ہوں، یعنی رقموں کی اس تعداد سے جس کا
لینا ضروری ہے تاکہ جزوی باقی سب کے سب کسی قدرہ مدد سے
کم ہوں۔

ہندسی سلسلہ $1 + \lambda + \lambda^2 + \dots$ کی صورت میں جو قیمت $\frac{1}{1-\lambda}$
کی طرف مستحق ہوتا ہے جبکہ لا عدد λ ایک سے کم ہو ہم دیکھتے ہیں کہ
$$\frac{\lambda^n (1-\lambda)}{1-\lambda} = \lambda^n + \dots + \lambda + 1$$

اور لا کو نہت فرض کرنے سے یہ صہ سے کم ہو گا م کی تمام قیمتوں کے لیے اگر $\frac{\lambda^n}{1-\lambda}$
صہ؟ اس صورت میں n کی مناسب قیمت وہ صحیح عدد ہے جو لوک صہ $(1-\lambda)$ لوک λ

سے عین بڑا ہے۔ n کی قیمت بڑھتی ہے جیسے λ بڑھتا ہے، اور اس لیے
اس سلسلہ کے استدقاق کی تیزی گھٹتی ہے جیسے λ بڑھتا ہے، لا جب ایک
پر پہنچتا ہے تو n غیر معین طور پر بڑھتا ہے، اس طرح سلسلہ کا استدقاق
غیر معین طور پر مست ہو جاتا ہے۔ اگر $\lambda = 1$ تو سلسلہ صریحاً متع ہے۔

۱۹۴۷ — اب ہم مستحق سلسلہ $1 + \lambda + \lambda^2 + \dots$ کی
اس صورت پر غور کریں گے جس میں مثبت اعداد میں غیر معین تعداد میں λ اور
نیز منفی اعداد میں غیر معین تعداد میں λ سے λ کی عددی قیمت

تعبیر کی گئی ہے، اس طرح | ۱ | ۱ کے مساوی ہے یا۔ ۱ کے مجموعہ
اس کے کہ ۱ مثبت ہے یا منفی۔ اب سلسلہ

$$1 + 1 + 1 + \dots + 1 + 1 + \dots + 1 + 1 + \dots$$

پر غور کرو۔

اگر یہ آخری سلسلہ مستحق ہے تو اصلی سلسلہ کو مطلقاً مستحق
کہتے ہیں لیکن اگر سلسلہ | ۱ | ۱ تسع ہے تو سلسلہ | ۱ | ۱ کو
(2.50) نیم مستحق یا مشروطاً مستحق یا اتفاقاً مستحق کہتے ہیں۔

سلسلہ $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ مطلقاً مستحق ہے کیونکہ سلسلہ $1 + 1 + 1 + \dots$
مستحق ہے؛ لیکن سلسلہ $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ صرف مشروطاً مستحق ہے
کیونکہ سلسلہ $1 + 1 + 1 + \dots$ تسع ہے۔

سلسلہ $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ جس میں ارقام باری باری آتے
مثبت منفی ہیں ہمیشہ مستحق (مطلقاً یا مشروطاً) ہوگا اگر ہر رقم عدداً رقم مابعد
بڑی ہو اور نیز نہ ۱ = کیونکہ

$$(1) \text{ ب } ۱ = (1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots)$$

$$= 1 + 1 - (1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots)$$

اور اس لیے (۱) ب ۱، م مثبت ہے اور ۱ سے کم ہے یا اس کے
مساوی۔ پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ن منتخب ہو سکتا ہے اتنا بڑا کہ | ب ۱ | ۱
کی تمام قیمتوں کے لیے خواہ صد کتنا ہی چھوٹا ہو۔ اس لیے سلسلہ مستحق ہے۔
۱۹۵ — مشروطاً مستحق سلسلے میں رقموں کی ترتیب کو بہ لا جا

تو بالعموم مجموعہ بدل جائیگا۔ فرض کرو کہ پہلی ف مثبت رقموں کا مجموعہ
 س ہے اور پہلی ق منفی رقموں کا مجموعہ جن کی علامتیں بدل دی گئی
 ہیں س ہے تب اگر سلسلہ کو دوبارہ مرتب کیا جائے اس طور پر
 کہ مثبت رقموں کا تواتر نہ بدلے اور نیز منفی رقموں کا تواتر نہ بدلے
 اور سلسلہ کی پہلی ف + ق رقموں میں سے ف رقمیں مثبت ہوں اور
 ق رقمیں منفی تو اس طور پر ترتیب یافتہ سلسلہ کا مجموعہ س ہے۔ س
 کی انتہا ہے جبکہ ف اور ق کو غیر معین طور پر بڑھا دیا جائے۔ اب
 چونکہ تواتر س ہے، س میں سے ہر ایک مثبت رقموں پر مشتمل ہے
 اس لیے س کی اور س کی انتہائیں دونوں محدود اور معین ہیں یا
 ورنہ لا متناہی۔ بموجب فرض دونوں محدود اور معین نہیں ہیں کیونکہ
 دیا ہوا سلسلہ مطلقاً مستحق نہیں ہے، اس لیے س، س کی
 انتہاؤں میں سے کم از کم ایک لا متناہی ہے، اگر دونوں انتہائیں
 لا متناہی ہیں تو نہا (س - س) کی قیمت، ف اور ق کی قیمتوں
 کے دو تواتروں پر منحصر ہوگی۔ اگر س، س کی انتہاؤں میں
 سے صرف ایک لا متناہی ہے تو نہا (س - س) لا متناہی ہے
 اور اس لیے اصلی سلسلہ مستحق نہیں تھا۔ اگر سلسلہ کی اصلی
 ترتیب ۱ - ۲ + ۳ - ۴ + ۵ ... میں علامتیں باری باری سے
 مثبت اور منفی ہوں تو ف اور ق نسبت تساوی میں غیر معین طور پر
 بڑے ہو جاتے ہیں، لیکن اگر بالفرض ہم سلسلہ کو ترتیب ۱ + ۲ - ۳
 - ۴ + ۵ - ۶ + ۷ - ۸ ... میں لکھیں تو ف اور ق نسبت
 ۱:۲ میں غیر معین طور پر بڑے ہو جاتے ہیں، اور س، س

اور س_۱ - س_۲ کی انتہائیں جبکہ ق کو غیر معین طور پر بڑھا دیا جائے گا بالعموم مساوی نہیں ہوتیں۔
مثلاً نیم مستند سلسلہ ۱ - $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$ پر غور کرو۔ اس کے مجموعہ کو
س سے تعبیر کیا جائے تو

$$\text{س} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{n} + \dots$$

$$= \left(\frac{1}{1-n} - \frac{1}{2-n} + \frac{1}{3-n} - \frac{1}{4-n} + \dots \right) \times 3$$

فرض کرو کہ سلسلہ س میں رقموں کی ترتیب کو بدل لیا گیا ہے اور اس طرح سلسلہ
۱ + $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \dots$ حاصل کیا گیا ہے۔ اس کے مجموعہ کو س سے
تعبیر کرو تو ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{س} = \left(\frac{1}{1-n} - \frac{1}{2-n} + \frac{1}{3-n} - \frac{1}{4-n} + \dots \right) \times 3$$

$$\text{س} - \text{س} = \left(\frac{1}{1-n} - \frac{1}{2-n} \right) \times 3$$

$$\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{1-n} - \frac{1}{2-n} \right) \times 3$$

اس لیے جبکہ $\frac{1}{3}$ انتہائی بڑا ہو تو $\text{س} = \frac{3}{4}$ ۔ یہ مثال ڈیرشلے
(Dirichlet) نے دی تھی جس نے سب سے اول یہ بتایا کہ نیم مستند سلسلہ کا
مجموعہ رقموں کی ترتیب پر منحصر ہوتا ہے۔

۱۹۶ — ریمن (Riemann) نے ثابت کیا ہے کہ نیم مستند
سلسلہ کی رقموں کو ایسی ترتیب میں مکرر مرتب کیا جاسکتا ہے کہ اس
نئے سلسلہ کا انتہائی مجموعہ کوئی دی ہوئی قیمت سے اختیار کر سکے۔

فرض کرو کہ س مثبت ہے؛ اول ف مثبت رقمیں جو جہاں ف
ایسا ہے کہ $\text{س}_1 < \text{س} < \text{س}_2$ اور $\text{س}_1 < \text{س} < \text{س}_2$ پھر ق منفی رقمیں جو

اگر S_n کی ایک متعین انتہا جبکہ n کو غیر معین طور پر بڑھا دیا جائے تو: موجود خود ایک ملف یا حقیقی عدد ہے تو لاتنہائی سلسلہ

$$S_n + S_{n+1} + S_{n+2} + \dots + S_{n+k} + \dots$$

کو مستحق کہتے ہیں اور S_n کو اس کا انتہائی مجموعہ یا مجموعہ۔

وہ شرط کہ $S_n = S_{n+1}$ یہ ہے کہ $S_n - S_{n+1}$ سفر کی طرف مستحق ہو جبکہ n کو غیر معین طور پر بڑھا دیا جائے۔ اس طرح اگر

$$S_n - S_{n+1} = G_n \quad (G_n = \text{جم طن} + \text{خر جب طن})$$

تو ہمیں حاصل ہونا چاہیے ہذا $G_n = S_n - S_{n+1}$ اگر $S_n = S_{n+1}$ تو $G_n = 0$ جس جہاں

اور S_n حقیقی ہیں تو ہمیں حاصل ہوتا ہے $S_n - S_{n+1} = G_n$ جم طن، $S_n = S_{n+1}$ جب طن، تب یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر ہذا $G_n = 0$ تو ہذا $(S_n - S_{n+1}) = 0$ ، ہذا $(S_n - S_{n+1}) = 0$ ، یعنی $S_n = S_{n+1}$

علی الترتیب، S_n اور S_{n+1} کی طرف مستحق ہوتے ہیں۔ پس یہ معلوم ہوتا ہے کہ سلسلہ $S_n + S_{n+1} + S_{n+2} + \dots + S_{n+k} + \dots$ کے مستحق ہونے کے لیے یہ ضروری ہے کہ دو سلسلے $S_n + S_{n+1} + S_{n+2} + \dots$ اور $S_{n+1} + S_{n+2} + S_{n+3} + \dots$ دونوں مستحق ہونے چاہئیں۔ اس کے عکس اگر یہ آخری دو سلسلے مستحق ہیں تو ملف عددوں کا سلسلہ بھی مستحق ہے، کیونکہ

$| (س + خ س) - (س + خ س) | \geq | س - س | + | س - س |$
 اب اگر نہا س = س نہا س = س تو ہم ن کی ایک قیمت ن منتخب کر سکتے ہیں اتنی بڑی کہ
 $| س - س | > \frac{1}{4} صہ ؛ | س - س | > \frac{1}{4} صہ بشرطیکہ ن \leq صہ$ پس نتیجہ نکلتا ہے کہ
 $| (س + خ س) - (س + خ س) | > صہ$ اگر ن $\leq صہ$ ؛ اور چونکہ صہ اختیاری ہے
 اس لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے نہا س = س + خ س اور اس طرح
 ملف عددوں کا سلسلہ مستدق ہے۔ اگر مجموعوں \leq لا، \leq ما میں سے کسی کی
 انتہائی قیمت محدود نہ ہو یا ان میں سے کوئی سلسلہ بہتر از کرے تو سلسلہ \leq ی
 مستدق نہیں ہوگا۔

فرض کرو کہ $ی = ر (جم ط + خ جب ط)$ ۔ اب ہم یہ ثابت کریں گے کہ
 سلسلہ \leq ی مستدق ہوگا اگر سلسلہ \leq ر جس میں ہر رقم $ر$ متناظر رقم
 ی کا مقیاس ہے مستدق ہو۔ دیا ہوا سلسلہ \leq ر (جم ط + خ جب ط)
 مستدق ہے بشرطیکہ سلسلوں \leq ر جم ط، \leq ر جب ط میں سے ہر ایک
 مستدق ہو۔ اب اعداد $ر$ جم ط، $ر$ جب ط میں سے ہر ایک عددوں \leq ی
 کے درمیان واقع ہوتا ہے؛ نیز سلسلوں \leq ر جم ط، \leq ر جب ط میں
 سے ہر ایک کے لیے عدد $س + م$ سلسلہ \leq ر کے متناظر
 جزوی باقی سے عدد اکم ہے پس اگر یہ آخری سلسلہ \leq ر مستدق ہے تو
 سلسلوں \leq ر جم ط، \leq ر جب ط میں سے ہر ایک مستدق ہے،
 اور اس لیے سلسلہ \leq ی مستدق ہے۔

اس کا عکس ضروری نہیں کہ درست ہو، چنانچہ سلسلہ

$$3 \text{ ن } (0. \text{ جم } ط + \text{ خ } جب \text{ ط})$$

مستدق ہو سکتا ہے اور معہذا سلسلہ 3 ن تسع -

اگر سلسلہ 3 ن جو مقیاسوں کے مجموعہ سے بنا ہے مستدق ہو تو سلسلہ

$$3 \text{ ن } (0. \text{ جم } ط + \text{ خ } جب \text{ ط})$$

کو مطلقاً مستدق کہتے ہیں -

مثلاً وہ سلسلہ جس کی عام رقم 2 ن (جم ن ط + خ جب ن ط) ہے مطلقاً

مستدق ہے کیونکہ سلسلہ 3 ن مستدق ہے؛ لیکن وہ مستدق سلسلہ جس کی

عام رقم 2 ن (جم ن ط + خ جب ن ط) ہے (جہاں 2 ن < ط < 0) مطلقاً مستدق

نہیں ہے کیونکہ سلسلہ 3 ن تسع ہے -

مسلل تفاعل

(253)

۱۹۸ — فرض کرو کہ ملتف عددی = لا + خ یا کا ایک تفاعل

ف (ی) ہے جس کی ایک واحد محدود قیمت ہے ی کی ہر قیمت کے لیے جو کسی

دیے ہوئے حدود کے درمیان واقع ہے - تب اس تفاعل کی ایک واحد

قیمت ہوگی اُس شکل کے ہر نقطہ کے لیے جو ایک خاص رقبہ کے اندر واقع

ہوتی ہے - یہ رقبہ، ی کو تعبیر کر نیوالے مستوی کا کوئی محدود حصہ ہو سکتا ہے

یا اس مستوی کا پورا حصہ -

کوئی تفاعل نقطہ ی = ی پر سلسلہ کہلاتا ہے اگر ایک

ثابت عدد عا ہمیشہ معلوم کیا جاسکے ایسا کہ ف (ی) - ف (ی) کا

مقیاس کسی مقررہ ثبت عدد صہ سے خواہ یہ کتنا ہی چھوٹا ہو کم ہوئی کی ان تمام قیمتوں کے لیے جن کے لیے ی۔ ی۔ کا مقیاس عا سے کم ہے۔ صہ کی ہر قیمت کے لیے عا کی ایک قیمت موجود ہونی چاہیے۔

کوئی تفاعل جو کسی دیے ہوئے رقبہ کے اندر ہر نقطہ پر اس شرط کو پورا کرے اس رقبہ کے اندر مسلسل کہلاتا ہے۔ رقبہ کا احاطہ ممکن ہے شامل ہو یا ممکن ہے شامل نہ ہو۔

یکساں استفاق

۱۹۹ — فرض کرو کہ ی یا لا + خ ما کا ایک تفاعل ف (ی) ہے جو کسی رقبہ میں مسلسل ہے۔ تب اگر

سلسلہ ف (ی) + ف (ی) + ف (ی) + ف (ی) + ... + ف (ی) + ...
مستحق ہو تو ہم اس کے انتہائی مجموعہ کو ف (ی) سے تعبیر کر سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ مجموعہ

ف (ی) + ف (ی) + ... + ف (ی)

جہاں ن کوئی مستقل عدد ہے س (ی) کے مساوی ہے ، تب

ف (ی) + ف (ی) + ف (ی) + ... کے انتہائی مجموعہ کون رقموں کے بعد والا باقی کہتے ہیں اور اس کو ب (ی) سے تعبیر کر سکتے ہیں۔

پس ہمیں حاصل ہوتا ہے

ف (ی) = س (ی) + ب (ی)

اب فرض کرو کہ کسی دیے ہوئے مثبت عدد صہ کے جواب میں خواہ چھوٹا ہی چھوٹا ہوں کی ایک قیمت 'ی' پر غیہ منحصر معلوم کی جاسکتی ہے ایسی کہ 'ی' کی تمام قیمتوں کے لیے جو کسی دیے ہوئے رقبہ کے اندر موقوفہ نقطوں سے تعبیر ہوتی ہیں سب کا مقیاس صہ سے کم ہے جہاں $m \leq n$ تو ہم کہتے ہیں کہ سلسلہ یکساں طور پر مستدق ہوتا ہے 'ی' کا ان تمام قیمتوں کے لیے جو اس رقبہ میں موقوفہ نقطوں سے تعبیر ہوتی ہیں۔ صحیح عدد 'ن' قیمت میں صہ پر منحصر ہوگا۔

لیکن اگر 'ی' رقبہ کے اندر کسی ثابت قیمت 'ی' کے لانتہا قریب آئے اور تمام باقیوں ب (ی) کے مقیاس کو صہ سے کم کرنے کے لیے 'ن' کو غیر معین طور پر بڑھتا ہوا فرض کرنا ضروری ہو تو نقطہ 'ی' کے قرب میں سلسلہ یکساں طور پر مستدق نہیں ہوتا اور ہم کہتے ہیں کہ وہ لانتہا سست رفتار سے مستدق ہوتا ہے۔

(254)

نقطہ 'ی' کو جس کے لیے صہ منتخب ہو سکے ایسا کہ صورت مذکورہ بالا واقع ہو وہ نقطہ کہتے ہیں جس کے قرب میں استدقاق غیر یکساں ہے یا بعض اوقات اس کو صرف غیر یکساں استدقاق کا نقطہ کہتے ہیں اگر سلسلہ خود اس نقطہ پر مستدق ہو۔ ایسے نقطہ کا احاطہ کرنے والے کسی رقبہ کے لیے یہ ناممکن ہے کہ 'ن' کی کوئی مستقل قیمت مقرر کی جاسکے ایسی کہ اس رقبہ کے اندر 'ی' کی تمام قیمتوں کے لیے ب کے مقیاس کافی طور پر چھوٹی مثبت مقدار صہ سے کم ہوں؛ اور اس لیے سلسلہ یکساں طور پر اس کل رقبہ میں مستدق نہیں ہوتا اگر 'ی' تو سلسلہ یا مستدق ہو سکتا ہے یا قسح۔

ہم اس امر کو یوں بیان کر سکتے ہیں :-

فرض کرو کہ جیسے 'ی' کسی ثابت قیمت 'ی' کے نزدیک آتا ہے

ایک ثابت عدد صدہ مقرر ہو سکتا ہے ایسا کہ سلسلہ ف (ی) + ف (ی) + ف (ی) + ... کی رقموں کی وہ تعداد ن (ی) یکلین ضروری ہے تاکہ
 |ب (ی)| > صد جہاں م ≤ ن / ی - ی کے مقیاس پر مختصر ہو

اس طور پر ن مسلسل بڑھتا ہے جیسے مق (ی) بم (ی) گھٹتا ہے اور لا انتہا
 بڑا ہو جاتا ہے جبکہ مق (ی - ی) لا انتہا چھوٹا ہو جاتا ہے تو ہم کہتے
 ہیں کہ سلسلہ ی کے قرب میں غیر کیساں طور پر مستحق ہوتا ہے۔

ایسے کسی نقطہ کے قرب میں سلسلہ کے استدقاق کی شرح لا انتہا
 تیزی سے متغیر ہوتی ہے اور جب اتنی ہی ی | کو لا انتہا گھٹایا جاتا ہے
 تو سلسلہ لا انتہا مست رفتار سے مستحق ہوتا ہے۔

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ کوئی مستحق عدد ی سلسلہ لا انتہا
 مست رفتار سے مستحق نہیں ہو سکتا؛ مثلاً جب ی = ی تو سلسلہ
 ف (ی) + ف (ی) + ... کا استدقاق، اگر سلسلہ مستحق
 ہے تو، لا انتہا مست نہیں ہے؛ صرف اُس صورت میں جبکہ
 ی متغیر ہو اس طور پر کہ ی (ی - ی) | لا انتہا گھٹے سلسلہ

$$ف (ی) + ف (ی) + ...$$

لا انتہا مست رفتار سے مستحق ہوتا ہے۔ پس یہ کہنے کی بجائے
 کہ کوئی سلسلہ (ایک نقطہ پر غیر کیساں طور پر مستحق ہے
 یہ کہنا زیادہ صحیح ہے کہ سلسلہ اُس نقطہ کے قریب غیر کیساں طور پر مستحق ہے۔ رقموں
 کی وہ تعداد ن جن کا لینا ضروری ہے تاکہ باقی ب (ی) کے مقیاس
 کافی طور پر چھوٹے عدد صدہ سے کم ہو سکیں بڑھتی ہے جیسے ی قیمت ی کے
 نزدیک آتا ہے اور لا انتہا بڑی ہو جاتی ہے جب مق (ی - ی) | سلسلہ

گھٹتا جاتا ہے، اور پھر اگر سلسلہ نقطہ ی پر مستحق ہے تو یوں کی
پیداوار ایک ایک محدود قیمت اختیار کر لیتی ہے۔ پس یہ عدد ن
نور ایسے نقطہ کے قریب میں غیر مسلسل ہے۔
اگر کسی رقبہ میں اس کے ہر نقطہ پر ہمیں حاصل ہو

(255)

ان (ی) | ≥ 1 ، ان (ی) | ≥ 1 ، ... | ان (ی) | ≥ 1 ...
جہاں $1, 1, 1, \dots$ مستقل مثبت عدد ہیں ایسے کہ سلسلہ $1, 1, 1, \dots$
+ مستحق ہے تو سلسلہ

ف (ی) + ف (ی) + ...
رقبہ ان یکساں طور پر مستحق ہوتا ہے۔ اس مسئلہ سے یکساں استحقاق
کی ایک جانچ ملتی ہے جو خاص خاص صورتوں پر استعمال کرنے میں
بڑے کام آتی ہے، اس کو ویرٹھ اس کی جانچ کہتے ہیں۔ اس کو ثابت
کرنے کے لیے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر صہ کوئی اختیاری طور پر منتخب کردہ
مثبت عدد ہو تو ن منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ $1, 1, 1, \dots$
م کی ہر قیمت کے لیے صہ سے کم ہو جہاں ن کے لیے۔ نیز ی کی ہر قیمت
کے لیے

| ف (ی) + ف (ی) + ... + ف (ی) + ف (ی) |

کا معیار $1, 1, 1, \dots$ سے بڑا نہیں ہے اور اس لیے
صہ سے کم ہے۔ چونکہ م کی قیمت کے لیے درست ہے ہم دیکھتے
ہیں کہ تلف سلسلہ مستحق ہے اور ی کی ہر قیمت کے لیے | ف (ی) | ≥ 1

بشرطیکہ $n \leq n$ - اس لیے سلسلہ رقبہ ۱ میں یکساں طور پر مستحق ہوتا ہے۔

نوٹ :- بعض مصنفین سلسلہ کو ایک دیے ہوئے رقبہ میں یکساں مستحق اُس وقت کہتے ہیں جبکہ ایک عدد n معلوم ہو سکے ایسا کہ y کی تمام قیمتوں کے لیے باقی m کا مقیاس صہ سے کم ہو۔ لیکن ہماری تعریف جو اس کتاب میں دی گئی ہے اس تعریف سے زیادہ سمجست ہے؟ ایسے سلسلوں کا بنانا ممکن ہے جو ہماری تعریف کی بموجب یکساں طور پر مستحق نہ ہوتے ہوں لیکن اُس تعریف کی بموجب ہوں جو دیگر مصنفین بیان کرتے ہیں۔

۴۰۰۔ اگر تفاعلات $f, (y), f, (y), \dots$ مسلسل ہوں y کی تمام قیمتوں کے لیے جو ایک دیے ہوئے رقبہ ۱ میں موقعہ نقطوں سے تعبیر ہوتی ہیں تو تفاعل $f(y)$ جو مستحق سلسلہ $f(y)$ کے مجموعہ کو تعبیر کرتا ہے ایک مسلسل تفاعل ہے y کی تمام قیمتوں کے لیے جو اس رقبہ ۱ میں موقعہ نقطوں سے تعبیر ہوتی ہیں بشرطیکہ سلسلہ $f(y)$ پلوہ کے رقبہ ۱ میں یکساں طور پر مستحق ہو۔

کیونکہ ہمیں حاصل ہوتا ہے $f(y) = m + b$ جہاں n مثبت صحیح عدد ہے ایسا کہ y کی زیر بحث تمام قیمتوں کے لیے b کا مقیاس صہ سے کم ہے۔ فرض کرو کہ y میں m کا اضافہ کر دیا گیا ہے اور فرض کرو کہ اس اضافہ کے متناظر $f(y)$ ، m ، اور b میں اضافے علی الترتیب $m, f(y), m, m, m$ ہیں۔ تب چونکہ بموجب فرض b اور $b + m$ کے مقیاس دونوں صہ سے کم ہیں اس لیے m کا مقیاس m صہ سے کم ہے۔

صفر ہونا ضروری نہیں ہے۔

اس واقعہ کی تمثیل کے لیے اسٹوکس (Stokes) حقیقی سلسلہ

$$\dots + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{n(n+1) + n^2(2+n) + n(n-1) + n-1}{(n+1)\{1+n(1+n)\}} + \dots$$

پر غور کرتا ہے۔ اگر $n=0$ تو یہ سلسلہ ہو جاتا ہے

$$\dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots + \frac{1}{2 \times 1}$$

اب سلسلہ بالا کی عام رقم ہے

$$\frac{n^2}{(n+1)\{1+n(1+n)\}} + \frac{1}{(n+1)}$$

$$\left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} \right\} - \left\{ \frac{1}{n-1} + \frac{1}{(n-1)n} \right\}$$

اس لیے سلسلہ کا مجموعہ ۳ ہے خواہ لاکوڈ قیمت سوائے صفر کے اختیار کرے۔

سلسلہ $\frac{1}{2 \times 1} + \frac{1}{3 \times 2} + \dots$ کا مجموعہ ایک ہے اور اس لیے دیے ہوئے

سلسلہ کا مجموعہ، لاکوڈ قیمت صفر کے قریب میں غیر مسلسل ہے۔

n رقموں کے بعد باقی $\frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)}$ ہے؛ اس کو صہ کے مساوی رکھنے

سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ

$$n = \frac{\{ (n+1) - \{ (n+1) - \{ (n+1) - \dots \} \} \} + \{ (n+1) - \{ (n+1) - \{ (n+1) - \dots \} \} \} + \{ (n+1) - \{ (n+1) - \{ (n+1) - \dots \} \} \} + \dots}{n}$$

جولانہتا بڑھتا ہے جیسے n لا، لہذا انتہا چھوٹا ہوتا ہے۔ اس لیے دیا ہوا سلسلہ لا انتہا
تست رفتار سے مستحق ہوتا ہے جبکہ لا، لہذا انتہا چھوٹا ہو۔ سلسلہ کے مجموعہ میں عدم
تسلل کی یہی وجہ ہے۔

سلسلوں کے یکساں اور غیر یکساں استنتاج کے درمیان امتیاز کا انکشاف بالعموم سیدیل (Siedel) (257)

رکھنے کی ضرورت ہے۔

سلسلہ ہندسیہ کی تمام قیمتوں کے لیے یکساں طور پر مستحق ہے اگر کسی کا مقیاس ≥ 1 - ضہ سے جہاں ضہ کوئی مستقل مثبت عدد ہے خواہ یہ کتنا ہی چھوٹا ہو۔ کیونکہ پہلی n رقموں کے بعد باقی $\frac{1}{10^n}$ ہے اور اس کا مقیاس $(1 - \frac{1}{10^n})$ سے کم ہے، تب سلسلہ ایسا ہوگا کہ y کی ان تمام قیمتوں کے لیے جن کا مقیاس ≥ 1 - ضہ سے

اب (د) | \geq صہ

$$\text{اگر } \frac{(1 - \frac{1}{10^n})}{\text{ضہ}} > \text{صہ، یا اگر } n < \frac{\text{لوک ضہ} + \text{لوک صہ}}{\text{لوک } (1 - \frac{1}{10^n})}$$

پس چونکہ n کا منتخب کرنا ممکن ہے اس طرح کر کے تمام قیمتوں کے لیے (جن کے مقیاس ≥ 1 - ضہ سے) n رقموں کے بعد والے باقی صہ سے کم ہوں اور چونکہ n کی اس سے تمام بڑی قیمتوں کے لیے یہ درست ہے اس لیے ایسی تمام قیمتوں کے لیے سلسلہ یکساں طور پر مستحق ہوتا ہے۔

اس طرح یہ ثابت ہو چکا کہ سلسلہ ہندسیہ کسی ایسے دائرہ سے محدود رقبہ میں یکساں طور پر مستحق ہے جو اکائی نصف قطر والے (مرکز مبدأ پر) دائرہ کے اندر واقع ہو اور اس کا ہم مرکز ہو۔

صعودی صحیح قوتوں کے سلسلے

۲۰۳۔۔۔۔۔ اب ہم اس عام قوتی سلسلہ

$$1 + 10^{-1} + 10^{-2} + \dots + 10^{-n} + \dots$$

استثنا کے) $۱ + صہ$ اور $۱ - صہ$ کے درمیان واقع ہوتا ہے۔ زیادہ عام صورت میں یہ ہو سکتا ہے کہ ایک مثبت عدد ۱ موجود ہو ایسا کہ n کی تمام قیمتوں کے لیے (سوائے ایک محدود جٹ کے) $۱ + صہ$ سے کم ہو اور نیز ایسا ہو کہ n کی قیمتوں کی لامتناہی تعداد کے لیے $۱ + صہ$ اور $۱ - صہ$ کے درمیان واقع ہو۔ ہر صورت میں عدد غہ $= \frac{1}{1 + صہ}$ - اس کو دیکھنے کے لیے یہ ثابت کرنا کافی ہو گا کہ سلسلہ مستدق ہوتا ہے اگر $\frac{1}{1 + صہ} > ۱$ اور متبع ہوتا ہے اگر $\frac{1}{1 + صہ} < ۱$ ۔ کیونکہ n کی تمام قیمتوں کے لیے سوائے ایک محدود جٹ کے $۱ + صہ > ۱$ جہاں $صہ$ اختیاری ہے؛ اگر $\frac{1}{1 + صہ} > ۱$ تو ہم $صہ$ کو منتخب کر سکتے ہیں ایسا کہ $(۱ + صہ) > ۱$ ۔ تب سلسلہ کی تمام رقیں (سوائے ان کے ایک محدود جٹ کے) متبع سلسلہ ہندسیہ کی متناظر رقموں سے کم ہونگی جس کی نسبت مشترک $(۱ + صہ) > ۱$ ایک سے کم ہے؛ اس لیے سلسلہ مستدق ہے۔ اگر $\frac{1}{1 + صہ} < ۱$ تو $صہ$ منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ $(۱ - صہ) > ۱$ اور اس طرح n کی قیمتوں کی لامتناہی تعداد کے لیے $۱ - صہ > ۱$ اس لیے سلسلہ متبع ہے۔

اگر $\frac{1}{1 + صہ} < ۱$ کی انتہا صفر کی طرف مستدق ہو جبکہ n کو لامتناہی بڑھا دیا جائے تو n کی ہر قیمت کے لیے سلسلہ مستدق ہوتا ہے۔ کیونکہ اس صورت میں $۱ + صہ > ۱$ جہاں $صہ$ منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ $(۱ + صہ) > ۱$ اور یہ n کی ہر قیمت کے لیے (سوائے ایسی قیمتوں کے ایک محدود جٹ کے) درست ہے۔ پس سلسلہ کی ہر رقم سوائے ان کی ایک محدود تعداد کے ایک مستدق سلسلہ ہندسیہ کی متناظر رقم سے کم ہے اور اس لیے سلسلہ مستدق

ہے۔ اس صورت میں غ = ص۔

اگر $\frac{1}{n}$ غیر معین طور پر بڑی قیمتیں رکھے یعنی اگر کوئی ایسا عدد موجود نہ ہو جو تمام عددوں $\frac{1}{n}$ سے بڑا ہو تو سلسلہ کی تمام قیمتوں کے لیے $\frac{1}{n} = 0$ قسع ہوتا ہے۔ اس صورت میں غ = 0۔ کیونکہ اگر رک کو کوئی قیمت سوائے صفر کے دی جائے تو سلسلہ کی ان رقموں کی تعداد لا انتہا ہوتی ہے جن میں سے ہر ایک اکائی سے بڑی ہے اور اس لیے سلسلہ قسع ہے۔

۲۰۴۔ دفعہ مابقی میں یہ دکھایا جا چکا ہے کہ ایک عدد نہ موجود ہوتا ہے (جو ممکن ہے صفر ہو یا غیر واجب قیمت ص اختیار کرے) ایسا کہ سلسلہ $ص + عم + عم + عم + ...$ مستحق ہوتا ہے کی ہر قیمت کے لیے جو غ سے چھوٹی ہو، اور قسع ہوتا ہے کی ہر قیمت کے لیے جو غ سے بڑی ہو۔ نقطہ ی = کو مرکز مانکر اس کے گرد نصف قطر غ کا ایک دائرہ

کھینچو۔ اس دائرہ کو سلسلہ $ا + ا + ا + ا + ...$

کے استدقاق کا دائرہ کہتے ہیں اور اس کے نصف قطر کو سلسلہ کے استدقاق کا نصف قطر کہتے ہیں۔

استدقاق کا نصف قطر محدود ہو سکتا ہے یا صفر یا لامتناہی۔

یہ ثابت کیا جائیگا کہ سلسلہ $ا + ا + ا + ا + ...$ کسی نقطہ ی کیلئے جو استدقاق کے دائرہ کے اندر واقع ہو مطلقاً مستحق ہوتا ہے، اور کسی نقطہ ی کے لیے جو اس دائرہ کے باہر واقع ہو قسع ہوتا ہے۔ لیکن کسی ایسے

نقطہ کے لیے جو استدقاق کے دائرہ کے محیط پر واقع ہو سلسلہ کے استدقاق سے متعلق کوئی ٹھیک عام بیان نہیں دیا جاسکتا۔

اب یہ امر کہ سلسلہ مطلقاً مستحق ہے اگر متقی غنہ اس واقعہ سے منبج ہوتا ہے کہ ایسی صورت میں مقیاسوں کا سلسلہ مستحق ہوتا ہے۔ اور یہ امر کہ سلسلہ تسبیح ہے اگر متقی کی قیمت \leq غنہ اس واقعہ سے منبج ہوتا ہے کہ استدقاق کی ضروری شرط نہا $|و| = |و|$ پوری نہیں ہوتی۔ کیونکہ

$$|و| = \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ غنہ}^n, \text{ اور } n \text{ کی قیمتوں کی لامتناہی تعداد کے لیے}$$

$$\text{غنہ}^n < (1 - \text{غنہ}^n) \text{؛ اس لئے اگر صہ منتخب کیا جائے ایسا کہ}$$

$$1 < \left(\frac{1}{2}\right)^n - \text{صہ}$$

تو ہم دیکھتے ہیں کہ $|و| = |و| < 1$ کی قیمتوں کی لامتناہی تعداد کے لئے۔

۲۰۵ — اب یہ دکھایا جائیگا کہ سلسلہ $1 + و + و + و + ...$ کسی دائرہ میں جس کا نصف قطر استدقاق کے نصف قطر سے کم ہو اور جس کا مرکزی = ہو یکساں طور پر مستحق ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ اس دائرہ کا نصف قطر غنہ = ک ہے اور فرض کرو کہ غنہ ایک ثابت عدد ہے غنہ اور غنہ = ک کے درمیان۔ فرض کرو غنہ = ک = غنہ = صہ۔

$$\text{باقی } و + و + و + ... \text{ کے انتہائی مجموعہ کا مقیاس سلسلہ}$$

$$\frac{و}{1+و} + \frac{و}{1+و} + \frac{و}{1+و} + \frac{و}{1+و} + \dots$$

$$\frac{و}{1+و} + \frac{و}{1+و} + \frac{و}{1+و} + \frac{و}{1+و} + \dots$$

کے انتہائی مجموعہ سے متجاوز نہیں ہوتا۔ لیکن اعداد $۱+۱+۱+۱+۱$ ،
 سب کے سب کسی ثابت عدد k سے کم ہیں کیونکہ سلسلہ مستقیم ہے جبکہ
 $۱+۱+۱+۱+۱$ سے $\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \}$ اس لیے سلسلہ کا مجموعہ k سے کم ہے،
 اور یہ k سے کم ہے، اور یہ k سے کم ہے، اور یہ k سے کم ہے، اور یہ k سے کم ہے،
 اگر صہ اختیاری طور پر منتخب کردہ ایک مثبت عدد ہو تو n کی ایک
 قیمت n متعین ہو سکتی ہے ایسی کہ $n \leq k$ کے لیے k سے کم ہے، اور یہ k سے کم ہے،
 اس لیے سلسلہ $۱+۱+۱+۱+۱$ کے باقی بچ (ی) کا مقیاس صہ سے کم ہے،
 $n \leq k$ کے لیے اور n کی تمام قیمتوں کے لیے ایسی کہ $n \leq k$ کے لیے،
 اس لیے سلسلہ کا استدقاق نصف قطر n کے دائرہ میں یکساں ہے،
 یہ درست ہے خواہ کتنا ہی چھوٹا عدد k (۰) لیا جائے، لیکن یہ دعویٰ کرنا
 غیر صحیح ہوگا کہ استدقاق کے دائرہ میں استدقاق بالضرور یکساں ہوتا ہے،
 سلسلہ $۱+۱+۱+۱+۱$ کے مجموعہ کو n کی ان قیمتوں کے لیے
 جن کے مقیاس استدقاق کے نصف قطر سے کم ہیں k سے تعبیر کریں
 تو دفعہ ۲۰۰ کی رو سے نتیجہ نکلتا ہے کہ k (ی) استدقاق کے دائرہ کے
 اندر موقوفہ تمام نقطوں کے لیے k کا ایک مسلسل تفاعل ہے۔ اگر استدقاق کا
 نصف قطر لامتناہی ہو تو مستوی کے تمام محدود نقطوں کے لیے k (ی)
 مسلسل ہوتا ہے۔

سلسلوں $1 + ی + ی' + ی'' + \dots$

اور $1 + \frac{ی}{۱} + \frac{ی'}{۲} + \frac{ی''}{۳} + \dots$

کے استدقاق کا نصف قطر ایک ہے۔ ان کے مجموعوں کے تفاعل فا (ی) اکائی نصف قطر کے دائرہ کے اندر ی کے مسلسل تفاعل ہیں۔

سلسلہ $1 + \frac{ی}{۱} + \frac{ی'}{۲} + \frac{ی''}{۳} + \dots + \frac{ی^{(n)}}{n}$

کے استدقاق کا نصف قطر لاتنا ہی ہے؛ مجموعہ کا تفاعل فا (ی) ی کی تمام محدود قیمتوں کے لیے مسلسل ہے۔

سلسلہ $1 + ل ی + ل' ی' + \dots + ل^{(n)} ی^{(n)}$

کے استدقاق کا نصف قطر صفر ہے۔

۲۰۶ — استدقاق کے دائرہ کے محیط پر سلسلہ کا استدقاق ابٹک (282) زیر بحث نہیں آئیے۔ مسئلہ کے عام ہونے پر اثر نہیں پڑیگا اگر ہم استدقاق کے نصف قطر کو ایک فرض کر لیں۔

یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ سلسلہ $ل + ل' ی + ل'' ی' + \dots$ جبکہ تمام ہر

حقیقی ہوں استدقاق کے دائرہ پر کے نقطوں کے لیے مستحق ہوتا ہے سوائے

نقطہ ی = ۱ کے اگر سر سب کے سب مثبت ہوں اور سوائے نقطہ ی = -۱ کے

اگر سر باری باری سے مثبت اور منفی ہوں بشرطیکہ ہر دو صورتوں میں

سر $ل، ل'، ل''$... مطلق مقدار کے لحاظ سے نزولی ترتیب میں ہوں

اور بشرطیکہ $ل$ کی انتہا جبکہ $ل$ کو لا انتہا بڑھا دیا جائے صفر ہو۔

فرض کرو کہ $س = ل + ل' ی + ل'' ی' + \dots + ل^{(n)} ی^{(n)}$

جبکہ $Y = 1$ ۔ اس سلسلہ کا مستحق ہونا متعین نہیں ہوا، اس کا انحصار سلسلہ کی نوعیت پر ہوتا ہے۔ یہ ہو سکتا ہے کہ سلسلہ استدقاق کے دائرہ پر صرف نیم مستحق ہو۔

اگر سلسلہ کے سر ملتف ہوں تو ہم ایسے سلسلہ کو دو سلسلوں میں توڑ سکتے ہیں جن میں سے ایک میں سر حقیقی ہوں اور دوسرے میں خیالی۔ پھر ان دو سلسلوں پر الگ الگ غور کیا جاسکتا ہے۔

$$\text{سلسلہ } 1 + \frac{Y}{1} + \frac{Y}{2} + \frac{Y}{3} + \dots$$

مستحق ہے جبکہ $Y = 1$ سوائے اس صورت کے جبکہ $Y = 1$ پس یہ دو

$\frac{1}{2}$ جم N ط، $\frac{1}{2}$ جب N ط دونوں مستحق ہیں سوائے اس کے کہ پہلا سلسلہ متنع ہوتا ہے جبکہ ط صفر ہو یا π کا جفت ضعیف۔

۲۰۴۔ فرض کرو کہ فا (لا)، لا کا وہ مسلسل تفاعل ہے جو

سلسلہ $1 + 1 + 1 + \dots$ کے مجموعہ کو تعبیر کرتا ہے جس کے سر حقیقی ہیں اور جو لا کی ایک سے چھوٹی حقیقی قیمتوں کے لئے مستحق ہے۔ ہم مان لیتے ہیں کہ یہ سلسلہ متنع ہوتا ہے جبکہ لا ∞ لیکن یہ کہ سلسلہ $1 + 1 + 1 + \dots$ جو لا = ۱ رکھنے سے حاصل ہوتا مستحق۔

اب ہم یہ بتائیں گے کہ سلسلہ $1 + 1 + 1 + \dots$ کا مجموعہ فا (لا) کی انتہا ہے جبکہ لا ایک سے چھوٹی قیمتوں سے بڑھ کر انتہائی قیمت ایک تک پہنچتا ہے۔ پس مسلسل تفاعل فا (لا) جو لا = ۱ کے لیے فا (۱) =

نتیجہ فا (لا) سے تعبیر ہوتا ہے سلسلہ $1 + 1 + 1 + \dots$ کے مجموعہ کو

تعبیر کرتا ہے جبکہ $\lambda = 1$ - یہ مسئلہ آبل نے بیان کیا تھا۔
 فرض کرو کہ $س = 1 + 1 + 1 + \dots + 1$ تو $س = 1$ اور اس
 مسئلہ کی بموجب ہر دفعہ ۲۰۹ میں ثابت کیا جائیگا چونکہ سلسلے

$$1 + 1 + 1 + \dots + 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + 1 + 1 + \dots$$

$$1 + 1 + 1 + \dots + 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + 1 + 1 + \dots$$

دونوں مطلقاً مستحق ہیں جبکہ $\lambda > 1$ اس لیے ان کا حاصل ضرب

$$س + س + س + \dots + س + س + س + \dots + س + س + س + \dots$$

مستحق ہے اور اس کا انتہائی مجموعہ $\lambda(1 - \lambda)$ ہے جو اوپر کے
 دو سلسلوں کے انتہائی مجموعوں کا حاصل ضرب ہے۔ نہ اس
 کو س سے تعبیر کرو تو عددون منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ $س = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + 1 + 1 + \dots$
 سب کے سب $س + س$ اور $س - س$ کے درمیان واقع ہوں
 جہاں $س$ اختیاری طور پر منتخبہ عدد ہے۔

ن کی ایسی کسی قیمت کے لیے $س + س + س + \dots + س + س + س + \dots$ کا مجموعہ

$$(س + س) \lambda \setminus (1 - \lambda) \text{ اور } (س - س) \lambda \setminus (1 - \lambda)$$

کے درمیان واقع ہوتا ہے۔ اس لیے $\lambda(1 - \lambda)$

$$(س + س) \lambda + (س - س) \lambda + \dots + (س - س) \lambda + (س - س) \lambda$$

میں تقسیم ہو سکتا ہے اور مسئلہ بالا این دو سلسلوں میں سے ہر ایک کے لیے درست ہے۔
اس لیے اگر سلسلہ ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ... بمستحق ہو جبکہ ۱ = حجم ط + خر جب ط
تو اس کا مجموعہ، $r = 1$ کے لیے $f_a(1)$ کی انتہا ہے جبکہ ط کی قیمت کو
مستقل رکھا جائے۔ تب وہ تفاعل جو اس سلسلہ سے تعبیر ہوتا ہے
استدقاق کے دائرہ کے محیط کے کسی نقطہ پر مسلسل ہے، لحاظ ان نقاط
کے جو اس نقطہ میں سے گزرنیوالے استدقاق کے دائرہ کے نصف قطر

اس دفعہ کی تحقیق کی ضرورت واضح کرنے کے لیے ہم یہ دیکھتے ہیں کہ اگر مسئلہ

$$\dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

کی قموں کی ترتیب کو بدل دیا جائے تو اوپر کا مسئلہ نئے سلسلہ کے لیے درست نہ ہوگا۔
بیشالاً ابن دو حقیقی سلسلوں

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

پروغور کرو۔ جب تک کہ لا ایک سے چھوٹا رہتا ہے یہ سلسلے مطلقاً مستحق ہوتے ہیں اور ان کا مجموعہ ایک ہی ہوتا ہے، لیکن جب $\lambda = 1$ تو ان سلسلوں کے مجموعے مساوی نہیں ہوتے جیسا کہ دفعہ ۱۹۵ میں دکھایا جا چکا ہے۔ پہلے سلسلہ کا مجموعہ λ کی قیمت $\lambda = 1$ تک مسلسل ہے لیکن دوسرے سلسلہ کا مجموعہ ایسا نہیں ہے۔

۳۰۸ ————— ی کی قوتوں کے دو الگ الگ سلسلے

$$\dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

نہیں ہو سکتے ایسے کہ دونوں نصف قطرک (\angle) کے دائرہ میں
موقع تمام نقطوں کے لیے ایک ہی قیمت فا (ی) کی طرف مستحق
ہوں۔ چونکہ وہ ی = ۰ کے لیے ایک ہی قیمت کی طرف مستحق
ہوتے ہیں اس لیے ہمیں حاصل ہونا چاہیے $\angle = \beta$ ، اور اس طرح
یہ سلسلے $\angle + \angle + \dots + \beta + \beta + \dots$ ایک ہی قیمت
کی طرف مستحق ہوتے ہیں جبکہ مق ی $\geq \angle$ ۔ یہ ناممکن ہے تاہم قیاسیکہ
یہ دو سلسلے

$$\angle + \angle + \dots + \beta + \beta + \dots + \beta + \beta + \dots$$

دونوں مستحق نہ ہوں اور مق ی $\geq \angle$ کے لیے ان کے انتہائی
مجموعے ایک ہی نہ ہوں۔ ان دو سلسلوں کے استدقاق کے
نصف قطروں میں سے ہر ایک \angle اور ان کے مجموعہ تفاعل
(Sum functions) دونوں ان کے استدقاق کے دائروں کے
اندر مسلسل ہیں۔ چونکہ ان کے مجموعہ تفاعل نصف قطرک کے
دائرہ کے اندر کی ہر قیمت کے لیے سوائے ی = ۰ کے مماثل ہیں
اس لیے ان تفاعلوں کے تسلسل سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ وہ مماثل ہیں
جبکہ ی = ۰ اور اس لیے $\angle = \beta$ ۔ اسی طرح عمل کو جاری رکھنے سے
یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ ان دو سلسلوں کے متناظر سرسب کے سب
مساوی ہیں اور اس لیے یہ سلسلے مماثل ہیں۔

(265)

دو سلسلوں کے حاصل ضرب کا استدقاق

۲۰۹ — فرض کرو کہ دو مطلقاً مستحق سلسلوں

$$۱ + ۲ + ۳ + \dots + ۱۰۰ + \dots + ۱۰۰۰ + \dots$$

$$۱ + ۲ + ۳ + \dots + ۱۰۰ + \dots + ۱۰۰۰ + \dots$$

کے انتہائی مجموعے میں، س سے تعبیر ہوتے ہیں۔ تب یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ سلسلہ

$۱ + ۲ + ۳ + \dots + ۱۰۰ + \dots + ۱۰۰۰ + \dots + ۱۰۰۰۰ + \dots$ جو دیے ہوئے سلسلوں کو باہم ضرب دینے سے حاصل ہوا ہے مستحق ہے اور اس کا انتہائی مجموعہ میں س ہے۔

اس حاصل ضربی سلسلے کی ن رقموں کے مجموعہ کو س سے تعبیر کرو اور فرض کرو کہ ۱ اور ۲ کے مقیاس علی الترتیب ۱ اور ۲ ہیں۔ اب چونکہ سلسلے میں، س مطلقاً مستحق ہیں، اس لیے مقیاسوں کے سلسلے مستحق ہیں، ان کے مجموعوں کو ۱، ۲ سے تعبیر کرو اور فرض کرو

$$۱ = ۱ + ۲ + ۳ + \dots + ۱۰۰ + \dots + ۱۰۰۰ + \dots + ۱۰۰۰۰ + \dots$$

$$۲ = ۱ + ۲ + ۳ + \dots + ۱۰۰ + \dots + ۱۰۰۰ + \dots + ۱۰۰۰۰ + \dots$$

$$۱۰۰ = ۱ + ۲ + ۳ + \dots + ۱۰۰ + \dots + ۱۰۰۰ + \dots + ۱۰۰۰۰ + \dots$$

$$\geq ۱ + ۲ + ۳ + \dots + ۱۰۰ + \dots + ۱۰۰۰ + \dots$$

اب $۱ > ۲ > ۱۰۰$ کیونکہ ۱ میں حال ضرب ۱ ہے کی نسبت زیادہ رقمیں ہیں اور ۲ میں ۱ کی نسبت کم رقمیں ہیں؛ پس ۱ کی انتہا جبکہ ۱۰۰ کو لا انتہا بڑھایا جاتا ہے محدود ہے، اور چونکہ ۱ کی

انتہائیں ایک ہی ہونی چاہئیں اس لیے ان میں سے ہر ایک ہر قدر کے مساوی ہے؟ اس طرح مق (س) مق (س) کی انتہا منفی ہے یا س = س۔
 زیادہ عام طور پر یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ اس مسئلہ کی صحت کے لیے یہ کافی ہے کہ سلسلوں $1 + 1 + 1 + \dots + 1 + 1 + 1 + \dots$ میں سے صرف ایک سلسلہ مستحق ہو اور دوسرا مشروطاً مستحق۔ اگر یہ دو سلسلے صرف مشروطاً مستحق ہوں تو حاصل ضربی سلسلہ $1 + 1 + 1 + \dots + 1 + 1 + 1 + \dots$ کا مستحق ہونا ضروری نہیں ہے لیکن اس کے مستحق ہونے کی صورت میں یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ اس کا مجموعہ دیے ہوئے دو سلسلوں کے مجموعوں کا حاصل ضرب ہے۔

دو ہرے سلسلوں کا اشتقاق

(266)

۲۱۔ فرض کرو کہ مثبت حقیقی عددوں a, b کے ایک دو ہرے تو ہوں

$$\begin{aligned} & a^1, a^2, a^3, \dots, a^n, \dots \\ & b^1, b^2, b^3, \dots, b^n, \dots \\ & \dots \\ & a^1, a^2, a^3, \dots, a^n, \dots \\ & b^1, b^2, b^3, \dots, b^n, \dots \\ & \dots \end{aligned}$$

پر ہم غور کرتے ہیں۔

۱۔ ان نتیجوں کے ثبوت کے لیے دیکھو مصنف کی کتاب
 صفحات ۵۰۰، ۵۰۱۔

Theory of functions of a
 real variable

مان لو کہ جب ہر صف کے عددوں کو باہم جمع کیا جاتا ہے تو ان کے مجموعہ کی ایک معین انتہا ہے؛ فرض کرو کہ پہلی، دوسری،... روئیں،... صفوں کے لیے اس انتہائی مجموعہ کی قیمتیں س، س،... س،... ہیں۔ نیز یہ مان لو کہ سلسلہ س + س + س + ... + س + ... مستحق ہے اور اس کا انتہائی مجموعہ س ہے۔ یہ ثابت کیا جائیگا کہ سلسلہ

$$م، س + م، س + ... + م، س + ... + ...$$

جو کسی ایک ستون کے عددوں کو جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے مستحق ہے اور اگر اس کا انتہائی مجموعہ م سے تعبیر ہو تو سلسلہ

$$م + م + م + ... + م + ...$$

مستحق ہے اور اس کا انتہائی مجموعہ س ہے۔

$$م، س + م، س + ... + م، س + ... + ...$$

یہ بات کہ م، س + م، س + ... + م، س + ... + ... مستحق ہے اس واقعہ سے نتیجہ ہوتی ہے کہ اس سلسلہ کی ہر رقم مستحق سلسلہ س + س + س + ... + س + ... کی مناظر رقم سے چھوٹی ہے۔ ایک مثبت عدد نتیجہ سکتا ایسا کہ اعداد

$$م - \frac{م}{۱}، م - \frac{م}{۲}، م - \frac{م}{۳}، ...، م - \frac{م}{ن}، م - \frac{م}{ن+۱}$$

سب کے سب صفر سے چھوٹے ہوں۔ اس لیے

$$م + م + ... + م > م + س + س + ... + س + س > م + س$$

اور چونکہ یہ ر کی ہر قیمت کے لیے درست ہے اس لیے سلسلہ م + م + ... + م + ...

مستدق ہے اور اس کا انتہائی مجموعہ \geq 'س' کیونکہ صہ اختیاری چھوٹا عدد ہے۔ نیز عدد صحیح ق منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ اعداد

$$س - ۱ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}، س - ۲ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}، ...، س - ۱ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

سب کے سب صہ سے چھوٹے ہوں۔ اس لیے سلسلہ م + م + ... کا انتہائی مجموعہ س + س + س + ... صہ سے بڑا ہے؛ اور چونکہ یہ کی ہر قیمت کے لیے درست ہے اس لیے یہ انتہائی مجموعہ \leq 'س' صہ۔ اب چونکہ صہ اختیاری چھوٹا عدد ہے سلسلہ م + م + ... کا انتہائی مجموعہ \leq 'س' لیکن یہ ثابت کیا جا چکا ہے کہ یہ انتہائی مجموعہ \geq 'س'۔ پس یہ انتہائی مجموعہ 'س' کے مساوی ہے۔

اگر مثبت اعداد م، س ایسے ہوں کہ سلسلوں م + م + ... + م + ... میں سے ہر سلسلہ ایک عدد س کی طرف مستدق ہو اور اس طور پر کہ سلسلہ س + س + س + ... مستدق ہو تو ہم کہتے ہیں کہ اعداد م، س مثبت عددوں

کے ایک مستدق دوہرے سلسلہ کی رقیں ہیں اور اس سلسلہ کا مجموعہ (267) س ہے۔ اس ثابت شدہ مسئلہ کی بموجب اس دوہرے سلسلہ کا انتہائی مجموعہ وہی ہو گا خواہ عمل جمع پہلے س کے لحاظ سے اور پھر م کے لحاظ سے ہو یا اس ترتیب کے بالعکس۔ اس طرح

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

اگر عددوں م، س پر ایک ہی علامت کے ہونے کی قید نہ ہو اور اگر اعداد

اگر s | ایک مستدق دوہرے سلسلے کی رقیں ہوں تو ہم کہتے ہیں کہ اعداد s | ایک مطلقاً مستدق دوہرے سلسلے کی رقیں ہیں۔
اگر وہ دوہرا سلسلہ جس کی رقیں s | ہیں مطلقاً مستدق ہو تو

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{s^r} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{s^r} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{s^r} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{s^r}$$

کیونکہ فرض کرو s | = s | - s | جہاں s | = 0 جبکہ s | ثابت ہوتا ہے اور s | = 0 جبکہ s | منفی ہوتا ہے۔ پس دیے ہوئے سلسلہ کو دو سلسلوں کا فرق خیال کر سکتے ہیں جن کی رقیں ثابت اعداد s | اور s | ہیں۔ اب چونکہ وہ سلسلہ جس کی عام قسم s | + s | ہے مستدق ہے اسلئے وہ دو سلسلے جنکی عام رقیں s | اور s | ہیں دونوں مستدق ہیں اور ان کے مجموعے کسی ایک ترتیب میں لئے جاسکتے ہیں۔ پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اس سلسلہ کا مجموعہ جسکی عام قسم s | ہے کسی ایک ترتیب میں حاصل جمع کو متاثر کئے بغیر لیا جاسکتا ہے۔

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{s^r} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{s^r} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{s^r} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{s^r}$$

اس وقت بھی درست ہے جبکہ اعداد s | ملتف ہوں اگر مقیاسوں s | کا سلسلہ مطلقاً مستدق ہو۔ کیونکہ اگر s | = s | + s | تو وہ سلسلے

جن کی عام رقمیں چہرے، ضمیر ہیں دونوں مطلقاً مستدق ہیں اور اس لیے مطلوبہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے۔

اس عام مسئلہ کو شکل ذیل میں بھی بیان کیا جا سکتا ہے:-

اگر $1 + 1 + 1 + 1 + \dots$ حقیقی یا ملتف عددوں کا ایک مستدق سلسلہ ہو اور اگر ہر رقم 1 کو ایک مطلقاً مستدق سلسلہ

$$1 + 1 + 1 + \dots$$

کے انتہائی مجموعہ سے بیان کیا جائے تو دیے ہوئے سلسلہ کی بجائے اس کے انتہائی مجموعہ کو بدلے بغیر، سلسلہ

$$\dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

رکھا جا سکتا ہے بشرطیکہ سلسلہ (268)

$$\dots + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \dots$$

مستدق ہو جہاں $\frac{1}{3}$ سے

$$\dots + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \dots$$

کا انتہائی مجموعہ تعمیر ہوتا ہے۔

اس مسئلہ کی ایک اہم صورت جس سے ہم بعد میں استفادہ کریں گے حسب ذیل ہے:-

اگر $1 + 1 + 1 + \dots$ ایک مستدق سلسلہ ہو جس کا انتہائی مجموعہ فلائی

ترتیب دیا گیا ہے ایک بہت اہم سلسلہ ہے۔
 اُس خاص صورت میں جبکہ کم مثبت صحیح عدد ہو یہ سلسلہ محدود
 ہوتا ہے اور اس کا مجموعہ $(1 + y)^m$ ہوتا ہے۔ اس کا ثبوت جو
 بالعموم دیا جاتا ہے y کی ملطف قیمت پر بھی اطلاق پذیر ہے۔
 ہم فرض کریں گے کہ y ایک ملطف عدد ہے لیکن اپنی توجہ صرف
 اُس صورت تک محدود رکھیں گے جس میں m حقیقی ہو۔ اس صورت
 میں $\frac{y^{1+m}}{1+y} = \frac{1}{1+y} - \frac{y}{1+y}$ جس کی انتہائی قیمت ایک ہے۔ اس لیے
 اس سلسلہ کے استدقاق کا نصف قطر ایک ہے۔ اکائی نصف قطر
 کے اس دائرہ کے اندر کسی نقطہ y پر یہ سلسلہ مطلقاً مستقر ہے اور
 اکائی سے کم نصف قطر والے کسی دائرہ میں یکساں طور پر مستقر ہے۔
 سلسلہ کے انتہائی مجموعہ کو $f(m)$ سے تعبیر کرنے اور دفعہ ۲۰۹ کا
 مسئلہ استعمال کرنے سے استدقاق کے دائرہ کے اندر موقوفہ نقطوں
 کے لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے

(269)

$f(m) = f(m) + f(m) = f(m) + f(m) + \dots + f(m) + f(m)$
 اور اس لیے $f(m) = f(m) + f(m) + \dots + f(m) + f(m)$
 اول فرض کرو کہ m مختصر ترین شکل میں ایک مثبت کسر ہے۔

$$r_k m = m = \dots = m = \frac{p}{q} \text{ تو}$$

$$[f(\frac{p}{q})] = f(p) \text{ (پ)}$$

اس لیے ف ($\frac{پ}{ق}$) ف (پ) کا ق واں جذر ہے یعنی (۱+ی) آ کا۔

فرض کرو کہ

$$۱ + رجم ط = رجم ف، رجب ط = رجب ف$$

تب (۱+ی) آ = پ (جم پ ف + رجب پ ف)
اور اس کے ق ویں جذروں کی قیمتیں ہیں

$$رَقی \left\{ رجم - \frac{پ ف + ۲ س ۲}{ق} + رجب - \frac{پ ف + ۲ س ۲}{ق} \right\}$$

جہاں س کی قیمتیں ۱، ۲، ۳، ...، ق-۱ ہیں۔ نیز

$$۱ + ۲ + ۳ + ... + رجم ط + ر$$

اور ہم ف کو مسا $\frac{رجب ط}{۱ + رجم ط}$ کی وہ قیمت فرض کر سکتے ہیں جو حادہ

ہے (مثبت یا منفی)؛ ایسی قیمت موجود ہوتی ہے کیونکہ رجم ف
استدقاق کے دائرہ کے اندر وقوع تمام نقطوں کے لیے مثبت ہے۔

پس ہم دیکھتے ہیں کہ قنا $\left\{ رجم - \frac{پ ف + ۲ س ۲}{ق} + رجب - \frac{پ ف + ۲ س ۲}{ق} \right\}$

کی ایک قیمت ف ($\frac{پ}{ق}$) ہے اور س کی ہمیشہ وہی قیمت ہونی چاہیے کیونکہ ہم جانتے ہیں کہ

استدقاق کے دائرہ کے اندر تمام نقطوں کے لیے ف ($\frac{پ}{ق}$) ایک مسلسل

تفاعل ہے۔

س کی یہ قیمت معلوم کرنے کے لیے رکھو ف =، تب ف ($\frac{پ}{ق}$) حقیقی ہے

اور اس لیے

قنارۃ {جم $\frac{\pi s^2}{q}$ + خجب $\frac{\pi s^2}{q}$ }

کی ایک حقیقی قیمت کے مساوی ہونا چاہیے اور اس لیے $s = 0$ یا $s = \frac{1}{2}$ ق اگر ق جفت ہے۔ اگر r کافی طور پر چھوٹا ہے تو $f(\frac{1}{2})$ یقیناً مثبت ہے؛ اس لیے s ، $\frac{1}{2}$ ق کے مساوی نہیں ہو سکتا اور اس لیے صفر ہونا چاہیے۔

اس طرح ہم نے ثابت کر دیا کہ سلسلہ کا مجموعہ جبکہ m ایک مثبت
عدد $\frac{p}{q}$ ہو $(+1)$ کی خاص قیمت ہے یعنی

$$(1 + 1 \text{ حجم ط} + 2) \frac{\pi}{2} (\text{جم}) \frac{\pi}{2} + \text{خربب} \frac{\pi}{2}$$

(270) جس میں جملہ $(1+2+3+\dots+n)$ اپنی حقیقی قیمت رکھتا ہے اور نہ ،

مس ۱۔ $\frac{\text{رجب ط} + ۱}{\text{رجب ط}}$ کی عددی طور پر کم سے کم قیمت ہے جہاں $Y = (R + 1) \times \text{رجب ط}$ ۔

ثانیاً فرض کرو کہ m ایک مثبت غیر منطقی عدد ہے، ہم اس کو مثبت منطقی عددوں m, m, \dots, m کے ایک تواتر کی انتہا سمجھینگے۔ تب

یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ $f(M)$ ، تو اترف (M) ، $f(M)$ ، ...
 $f(M)$ ، ... کی انتہا ہے، یا $f(M) = \text{نہیں}$ $f(M)$ ۔ استدلال

کے دائرہ کے اندر کسی نقطہ کی لیے حاصل ہوتا ہے

$$f(m) = 1 + m + \frac{m(m-1)}{2} + \dots + \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!} + \dots$$

+ ب (ی)

جہاں |ب (ی)| مستحق سلسلہ

$$\frac{n(n+1)\dots(n+n-1)}{n!} + \frac{n(n+1)\dots(n+n-1)}{(n+1)!} + \dots$$

کے انتہائی مجموعہ سے کم ہے جس میں n ایک مثبت صحیح عدد ہے جو m ، m^2 ، ...
 m^3 ، ... میں سے ہر ایک سے بڑا ہے۔ n کی کافی طور پر بڑی تمام
 قیمتوں کے لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے |ب (ی)| > تمام اعداد
 m کے لیے جہاں v اختیاری مثبت عدد ہے۔ یہ واضح ہے کہ
 محدود سلسلہ

$$1 + m + \frac{m(m-1)}{2} + \dots + \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!} + \dots$$

کے مجموعہ کی انتہا جبکہ m ، m کی طرف مستحق ہو یہ ہے

$$1 + m + \frac{m(m-1)}{2} + \dots + \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!} + \dots$$

اور اس لیے یہ $f(m)$ ۔ ب (ی) کی انتہا ہے۔ غیر منطوق قوت کی
 تعریف جو دفعہ ۱۸۶ میں دی گئی ہے اس کی بموجب $(1+y)^m$
 کی خاص قیمت کی انتہا $(1+y)^m$ ہے۔ چونکہ |ب (ی)|
 > تمام اعداد m ، m^2 ، ... کے لئے سلسلہ |ب (ی)| جسکی

ایک مُعین قیمت ہونی چاہیے \geq صہ ہے۔
پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$1 + م ی + \frac{م (۱-م)}{۲} ی + \dots + \frac{م (۱-م) \dots (۲+۱-م)}{۱-۱} ی$$

(۱+۱) کی خاص قیمت سے بقدر ایک ایسے عدد کے مختلف ہے جس کا
مقیاس n کی کافی طور پر بڑی تمام قیمتوں کے لیے صہ سے بڑا نہیں
ہے۔ اس لیے ثابت ہوا کہ ثنائی سلسلہ $م$ کی مثبت غیر منطق قیمت کے لیے
مسند ہے اور (۱+۱) کی صدر قیمت کے مساوی ہے۔

آخر میں فرض کرو کہ $م$ ایک منفی عدد $-م$ ہے۔ تب ہمیں حاصل
ہوتا ہے $ف (م) = ف (۱) = ۱$ ، اس لیے $ف (م) = \frac{۱}{ف (م)}$ ،
یا $ف (م) = (۱+۱)$ کی صدر قیمت کا مقلوب ہے یا (۱+۱) کی صدر
قیمت ہے۔

ہم اس پورے نتیجہ کو اس طرح بیان کر سکتے ہیں:-

$$سلسلہ \quad 1 + م ی + \frac{م (۱-م)}{۲} ی + \dots + \frac{م (۱-م) \dots (۱+۱-م)}{۱-۱} ی$$

کا مجموعہ $ی$ کی ان تمام قیمتوں کے لیے جن کا مقیاس ایک سے کم
ہے (۱+۱) کی صدر قیمت کے مساوی ہے جو یہ ہے

$$(۱+۱) \text{ رجم طہ } + \frac{۱}{۲} م (جم م فہ + خرب م فہ)$$

جبکہ $م$ کوئی حقیقی عدد ہو۔ جملہ بالائیں $ی$ کا مقیاس رہے اور

اس کی دلیل طہ ہے، اور فہم اس $\frac{1}{1+رجم طہ}$ کی وہ قیمت ہے جو $\frac{1}{1+رجم طہ}$ کے درمیان واقع ہوتی ہے۔

یہ نتیجہ کوشی نے حاصل کیا تھا اور اس کی کتاب "Analyse Algébrique" میں لیا گیا۔

۲۱۴ — اب صرف اُس صورت پر غور کرنا باقی رہ گیا ہے جب کہ $مقی = ۱$

$$\text{سلسلہ } ۱ + م + \frac{م(۱-م)}{۲} + \frac{م(۱-م)(۱-م)}{۳} + \dots$$

کی رقموں کو $۱، ۱، ۱، \dots$ سے تعبیر کریں تو $\frac{۱+۱+۱+\dots}{۱} = (۱-م)(۱+۱+۱+\dots)$ اگر $ن < م$ تو یہ نسبت منفی ہے اور اس لیے ایک خاص رقم کے بعد اس سلسلہ کی رقمیں باری باری سے مثبت اور منفی ہیں۔ یہ سلسلہ دفعہ ۱۹۴ کی رو سے مستحق ہے اگر بلحاظ مقدار اس کی رقمیں گھٹتی جائیں اور آخر الامر لامتناہی چھوٹی ہو جائیں۔ یہ بات اُس وقت ہوگی جبکہ $ن > ۱ + م$ یعنی جبکہ $م < ۱$ ، پس سلسلہ نیم مستحق ہوتا ہے اگر $م < ۱$ ؛ لیکن اگر $م > ۱$ تو وہ قسح ہوتا ہے کیونکہ رقموں کی مطلق مقادیریں غیر معین طور پر بڑھتی ہیں۔ یہ ثابت کرنے کے لیے کہ جب $م < ۱$ تو $۱ + م$ کی مطلق مقدار غیر معین طور پر گھٹتی ہے جیسے $ن$ غیر معین طور پر بڑھتا ہے مثبت عدد $۱ + م$ کی بجائے $س$ لکھو اور $|۱ + م|$ کے لیے جو جملہ ہے اُس میں اجزائے ضربی کی کسی خاص تعداد کے حاصل ضرب کو $ک$ سے تعبیر کرو۔ تب اگر

س سے عین بڑا صحیح عدد رہو تو حاصل ہوتا ہے

$$|ن| = ک (۱ - \frac{س}{ر}) (\frac{س}{۱+ر}) \dots (۱ - \frac{س}{ن})$$

$$> ک [(۱ + \frac{س}{ر}) (\frac{س}{۱+ر}) \dots (۱ + \frac{س}{ن})]$$

$$> ک [۱ + س (\frac{۱}{ر} + \frac{۱}{۱+ر} + \dots + \frac{۱}{ن})]$$

سلسلہ $\frac{۱}{ر} + \frac{۱}{۱+ر} + \frac{۱}{۲+ر} + \dots$ کی پہلی رقموں کا مجموعہ $< \frac{۱}{۲}$ اور ان کے بعد ۲ رقموں کا مجموعہ بھی $< \frac{۱}{۲}$ اور علیٰ ہذا القیاس۔ اس لئے ن کی کافی طور پر بڑی قیمت کے جواب میں سلسلہ کا مجموعہ $\frac{۱}{۲}$ کے کسی مقررہ ضعف سے بڑا ہوتا ہے اور اس لئے سلسلہ کا مجموعہ ن کے ساتھ لانا اتنا بڑھتا ہے۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ |ن| لانا اتنا گھٹتا ہے جیسے ن لانا اتنا بڑھتا ہے۔ جب 'م' = ۱- تو ثنائی سلسلہ کی رقیں متبادلاً ۱ اور -۱ ہیں اور اس لئے سلسلہ مستحق

نہیں ہوتا۔

دفعہ ۲۰۶ کے مسئلہ سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ سلسلہ

$$۱ + م ی + \frac{م (۱-م)}{۲} ی + \dots$$

مستحق ہوتا ہے جبکہ مق ی = ۱ بشرطیکہ م < ۱ اور ی ≠ ۱-

جب 'ی' = -۱ تو سلسلہ کی تمام رقیں ایک خاص رقم کے بعد

ایک ہی علامت کی ہوتی ہیں؛ پس معلومہ جانچ

$$نہا ن (۱ + \frac{ن}{ن-۱}) < ۱$$

لگانے سے سلسلہ مستحق ہوگا اگر

$$نہا ن \{۱ - (ن-۱) - (۱-ن) \} < ۱$$

ضعفی زاویوں کے دائری تفاعل

۲۱۳ — عام شکل میں مسئلہ ثنائی کا ایک اہم اطلاق (جم ط + خر جب ط) کا پھیلاؤ ہے جس کی خاص قیمت ڈیموائر کے مسئلہ کی رو سے جم ط + خر جب م ط ہے اگر ط ۳ کے درمیان واقع ہو۔ (جم ط + خر جب ط) کو شکل ۱۰ جم ط x (۱ + خر مس ط) میں لکھنے سے

$$\text{جم م ط} + \text{خر جب م ط} = \text{جم ط} \left[1 - \frac{م (۱ - م)}{۲} \text{مس ط} + \dots \right]$$

$$+ \text{خر} \left\{ \text{م مس ط} - \frac{م (۱ - م) (۲ - م)}{۳} \text{مس ط} + \dots \right\}$$

بشرطیکہ سلسلہ مستحق ہو؛ یہ شرط پوری ہوگی اگر ط حدود $\pm \frac{۱}{۳}$ کے درمیان واقع ہو خواہ م کی قیمت کچھ ہی ہو، اور نیز یہ شرط پوری ہوگی اگر ط $= \pm \frac{۱}{۳}$ بشرطیکہ $م < ۱$ ،

(۱) فرض کرو کہ م مثبت ہے، تب

$$\text{جم م ط} = \text{جم ط} \left[1 - \frac{م (۱ - م)}{۲} \text{مس ط} \right]$$

$$+ \frac{م (۱ - م) (۲ - م)}{۳} \text{مس ط} - \dots$$

(۱).....

$$\text{جب م ط} = \text{جم ط} \left\{ \text{م مس ط} - \frac{م (۱ - م) (۲ - م)}{۳} \text{مس ط} + \dots \right\}$$

(۲).....

م کی تمام قیمتوں کے لیے بشرطیکہ ط $\pm \frac{۱}{۳}$ کے درمیان واقع ہو، اور نیز یہ سلسلے درست ہیں ط $= \pm \frac{۱}{۳}$ کے لیے بھی۔ دفعہ ۱۵ میں

جو ضابطے حاصل کئے گئے تھے وہ مثبت صحیح عدد م کی صورت کے لیے تھے اور اس صورت میں ابستہ باقی کی شرط نہیں ہے۔ مندرجہ بالا نتیجے ان ضابطوں کی توسیعات ہیں۔
(۲) فرض کرو کہ م منفی ہے، تب م کو -م میں بدلنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{جم م ط جم ط} = ۱ - \frac{\text{م} (۱ + \text{م})}{۱} \text{مس ط} + \frac{\text{م} (۱ + \text{م}) (۲ + \text{م})}{۲} \text{مس ط} + \dots (۳)$$

$$\text{جب م ط جم ط} = \text{م مس ط} - \frac{\text{م} (۱ + \text{م}) (۲ + \text{م})}{۲} \text{مس ط} + \dots (۴)$$

جو م کی تمام مثبت قیمتوں کے لیے درست ہیں بشرطیکہ ط $\pm \frac{۱}{\text{م}}$ کے درمیان واقع ہو۔ یہ نتیجہ ط $\pm \frac{۱}{\text{م}}$ کے لیے صرف اُس صورت میں درست ہیں جبکہ م ۱۱ اور صفر کے درمیان واقع ہو۔

۲۱۴۔۔۔۔۔ دفعہ مابقی کے ضابطے (۱) اور (۲) اُس صورت میں جبکہ م ایک مثبت صحیح عدد ہو ساتویں باب میں جم م نہ اور جب م نہ کے جملوں کو جب نہ کی صعودی قوتوں کے سلسلوں میں حاصل کرنے میں استعمال ہو چکے ہیں۔ اب ہم اسی طرح کے جملے معلوم کریں گے جبکہ م مثبت صحیح عدد نہ ہو۔
ہم ثابت کر چکے ہیں کہ جب م ایک جفت مثبت صحیح عدد ہو تو

$$\text{جم م نہ} = ۱ - \frac{\text{م}^۲}{۲} \text{جب نہ} + \frac{\text{م}^۲ (۲ - \text{م}^۲)}{۴} \text{جب نہ} -$$

$$- \frac{\text{م}^۲ (۲ - \text{م}^۲) (۲ - \text{م}^۲)}{۸} \text{جب نہ} + \dots (۵)$$

اور جب م ایک طاق مثبت صحیح عدد ہو تو

$$\text{جب } م \neq ۰ \text{ جب } ۰ - \frac{م(۲-۱)}{۳} \text{ جب } ۰$$

$$+ \frac{م(۲-۱)(۳-۲)}{۳} \text{ جب } ۰ - \dots \dots (۶)$$

(274)

یہ جملے اس طرح حاصل کیے گئے تھے کہ جم م نہ اور جب م نہ کے لیے جو جملے جم نہ اور جب نہ کی قوتوں میں تھے ان میں جم نہ کی قوتوں کی بجائے ۱۔ جب نہ کی قوتیں درج کی گئی تھیں اور پھر ان قوتوں کو (جو مثبت صحیح عدد تھے) مسئلہ شانی کے ذریعہ پھیلا کر نتیجہ کو جب نہ کی قوتوں میں ترتیب دیا گیا تھا۔ یہی سلسلے حاصل ہونگے جبکہ م کوئی مثبت صحیح عدد ہو بلا لحاظ جفت یا طاق ہونے کے بشرطیکہ جم نہ مثبت ہو اور یہ اس وقت مثبت ہوگا جبکہ نہ، $\pm \frac{۱}{۲}$ کے درمیان واقع ہو۔ اب ۱۔ جم نہ کی قوتیں ضرور نہیں کہ صحیح اعداد ہی ہوں لیکن مسئلہ شانی، برہنہم اطلاق پذیر ہوگا کیونکہ تمام سلسلے مستحق ہونگے۔ چونکہ جب نہ کی قوتوں کے تمام سلسلے مستحق ہوتے ہیں اور چونکہ جم م نہ، جب م نہ کے اصلی جملوں میں سے ہر جملہ میں رقموں کی صرف ایک محدود تعداد شامل ہوتی ہے اس لیے پھیلاؤں کے نتیجے کو جب نہ کی قوتوں کے ایک سلسلہ میں مرتب کیا جاسکتا ہے۔ اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ اگر م کوئی مثبت صحیح عدد ہو تو سلسلوں (۵) اور (۶) میں سے ہر ایک درست ہے بشرطیکہ نہ، $\pm \frac{۱}{۲}$ کے درمیان واقع ہو، پہلا سلسلہ رقموں کی محدود تعداد پر مشتمل نہیں ہوتا جب تک کہ م جفت نہ ہو، اور دوسرا سلسلہ جب تک کہ م طاق نہ ہو۔

فرض کرو کہ سلسلہ

$$۱+ م (خ جب نہ) + \frac{م}{۳} (خ جب نہ) + \frac{م(۲-۱)}{۳} (خ جب نہ) + \dots$$

کا انتہائی مجموعہ $f(m)$ سے تعبیر ہوتا ہے۔ یہ سلسلہ، سلسلہ (۶) کو
 x سے ضرب دیکر سلسلہ (۵) میں جمع کرنے سے حاصل ہوا ہے۔
 جب m مثبت صحیح عدد ہو تو $f(m) = (m) = \text{جم } m \text{ نہ} + x \text{ جب } m \text{ نہ}$
 اگر $z = \pm \frac{1}{p}$ کے درمیان واقع ہے۔ اب جبکہ m صحیح اعداد ہوں تو

$$f(m) \times f(m) = (\text{جم } m \text{ نہ} + x \text{ جب } m \text{ نہ}) (\text{جم } m \text{ نہ} + x \text{ جب } m \text{ نہ})$$

$$= \text{جم } (m+m) \text{ نہ} + x \text{ جب } (m+m) \text{ نہ}$$

$$= f(m+m)$$

ان دو سلسلوں $f(m)$ ، $f(m)$ کا حاصل ضرب ایک ہی شکل کا ہوگا
 خواہ m کچھ ہی ہوں۔ پس دفعہ ۲۰۹ کا مسئلہ استعمال کر کے ہم
 اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ مساوات

$$f(m) \times f(m) = f(m+m)$$

m اور m کی تمام قیمتوں کے لیے درست ہے کیونکہ سلسلے مطلقاً متناظر
 ہیں۔ لہذا

$$f(m) f(m) f(m) \dots f(m) = f(m+m+m+\dots+m)$$

اب فرض کرو کہ $m = \frac{1}{p}$ = \dots = $\frac{1}{p}$ جہاں p اور q مثبت صحیح عدد ہیں

$$\left\{ f\left(\frac{1}{p}\right) \right\}^q = f\left(\frac{q}{p}\right)$$

پس $\left\{ f\left(\frac{1}{p}\right) \right\}^q$ کی ایک قیمت $f\left(\frac{q}{p}\right)$ ہے اور اس لیے اس کی شکل ہے

$$\text{جم } \frac{q}{p} \text{ نہ} + \frac{2\pi s}{p} + x \text{ جب } \frac{q}{p} \text{ نہ}$$

جہاں س کوئی صحیح عدد ہے۔ اب جبکہ $ف = ۰$ ، تو $ف = \left(\frac{۳}{۴}\right) = ۱$ ،
 اس لیے چونکہ مجموعہ $ف = \left(\frac{۳}{۴}\right)$ مسلسل بدلتا ہے جیسے $ف = ۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, \dots$
 $+ \frac{۱}{۴}$ تک پڑتا ہے ہمیں حاصل ہونا چاہیے $س = ۰$ ، اگر $ف$ ان حدود کے
 درمیان واقع ہے، پس اس صورت میں

$$\text{میں } ف = \left(\frac{۳}{۴}\right) = \text{جم } \frac{۳}{۴} + \text{خ جب } \frac{۳}{۴}$$

ثانیاً فرض کرو کہ $م$ ایک مثبت غیر منطقی عدد ہے جو منطقی اعداد $م^۱, م^۲, م^۳, \dots$
 کے ایک تواتر کی انتہا ہے۔ تب

$$ف (م) = ۱ + م (م) + \frac{م^۱}{۴} (\text{خ جب } ف) + \frac{م^۲}{۴} (\text{خ جب } ف) + \dots$$

$$+ \frac{م^۱ (م^۱ - ۱) \dots (م^۱ - ۱۲)}{(۱ - ۱۲)} (\text{خ جب } ف) + \dots$$

$$+ \frac{م^۱ (م^۱ - ۱) \dots (م^۱ - ۱۲)}{(۱ - ۱۲)} (\text{خ جب } ف) + \dots$$

جہاں $ا$ اس مستحق سلسلہ

$$ن (ن + ۱) \dots (ن + ۱۲) | \text{جب } ف = ۱۲ + ۱۴$$

$$+ \frac{ن (ن + ۱) \dots (ن + ۱۲)}{(۱۲ + ۱۴)} | \text{جب } ف = ۱۲ + ۱۴ + \dots$$

کے انتہائی مجموعہ کے مقیاس سے کم ہے۔ ن ایک مثبت عدد ہے جو تمام اعداد م، م، م، ... سے بڑا ہے۔ ف کی ہر مقررہ قیمت کے جواب میں منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ $|ب| > ص$ ، م کی تمام قیمتوں م، م، م، م، ... کے لیے جہاں ص کوئی اختیاری مثبت عدد ہے۔

ف (م) کی انتہا یعنی جم م ف + خر جب م ف کی انتہا جبکہ س کو لا انتہا بڑھا دیا جائے جم م ف + خر جب م ف ہے تب یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$۱ + م (خر جب ف) + \frac{م^۲}{۱} (خر جب ف) + \dots$$

$$+ \frac{م (م - ۱) \dots (م - ۲ - ۱) (خر جب ف)}{۱ - ۱۲}$$

$$+ \frac{م^۲ (م - ۲) \dots (م - ۲ - ۱) (خر جب ف)}{۱۲}$$

اور جم م ف + خر جب م ف میں بقدر اُس عدد کے فرق ہے جس کا مقیاس ص سے تجاوز نہیں کرتا۔ اب چونکہ ص اختیاری ہے یہ ثابت ہو چکا کہ $\pm \frac{۱}{۱۱}$ کے درمیان ف کی ہر قیمت کے لیے لا متناہی سلسلہ جم م ف + خر جب م ف کی طرف مستقر ہوتا ہے۔ آخر الامر فرض کرو کہ م منطق یا غیر منطق منفی عدد - م ہے۔ تب چونکہ ف (م) ف (م) = ف (۰) = ۱ اس لیے

اسی طرح کے ثبوت سے یہ معلوم ہوگا کہ یہ دو سلسلے

$$\text{جہم مذ} \setminus \text{جہم مذ} = 1 - \frac{م^2 - 1}{2} \text{ جب مذ} + \frac{م^2 - 1}{2} (1 - م^2) \text{ جب مذ} - \dots \dots (4)$$

$$\text{جب م مذ} \setminus \text{جہم مذ} = م \text{ جب مذ} - \frac{م^2 - 1}{2} \text{ جب مذ}$$

$$+ \frac{م^2 - 1}{2} (1 - م^2) \text{ جب مذ} - \dots \dots (8)$$

درست ہیں م کی تمام حقیقی قیمتوں کے لیے بشرطیکہ مذ $\pm \frac{1}{2}$ کے درمیان واقع ہو۔

سلسلہ (4) اور (8) درست نہیں جبکہ مذ $\pm \frac{1}{2}$ -

سلسلہ (4) صرف اس وقت ختم ہوتا ہے جبکہ م ایک طاق صحیح

عدد ہو اور سلسلہ (8) صرف اس وقت جبکہ م ایک جفت صحیح عدد ہو۔

۲۱۵ ————— اگر ہم جہم مذ + خر جب م مذ کے لیے وہ حاصل کریں جو

(5) اور (6) سے حاصل ہوتا ہے اور ی = خر جب مذ رکھیں تو چونکہ

(جہم مذ + خر جب مذ) = (1 + ی) + (1 + ی) = 2 + 2ی

$$(1 + ی) + (1 + ی) = 2 + 2ی = 1 + ی + \frac{م^2 - 1}{2} + \frac{م^2 - 1}{2} (1 - م^2) + \dots$$

$$+ \dots + \frac{م^2 - 1}{2} (1 - م^2) \dots (1 - م^{2s-2}) + \dots + 1$$

$$+ \frac{م^2 - 1}{2} (1 - م^2) \dots (1 - م^{2s-2}) + \dots + 1$$

اسی طرح (۷) اور (۸) سے

$$(1 + \sqrt{1 + y^2}) \sqrt{1 + y^2} = 1 + m + y + \frac{m^2 - 1}{2} y + \frac{m^2 - 1}{2} y^2 + \dots$$

$$+ \frac{m(m^2 - 1)(m^2 - 3)(m^2 - 5) \dots (m^2 - s^2)}{(s-1)!} +$$

$$+ \frac{(m^2 - 1)(m^2 - 3) \dots (m^2 - s^2)}{(s-1)!} + \dots$$

یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ یہ پھیلاؤ درست ہیں م کی تمام قیمتوں کے لیے بشرطیکہ ی کا مقیاس ایک سے کم ہو۔ بعض مصنفین ان پھیلاؤں کو بلا واسطہ راست حاصل کرتے ہیں اور پھر سلسلوں (۵)، (۶)، (۷)، (۸) کو اخذ کرتے ہیں۔ لیکن ان سلسلوں کو ابتدائی طریقوں سے دریافت کرنا آسان نہیں ہے الا آنکہ $y \sqrt{1 + y^2}$ کا مقیاس ایک سے کم ہو، ہمیں اس قید کے ساتھ جم م نہ، جب م نہ کے لیے یہ سلسلے حاصل ہونگے صرف اس وقت جبکہ نہ، $\pm \frac{1}{m}$ کے درمیان واقع ہو اور یہی قید سلسلوں (۱) اور (۲) کے لیے لازم ہے۔ تاہم تسلسل کے اصول کو استعمال کرنے سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اوپر کے پھیلاؤ، ان سلسلوں کے استدقاق کی وسعت | ی | > ۱ میں درست ہیں۔

۲۱۶ — اگر سلسلوں (۵) اور (۶) میں نہ کی بجائے $\frac{1}{m} - \pi$ نہ

رکھا جائے تو ہمیں ذیل کے سلسلے حاصل ہوتے ہیں جو فہ کی صفر اور π کے درمیان قیمتوں کے لیے درست ہیں :-

$$(9) \quad \text{جم م} \left(\frac{\pi}{4} - \text{فہ} \right) = 1 - \frac{\text{م}^2}{\pi^2} \text{جم فہ} + \frac{\text{م}^2 (\text{م}^2 - \pi^2)}{\pi^4} \text{جم فہ} - \dots$$

$$(10) \quad \text{جب م} \left(\frac{\pi}{4} - \text{فہ} \right) = \text{م جم فہ} - \frac{\text{م} (\text{م}^2 - \pi^2)}{\pi^2} \text{جم فہ} + \dots$$

اب ہم جم م فہ اور جب م فہ کے لیے سلسلے معلوم کر سکتے ہیں جبکہ فہ کی کوئی قسمیت ہو۔ اگر فہ = $\frac{\pi}{2}$ ہے تو فہ جہاں فہ $\pm \frac{\pi}{2}$ کے درمیان ہے اور ایک صحیح عدد ہے تو

$$\begin{aligned} \text{جم م فہ} &= \text{جم م} \frac{\pi}{2} - \text{جم م فہ} - \text{جب م} \frac{\pi}{2} \text{ جب م فہ} \\ \text{نیز جب فہ} &= (1 - \frac{\pi}{2}) \text{ جب فہ} - \text{پس اگر فہ} = \left(\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2} \right) \text{ کے درمیان واقع ہو} \\ \text{تو} \quad \text{جم م فہ} &= \text{جم م} \frac{\pi}{2} (1 - \frac{\pi}{2} \text{ جب فہ} + \dots) \end{aligned}$$

$$- \text{جب م} (1 - \frac{\pi}{2}) \pi \left[\text{م جب فہ} - \frac{\text{م} (\text{م}^2 - \pi^2)}{\pi^2} \text{جب فہ} + \dots \right]$$

(11)

اسی طرح

$$\text{جب م فہ} = \text{جب م} \frac{\pi}{2} (1 - \frac{\pi}{2} \text{ جب فہ} + \dots)$$

$$+ \text{جم م} (1 - \frac{\pi}{2}) \pi \left[\text{م جب فہ} - \frac{\text{م} (\text{م}^2 - \pi^2)}{\pi^2} \text{جب فہ} + \dots \right] \dots (12)$$

لے ضابطوں (11)، (12)، (13)، (14) کو ڈی - ایف - گرگوری نے
Cambridge Mathematical Journal vol. 1V میں شائع کیا تھا۔

$$\text{جم } \frac{1}{3} \pi \text{ لا} = 1 - \frac{\text{لا} (\text{لا} - 1)}{2} + \frac{\text{لا} (\text{لا} - 1)(\text{لا} - 2)}{6} - \dots + \dots (14)$$

$$\text{جب } \frac{1}{3} \pi = \frac{1}{3} \left[\text{لا} - \frac{\text{لا} (\text{لا} - 1)}{2} + \frac{\text{لا} (\text{لا} - 1)(\text{لا} - 2)}{6} - \dots \right] \quad (18)$$

(279) π کی قوتوں کے لیے مختلف سلسلے حاصل کیے جاسکتے ہیں اس کے لیے جم $\frac{1}{3} \pi$ لا جب $\frac{1}{3} \pi$ لا... کو لا کی قوتوں میں پھیلا جائے اور لا کی قوتوں کے سروں کو اوپر کے سلسلوں سے متناظروں کے سروں کے مساوی رکھا جائے؛ مثلاً (۱۶) سے لا کے سروں کو مساوی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{2}{3} \pi = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + 1 \right) \times \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{3} \right) \times \frac{1}{24} + \dots +$$

کسی زاویہ کے دائری ناپ پھیلاؤ اس کی جیب کی قوتوں میں

۲۱۸ — اگر پھیلاؤں (۵) اور (۶) میں جو جم م فہ جب م فہ کے لیے جب فہ کی قوتوں میں ہیں ہم ان سلسلوں کو م کی صعودی قوتوں کے سلسلوں کے طور پر مرتب کریں جو ہم دفعہ ۲۱۰ کی رو سے کر سکتے ہیں کیونکہ سلسلے

$$1 + \frac{2}{3} \text{ جب } 2 \text{ فہ} + \frac{2(2+1)}{6} \text{ جب } 3 \text{ فہ} + \dots$$

$$م \text{ جب } 2 \text{ فہ} + \frac{م(2+1)}{3} \text{ جب } 3 \text{ فہ} + \dots$$

مستحق ہیں تو ہم م کی مختلف قوتوں کے سروں کو حجم منہ ہم ف کے پھیلاؤں کے (جو فہ کی قوتوں میں ہوں) تناظر سروں کے مساوی رکھ سکتے ہیں؛ مثلاً (۴) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$فہ = جیب فہ + \frac{1}{۲} + \frac{جیب^۳ فہ}{۳} + \frac{۳ \times ۱}{۴ \times ۲} \times \frac{جیب^۵ فہ}{۵} + \dots$$

$$+ \frac{جیب^{۱۲} فہ}{۱ + ۱۲} \frac{(۱-۱۲) \dots \times ۵ \times ۳ \times ۱}{۱۲ \dots ۶ \times ۳ \times ۲} + \dots (۱۹)$$

اور (۵) سے

$$فہ^۲ = جیب^۲ فہ + \frac{۲}{۳} + \frac{جیب^۴ فہ}{۵ \times ۳} + \frac{۴ \times ۲}{۵ \times ۳} \times \frac{جیب^۶ فہ}{۶} + \dots$$

$$+ \frac{جیب^{۱۲} فہ}{۱} \frac{(۲-۱۲) \dots \times ۴ \times ۲}{(۱-۱۲) \dots \times ۵ \times ۳} + \dots (۲۰)$$

یہ درست ہیں $\pm \frac{۱}{۲} \pi$ کے درمیان فہ کی قیمتوں کے لیے یا جبکہ فہ $\neq \pm \frac{۱}{۲} \pi$ - ہم ان کو شکل ذیل میں بھی لکھ سکتے ہیں

$$جیب^۱ لا = لا + \frac{۱}{۲} + \frac{لا^۳}{۳} + \frac{۳ \times ۱}{۴ \times ۲} \frac{لا^۵}{۵} + \dots (۱۹)$$

$$(جیب^۲ لا) = لا^۲ + \frac{۲}{۳} + \frac{لا^۴}{۵} + \frac{۴ \times ۲}{۵ \times ۳} \frac{لا^۶}{۶} + \dots (۲۰)$$

جہاں جیب^۱ لا دونوں مساواتوں میں وہ مثبت یا منفی عادی زاویہ ہے جس کی جیب لا کے مساوی ہے۔

سلسلہ (۱۹) کونیوٹن نے دریافت کیا تھا؛ طریق بہت کوشی کا

(280)

۲۱۹۔۔۔۔۔ سلسلہ (۲۰) میں لا کو لا + ۵ میں بدلنے اور مساوات کی جانبیں میں ۵ کے سمروں کو مساوی رکھنے سے (یہ عمل لا کے لحاظ سے تفریق کرنے کے مماثل ہے جو دفعات ۲۱۰ اور ۲۰۸ کے مسئلوں کو استعمال کرنے سے جائز قرار دیا جاسکتا ہے) سلسلہ حاصل ہوتا ہے

$$(21) \quad \dots + \frac{2 \times 2}{5 \times 3} + \frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{1-1}$$

یا لا کی بجائے جب ۵ نہ رکھنے سے

$$(22) \quad \dots + \frac{2 \times 2}{5 \times 3} + \frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{1-1}$$

یا ۲ نہ = طہ لکھنے سے

$$\dots + \frac{2 \times 1}{5 \times 3} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{1}{1-1}$$

جس کو لکھ سکتے ہیں

$$(23) \quad \dots + \frac{2 \times 1}{5 \times 3} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{1}{1-1}$$

نیز (۲۲) میں مس نہ = مارکھنے سے سلسلہ حاصل ہوتا ہے

$$\left\{ \dots + \frac{1}{2(2+1)} \frac{2 \times 2}{5 \times 3} + \frac{1}{2+1} \frac{2}{3} + 1 \right\} \frac{1}{2+1} = 1$$

(۲۴) ..

جیوب اور جیوب التمام کی قوتوں کو ضعیفی زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام میں ان کرنا

۲۲۰۔ — اب ہم یہ دیکھنے کے لئے کہ شکل ۲۲۰ جہ ۲ کے ساتھ
کس طرح آسانی کے ساتھ ۲ کے ضیعفوں کی جیوب یا جیوب التمام میں
بیان کیا جاسکتے ہیں۔ ہم اول تو اس صورت تک پہنچیں کہ جیوب التمام
رکھینگے جس میں m اور n مثبت صحیح اعداد ہوں۔ فرض کرو کہ y
= $2x + x^2$ جب $x = 1$ = $2x + x^2$ پس $2x + x^2 = y + 1$
اور $2x + x^2 = y + 1$ اور

$$(2x + x^2) = (y + 1) \quad (1)$$

اگر ہم بائیں طرف کے جملہ کو y اور x کی قوتوں میں پھیلائیں تو
نتیجہ کو ایک ایسے سلسلہ میں مرتب کیا جاسکتا ہے جس کی رقبہیں
ان دو شکلوں $(y + 1)$ ، $(y - 1)$ کے $(y - 1)$ سے ایک سے مانند
ہونگی یہاں تک ایک مغایرت ہے جو m ، n اور m پر منحصر ہے۔
اب $y = 2x + x^2$ جب $x = 1$ = $2x + x^2$ پس $2x + x^2 = y + 1$
جیوب مسماؤں کو موثر۔ اس لیے

$$(y + 1) = 2x + x^2$$

$$(y - 1) = 2x - x^2$$

اس طرح ہمیں جنم ط جب ط کے لیے مطلوبہ جملہ ط کے ضیعفوں کی جیوب یا جیوب التیانم کے ایک سلسلہ میں حاصل ہو چکا۔

مثال

(281)

جب ط جمع ط کو ط کے ضیعفوں کے سلسلہ میں بیان کرو۔
ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$(۱ \text{ ز جب ط}) = (۲ \text{ جم ط}) = (۱ - ۱) = (۱ + ۱) = (۱ - ۱) = (۱ + ۱) = (۱ - ۱) = (۱ + ۱)$$

$$= (۱ - ۱) = (۱ + ۱) = (۱ - ۱) = (۱ + ۱) = (۱ - ۱) = (۱ + ۱)$$

$$= (۱ - ۱) = (۱ + ۱) = (۱ - ۱) = (۱ + ۱) = (۱ - ۱) = (۱ + ۱)$$

جو ۲ ز (جب ۱ ط + جب ۱ ط - جب ۱ ط + جب ۱ ط + جب ۱ ط + جب ۱ ط) کے مساوی ہے

$$= (۱ - ۱) = (۱ + ۱) = (۱ - ۱) = (۱ + ۱) = (۱ - ۱) = (۱ + ۱)$$

اس عمل کو اس طرح بھی مرتب کر سکتے ہیں :-

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 7 \text{ (جم ط)}$$

$$1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 = -7 \text{ (جم ط)}$$

$$1 + 1 + 1 + 1 - 1 - 1 - 1 = 2 \text{ (جم ط)}$$

دفعہ ۲۱۲ کی رو سے

$$۲ (± \text{جم } \frac{1}{4} \text{ ذہ}) \text{ جم م } (\frac{1}{4} \text{ ذہ} - \text{ک } \pi)$$

$$= ۱ + \text{م جم ذہ} + \frac{\text{م} (۱ - \text{م})}{۲} \text{ جم } ۲ \text{ ذہ} + \frac{\text{م} (۱ - \text{م}) (۲ - \text{م})}{۳} \text{ جم } ۳ \text{ ذہ} + \dots$$

$$۲ (± \text{جم } \frac{1}{4} \text{ ذہ}) \text{ جب م } (\frac{1}{4} \text{ ذہ} - \text{ک } \pi)$$

$$= \text{م جب ذہ} + \frac{\text{م} (۱ - \text{م})}{۲} \text{ جب } ۲ \text{ ذہ} + \frac{\text{م} (۱ - \text{م}) (۲ - \text{م})}{۳} \text{ جب } ۳ \text{ ذہ} + \dots$$

جہاں ذہ (۲ ک - ۱) π اور (۲ ک + ۱) π کے درمیان واقع ہے سلسلہ اول

کو ہم م سے اور سلسلہ دوم کو جب م سے ضرب دیکر جمع کرنے سے

$$۲ (± \text{جم } \frac{1}{4} \text{ ذہ}) \text{ جم م } (\text{عہ} - \frac{1}{4} \text{ م ذہ} + \text{م ک } \pi) = \text{جم م } (\text{عہ} - \text{عہ} \text{ ذہ})$$

$$+ \frac{\text{م} (۱ - \text{م})}{۲} \text{ جم } (۲ - \text{عہ} \text{ ذہ}) + \frac{\text{م} (۱ - \text{م}) (۲ - \text{م})}{۳} \text{ جم } (۳ - \text{عہ} \text{ ذہ}) + \dots$$

جہاں ذہ (۲ ک - ۱) π اور (۲ ک + ۱) π کے درمیان واقع ہے۔ فرض کرو کہ ذہ = ۲ ط

تب اگر ک جفت (= ۲ س) ہو تو

$$۲ \text{ جم } ط \text{ جم م } (\text{عہ} - \text{م ط} + ۲ م س \pi)$$

$$= \text{جم م } + \text{م جم } (۲ ط - \text{عہ}) + \frac{\text{م} (۱ - \text{م})}{۲} \text{ جم } (۲ ط - \text{عہ}) + \dots$$

جہاں ط ۲ س π - ۱ اور ۲ س π + ۱ کے درمیان واقع ہے؛

لیکن اگر ک طاق (= ۲ س + ۱) ہو تو

$$= \text{جیب } m \text{ طہ} - m \text{ جیب } (m-2) \text{ طہ} + \frac{m(m-1)}{2} \text{ جیب } (m-2) \text{ طہ} \dots (۲۹)$$

جہاں طہ ۲ س ۲ اور $\pi(1+2)$ کے درمیان واقع ہے نیز
 $m(-\text{جیب طہ}) + m \text{ جیب } (m-2) \text{ طہ} + \frac{m(m-1)}{2} \text{ جیب } (m-2) \text{ طہ}$

$$= \text{جیب } m \text{ طہ} - m \text{ جیب } (m-2) \text{ طہ} + \frac{m(m-1)}{2} \text{ جیب } (m-2) \text{ طہ} \dots (۳۰)$$

جہاں طہ ۲ س ۲ اور $\pi(1+2)$ کے درمیان واقع ہے۔
 بالآخر کیونکہ $m \text{ طہ} = \frac{1}{4} \pi$ اور طہ کو طہ $-\frac{1}{4} \pi$ میں تبدیل کر، تو
 $m \text{ جیب طہ} + m \text{ جیب } (m-2) \text{ طہ} + \frac{m(m-1)}{2} \text{ جیب } (m-2) \text{ طہ}$

$$= \text{جیب } m \text{ طہ} - m \text{ جیب } (m-2) \text{ طہ} + \frac{m(m-1)}{2} \text{ جیب } (m-2) \text{ طہ} \dots (۳۱)$$

جہاں طہ ۲ س ۲ اور $\pi(1+2)$ کے درمیان واقع ہے، نیز
 $m(-\text{جیب طہ}) + m \text{ جیب } (m-2) \text{ طہ} + \frac{m(m-1)}{2} \text{ جیب } (m-2) \text{ طہ}$

$$= \text{جیب } m \text{ طہ} - m \text{ جیب } (m-2) \text{ طہ} + \frac{m(m-1)}{2} \text{ جیب } (m-2) \text{ طہ} \dots (۳۲)$$

جہاں طہ ۲ س ۲ اور $\pi(1+2)$ کے درمیان واقع ہے۔
 یہ سلسلے طہ کی تمام قیمتوں کے لئے مستحق ہیں اگر م مثبت ہو۔ اگر م
 صفر اور -۱ کے درمیان واقع ہے تو طہ کی انتہائی قیمتیں $\pi \pm \frac{1}{4} \pi$ یا
 π س ۲ اور $\pi(1+2)$ خاص کر توجہ کی جائیں کیونکہ طہ کی ان قیمتوں
 کے لئے سلسلے مستحق نہیں ہوتے۔

انجیل نے ثنائی مسئلہ پر اپنے مقالہ میں اس دفعہ کے آٹھ ضابطوں کو بیان
 کیا تھا لیکن معلوم ہوتا ہے کہ بعد کے مصنفین نے ان پر نظر نہیں ڈالی۔

(284)

پندرہواں باب

قوت نمائی تفاعل۔ لوکاتم

قوت نمائی سلسلہ

۲۲۳۔ لامتناہی سلسلہ

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

پر غور کرو جسکا انتہائی مجموعہ ہم ق (ی) سے تعبیر کریں گے جہاں ی
ملف عدد لا + خ ما ہے۔ اگر ی کا مقیاس ر ہو تو سلسلہ

$$1 + r + \frac{r^2}{2} + \dots$$

ر کی تمام قیمتوں کے لئے مستحق ہے کیونکہ (ن + ۱) ویں رقم کی نسبت
ن ویں رقم کے ساتھ $\frac{1}{2}$ ہے جو مسلسل گھٹتی ہے جیسے ن بڑھتا ہے۔
پس ابتدا کی سلسلہ ی سبھی تمام قیمتوں کے لئے مطلقاً مستحق ہے۔
اس سلسلہ کو قوت نمائی سلسلہ کہتے ہیں اور یہ کسی دائرہ میں جسکا مرکز ی =
پر ہو یکساں طور پر مستحق ہوتا ہے۔

۲۲۴۔ ی اور ی کم کے جواب میں جو دو قوت نمائی سلسلے ہیں انکو

باہم ضرب دیا جائے تو ی اور ی میں م دیں درجے کی رقم ہے

$$\frac{y_1}{m} + \frac{y_2}{m-1} + \frac{y_3}{m-2} + \dots + \frac{y_{m-1}}{2} + \frac{y_m}{1}$$

جو سلسلہ ثنائی کی رو سے $\frac{1}{m} (y_1 + y_2 + \dots + y_m)$ کے مساوی ہے کیونکہ
م مثبت صحیح عدد ہے۔ اس لئے متذکرہ صدر دو سلسلہوں کے حاصل ضرب
کے لئے یہ سلسلہ

$$1 + (y_1 + y_2) + \frac{(y_1 + y_2)^2}{2} + \dots + \frac{(y_1 + y_2)^{m-1}}{(m-1)!}$$

حاصل ہوتا ہے جو $(y_1 + y_2)$ کی طرف بستہ ہو رہا ہے۔ اب
دفعہ ۲۰۹ میں ثابت کردہ مسئلہ سے چونکہ یہ قوت کافی سلسلے دونوں
مطلقاً مستحق ہیں انکے مجموعوں کا حاصل ضرب بند بنانا حاصل ضرب
سلسلہ کے مجموعہ کے مساوی ہے اس لئے

$$Q(y_1) + Q(y_2) = Q(y_1 + y_2) \dots \dots \dots (1)$$

اس بنیادی مساوات سے ہم فوراً آخذ کر رہے ہیں

$$Q(y_1) \times Q(y_2) \times \dots \times Q(y_n) = Q(y_1 + y_2 + \dots + y_n)$$

$$\text{اور اسلئے } \{Q(y_1), Q(y_2), \dots, Q(y_n)\} = Q(y_1 + y_2 + \dots + y_n) \dots \dots \dots (2)$$

یہاں n کوئی مثبت صحیح عدد ہے۔

۲۲۵۔ اگر مساوات (۲) میں $y_1 = 1$ رکھا جائے تو

$$Q(n) = \{Q(1)\}^n$$

قو^{لام} کی انتہا ہے جبکہ صحیح عدد م لا انتہا بڑھا دیا جائے؛ یہ معلوم ہے کہ یہ انتہا موجود ہوتی ہے اور اسکی قیمت منطق عددوں کے کسی مخصوص تواتر پر جوڑے ہوئے غیر منطق عدد لا کی تعریف کے لئے استعمال ہوا ہو منحصر نہیں ہوتی۔ چونکہ ق (لا) ایک مسلسل تفاعل ہے یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ ق (لا) = ق (لام) کی انتہا ہے جبکہ م کو لا انتہا بڑھا دیا جائے۔ پس چونکہ قو^{لام} = ق (لام) م کی ہر قیمت کے لئے اسلئے قو^{لام} = ق (لا) جبکہ قو^{لام} اپنی صدر قیمت اختیار کرے۔
ثباتاً اگر لا کوئی حقیقی عدد ہو تو چونکہ
ق (لا) ق (لا) = ق (لام) = ق (لام) = ۱

اسلئے ق (لا) = $\frac{1}{قو^{لام}}$ = قو^{لام} جہاں قو^{لام} اپنی صدر قیمتیں لکھتے ہیں
اس طرح ہم نے ثابت کر دیا کہ کسی حقیقی عدد لا کیلئے سلسلہ
$$۱ + لا + \frac{لا^۲}{۲!} + \dots$$

(286)

کا انتہائی مجموعہ، قو^{لام} کی صدر قیمت ہے جہاں قو کی تعریف ق (لام) = قو سے ہوئی ہے۔ یہ قوت نمائی سلسلہ ایک حقیقی قوت نما کے لئے ہے۔
۲۲۶۔ اب ہم بتائیں گے کہ خواہی کوئی ملحق عدد ہو عدد ق (ی) جو ی کی قوتوں میں قوت نمائی سلسلہ کا انتہائی مجموعہ ہے (۱ + ی) م کی انتہائی قیمت کے مساوی ہے جبکہ م کو لا انتہا بڑھا دیا جائے

جہاں م کوئی مثبت صحیح عدد ہے۔ یہیں حاصل ہوتا ہے

$$(1 + \frac{y}{m}) = 1 + \frac{y}{m} + \frac{y^2}{m^2} + \frac{y^3}{m^3} + \dots + \frac{y^s}{m^s} + \frac{y^{s+1}}{m^{s+1}} + \dots$$

..... +

$$= 1 + y + \frac{y^2}{m} + \dots + \frac{y^s}{m^s} + \frac{y^{s+1}}{m^{s+1}} + \dots + \frac{y^{s+1}}{m^{s+1}} + \dots$$

اب اگر 'ب' ج '.... کوئی مثبت صحیح عدد ہوں ایک سے کم تو

$$(1 - 1)(1 - 1) < (1 - 1)(1 - 1) < (1 - 1)(1 - 1) < \dots < (1 - 1)(1 - 1) < (1 - 1)(1 - 1) < \dots$$

پس $(1 - 1)(1 - 1) < (1 - 1)(1 - 1) < \dots < (1 - 1)(1 - 1) < (1 - 1)(1 - 1) < \dots$ اور $1 > \dots > 1$ اور (فرض کرو) $1 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ جہاں طہ ' صفر اور ایک کے درمیان کوئی عدد ہے۔ پس

$$(1 - 1)(1 - 1) < (1 - 1)(1 - 1) < \dots < (1 - 1)(1 - 1) < (1 - 1)(1 - 1) < \dots$$

$$1 - 1 = \frac{(1 + s)y}{m^2}$$

جہاں طہ ' صفر اور ایک کے درمیان کوئی عدد ہے۔ اب

$$(1 + \frac{y}{m}) = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \dots + \frac{y^s}{s} + \dots + \frac{y^m}{m} + \frac{y^b}{b}$$

جہاں ب،

$$- \frac{y^2}{m} \{ 1 + \frac{y}{1} \times \frac{1}{m} + \frac{y^2}{2} \times \frac{1}{m} + \dots + \frac{y^s}{s} \times \frac{1}{m} + \dots + \frac{y^m}{m} \}$$

$$+ \frac{y^{2-m}}{2-m} \times \frac{1}{m}$$

کو تعبیر کرتا ہے۔

خطوط و مدائی کے اندرونی سلسلہ کے مجموعے کا مقياس مستحق سلسلہ

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m}$$

(287) کے انتہائی مجموعے سے کم ہے؛ اور جب 'م' کو لا انتہا بڑھا دیا جاتا ہے تو $\frac{y^2}{m}$ صفر کی طرف مستحق ہوتا ہے۔ اسلئے $(1 + \frac{y}{m})$ کی انتہائی قیمت جبکہ 'م' کو لا انتہا بڑھا دیا جائے متفاعل 'ق' (ی) ہے۔ عدد ہو $(1 + \frac{1}{m})$ کی انتہائی قیمت ہے۔

۲۲۷ - دفعہ سابق میں ثابت کردہ مسئلہ سے 'ق' (ی) کی قیمت معلوم کرنیکا طریقہ حاصل ہوتا ہے جہاں می = لا + خرما جو ایک ملف عدد ہے۔ اس مسئلہ سے

$$ق (لا + خرما) = نہا (1 + \frac{لا + خرما}{m})$$

$$\text{رکھو } ۱ + \frac{لا}{م} = \text{غہ جم نہ} \frac{لا}{م} = \text{غہ جب نہ تو}$$

$$(۱ + \frac{لا + خ ما}{م}) = \text{غہ} (جم نہ + خ جب نہ) = \text{غہ} (جم نہ + خ جب نہ)$$

حسب سلسلہ دیکھو اُپر۔

نیز

$$\text{غہ} = \sqrt{\frac{لا^۲ + ما^۲}{م^۲} + \frac{لا}{م} + ۱}$$

اور نہ، مس' $\frac{لا}{م}$ کی صدر قیمت ہے۔ غہ کی انتہائی قیمت

$$(۱ + \frac{لا}{م}) \left\{ \frac{لا}{م(لا + م)} + ۱ \right\}^{\frac{۱}{۲}}$$

کی انتہائی قیمت ہے

$$\text{ق (لا)} \left\{ \frac{لا}{م(لا + م)} + ۱ \right\}^{\frac{۱}{۲}}$$

کی انتہائی قیمت۔ اب فرض کرو کہ ر، م + لا، م سے کم ایک ثابت مثبت عدد ہے، تب

$$\left\{ \frac{لا}{م(لا + م)} + ۱ \right\}^{\frac{۱}{۲}}$$

کی انتہا، ایک اور

$$\left\{ \frac{لا}{م} + ۱ \right\}^{\frac{۱}{۲}}$$

کے درمیان واقع ہے یا ایک اور $\frac{لا}{م}$ کے درمیان۔ اب چونکہ

شرط $\{م + لا\}$ کے تحت رک کو اس قدر بڑا بنایا جاسکتا ہے
جس قدر ہم چاہیں اسلئے

$$\left\{ 1 + \frac{م^۲}{(م + لا)^۲} \right\} م^{\frac{۱}{۲}}$$

کی انتہا ایک ہے اور اسلئے غم کی انتہا ق (لا) ہے جو فو کی
صدر قیمت ہے۔ م سنا $\frac{م}{لا}$ کی انتہائی قیمت $\frac{م}{لا}$ کی
انتہائی قیمت ہے جو ما ہے، پس

$$\text{نہا} (1 + \frac{لا + خ}{م}) = فو (جم + خ جب ما)$$

جہاں فو اپنی صدر قیمت رکھتا ہے، اس طرح
ق (لا + خ ما) = فو (جم + خ جب ما)

(288)

دائری تفاعلوں کے پھیلاؤ

۲۳۸۔ اگر ہم دفعہ سابق کے آخری نتیجہ میں لا = رکھیں تو

$$ق (خ ما) = جم + خ جب ما$$

$$\text{اسلئے } جم + خ جب ما = 1 + خ ما - \frac{م^۲}{۷} - \frac{م^۲}{۳} + \dots$$

یا اس مساوات کی طرفین میں خیالی اور حقیقی حصوں کو مساوی رکھنے

ایک تواتر ہے جسکی انتہا ی ہے۔ ہم نو^۱ سے بالعموم ق (دی) کی صدر قیمت مراد لینگے۔

اگر می حقیقی عدد نہ ہو تو نو^۱ کی کوئی تعریف نا حال

نہیں دی گئی ہے اور یہ اس حد تک بے معنی رہے۔

لیکن رمز نو^۱ یا نو^۱ + خ^۱ کو تعریف کے ذریعہ معنی پہنا نا سہولت

پیدا کرتا ہے۔ ہم نو^۱ کو جو معنی پہنائینگے اس کا صرف ایک جزو یا

بیان کریں گے یعنی صرف اسکی تعریف کریں گے جسکو نو^۱ کی صدر قیمت کہا جاسکتا

ہے، اور پھر زیادہ عام تعریف کی طرف رجوع ہونگے۔

تفاعل نو^۱ کی صدر قیمت کی تعریف ہم یہ کریں گے کہ (289)

وہ تفاعل ق (دی) ہے یا (جسکے معنی وہی ہیں) تفاعل (۱ + م^۱)

کی انتہا ہے جبکہ م کو مثبت صحیح قیمتوں میں سے لا انتہا

بڑھا دیا جائے۔

یہ توجہ طلب ہے کہ نو^۱ + خ^۱ کی صدر قیمت کی یہ تعریف

ایسی ہے کہ یہ تفاعل قوتوں کے معمولی قانون کو پورا کرتا ہے یعنی

$$\begin{array}{c} \text{لا} + \text{خ} \text{ م} \quad \text{لا} + \text{م} + \text{خ} \text{ م} \quad \text{لا} + \text{م} + \text{لا} + \text{م} + \text{خ} \text{ م} + \text{لا} + \text{م} \\ \text{نو} \quad \text{نو} \quad \text{نو} = \text{نو} \end{array}$$

لہ تعریف کی یہ آخری شکل Schlömilch کی مجوزہ ہے دیکھو

یہ دفعہ ۲۲۳ کے مسئلہ (۱) سے مستنت ہوتا ہے۔ ہم بالعموم رمز نو سے جب کبھی یہ استعمال ہوا اسکی صدر قیمت ق (ی) حسب تعریف بالا، مراد لینے۔

۲۳۰۔ رمز نو + خ ما کے مفہوم سے متعلق اس قرار داد کے بعد دفعہ ۲۲۴ کی رو سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{نو} + \text{خ ما} = \text{نو} (\text{جم} + \text{ما} + \text{خ جب} + \text{ما})$$

اور لا = رکھنے سے $\text{نو} + \text{خ ما} = \text{جم} + \text{ما} + \text{خ جب} + \text{ما}$
مسئلہ (۵) کو اب لکھا جاسکتا ہے

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{جم} + \text{ما} = \frac{1}{4} (\text{نو} + \text{خ ما}) \\ \text{جب} + \text{ما} = \frac{1}{4} (\text{نو} - \text{خ ما}) \end{array} \right. \dots \dots (۶)$$

انکو جیب التمام اور جیب کی قوت نامی قیمتیں کہتے ہیں۔ طالب علم

کو یہ دیکھ لینا چاہئے کہ مسئلہ (۶) مساواتوں (۳) اور (۴) کو رمزی طریقہ میں لکھنے کے سوا اور کچھ نہیں ہے جنکو شکل (۵) میں بھی لکھا جا چکا ہے۔ رمز نو کو رمز ق (خ ما) کی بجائے لکھنے میں صرف یہ فائدہ ہے کہ

قبل الذکر سے ضرب کا وہ قانون جو دفعہ ۲۲۴ میں دیا گیا ہے بہت جلد ذہن میں آجاتا ہے۔ مسئلہ (۱) کی شکل وہی ہے جو حقیقی قوت ناموں کو ضرب دینے کے لئے ہے؛ اس لئے قوت ناموں کو خیالی قوتوں کے ساتھ لینے میں سہولت نظر آتی ہے جنکے لئے ضرب کا قانون وہی ہو گا جو

(۱) سے بیان ہوتا ہے۔ ۲۳۰۔ تفاعل نو کی تعریف، ی کی کسی ملحق قیمت کھیلے

اد پر یہ کی گئی ہے کہ وہ قوت نامی سلسلہ

$$..... + \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} + y + 1$$

کا انتہائی مجموعہ ہے اسلئے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$قوت = 1 + y + \frac{y^2}{2} + + \frac{y^s}{s} + \frac{y^{s+1}}{s+1}$$

$$..... + \frac{ay^{s+1}}{s+1} + \frac{ay^{s+2}}{s+2}$$

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$\left\{ + \frac{ay^3}{3} + \frac{ay^2}{2} + 1 + ay \right\} \frac{ay^{s+1}}{s+1} > ab \quad (280)$$

$$یا \quad \frac{ay^{s+1}}{s+1} > قوت$$

اگر $ay > 1$ تو ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\left\{ + ay + 1 + ay + 1 + ay \right\} \frac{ay^{s+1}}{s+1} > ab$$

$$یا \quad ab > \frac{ay^{s+1}}{s+1} - \frac{1}{ay}$$

اس طرح ہم دیکھا چکے کہ

$$قو^1 = 1 + ی + \frac{قو^2}{2} + \dots + \frac{قو^s}{s} + (1 + عس)$$

جہاں $اعس > \frac{ای ۱}{1 + س}$ قو^۱ اور اسلئے $اع$ صفر کی طرف
 مستند ہوتا ہے جبکہ $ای$ صفر کی طرف مستند ہو۔ خاص صورت
 میں $س = ۱$ لینے سے مسئلہ قو^۱ = $۱ + ی$ حاصل ہوتا ہے
 جہاں $اع > \frac{۱}{۲}$ $ای$ قو^۱ اور اسلئے $اع$ صفر کی طرف
 مستند ہوتا ہے جبکہ $ای$ صفر کی طرف مستند ہو۔ ہم اس نتیجہ کو

شکل

$$ہی ۱ = \frac{قو^1 - ۱}{ی}$$

میں بیان کر سکتے ہیں۔

اس آخری نتیجہ سے حاصل ہوتا ہے ہیا = $\frac{قو^{۱+ع} - قو^۱}{ع}$ اور

اس لئے تفاعل قو^۱ ایسا ہے کہ وہ خود اپنے تفرقی سر کے مساوی ہے۔
 علم تحلیل میں تفاعل قو^۱ کی ابتدا اس تعریف کے ساتھ کیا جاسکتی ہے
 کہ وہ ایسا تفاعل $ع$ ہے جو حسب ذیل شرطوں کو پورا کرتا ہے :-

$$\frac{فر ع}{قو^1} = ع^1 ی کی ہر قیمت کے لئے$$

$$ع = ۱ جبکہ ی = ۰$$

اور

اگر یہ مان لیا جائے کہ سلسلہ $۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + \dots$ موجود ہے جو ی کی ہر قیمت کے لئے مستحق ہے اور ایسا ہے کہ اس کے مشتق سلسلہ $۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + \dots$ میں بھی وہی خاصیت ہے تو دونوں سلسلے کسی محدود نصف قطر کے دائرہ میں یکساں طور پر مستحق ہونے ہیں۔ پہلے سلسلہ کے مجموعہ کو Σ سے تعبیر کیا جائے تو دوسرے سلسلہ کا مجموعہ ایک معلومہ سلسلہ کی رو سے $\frac{\Sigma}{2}$ ہے۔ اگر اب $\frac{\Sigma}{2} = \Sigma$

تو ہم متناظر قوتوں کے سروں کو مساوی رکھ سکتے ہیں، اس طرح $۱ = ۱ = ۱ = ۱ = ۱ = ۱ = \dots$ اور اسلئے $۱ = ۱ = ۱ = ۱ = ۱ = ۱ = \dots$ ہیں۔ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$\Sigma = ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + \dots + \frac{\Sigma}{2} + \dots + \frac{\Sigma}{2} + \dots$ اور یہ آسانی سے معلوم ہوتا ہے کہ یہ سلسلہ یکساں استدقاق کی سلسلہ شرطوں کو پورا کرتا ہے اس لئے اس سلسلہ کا مجموعہ شرط $\frac{\Sigma}{2} = \Sigma$ کو پورا کرتا ہے۔ اگر $\Sigma = ۱$ جبکہ $\Sigma = ۱$ ۔ تو ہمیں حاصل ہونا چاہئے $۱ = ۱ = ۱ = ۱ = ۱ = ۱ = \dots$ اس طرح ہم سلسلہ

$$۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + \dots + \frac{\Sigma}{2} + \dots + \frac{\Sigma}{2} + \dots$$

پر پہنچتے ہیں جسکی تحقیق سے ہم نے اس باب کے مضمون کی ابتدا کی تھی۔

قوت نما اور دائری تفاعلوں کی دوریت

(291)

۲۳۱۔ ہم یہ دکھا چکے ہیں کہ $Q(1) = (1 + 1 + 1 + \dots)$ اب چونکہ ۱ میں ۲ ک جمع کرنے سے جہاں ک مثبت یا منفی

صحیح عدد ہے جم ما اور جب ما نہیں بدلتے اس لئے ق (ی) = ق (ی) + ۲ (خ ک π) یعنی ق (ی) دوری (periodic) تفاعل ہے

جسکا دور ۲ خ π ہے۔ چونکہ قوت $u + 2k$ خ π اسلئے قوت نامی تفاعل قوت دوری ہے اور اسکا خیالی دور ۲ خ π ہے، نیز چونکہ قوت $u + 2k$ خ π اس لئے قوت u ، ی کا دوری تفاعل ہے جسکا حقیقی دور ۲ π ہے۔

پس یہ معلوم ہوا کہ قوت u میں سے ہر ایک تفاعل یک

دوری ہے، پہلے تفاعل کا خیالی دور ۲ خ π ہے اور دوسرے تفاعل کا حقیقی دور ۲ π ۔ وہ طالب علم جو ناقصی تفاعلوں کے مبادیات سے واقف ہے جان لے گا کہ ایسے تفاعلوں کا بنانا ممکن ہے جنکے دور حقیقی اور خیالی دونوں ہوں، ایسے تفاعلوں کو دو دوری کہتے ہیں۔ ۲۳۲۔ دائری تفاعل جم ما، جب ما اولاً ہندسی تعریف کے ذریعہ پیش کئے گئے تھے اور ہم نے اس کتاب کے ابتدائی حصہ میں انکو ایک زاویہ مقدار کے تفاعلوں کے طور پر استعمال کیا ہے جہاں یہ زاویہ مقدار دائری ناپ میں محسوب کی گئی تھی۔ لیکن ہم اس زاویہ مقدار کے تصور کو خارج کر سکتے ہیں اور انکو (جم ما) واجب ماکو ایک متغیر کے تفاعل سمجھ سکتے ہیں، بلاشبہ متغیر کی کوئی قیمت اس مقدار کو ایک زاویہ کے دائری ناپ میں پیمائش کرتی ہے جسکے ذریعہ انکی تعریف ہوئی تھی۔ علم التحلیل میں ان تفاعلوں کی بڑی اہمیت انکی اس خاصیت کی وجہ سے ہے کہ وہ یک دوری تفاعل ہیں۔ فوراً اور دیگر علماء ریاضی نے یہ بتایا ہے کہ وہ تمام تفاعل جو ایک حقیقی دور رکھتے ہیں ان دائری تفاعلوں کے ایک

سلسلہ کے ذریعہ بعض حدود کے تحت تعبیر کئے جاسکتے ہیں لیکن علمِ تحلیل کی اس اہم شاخ سے بحث کرنا اس کتاب کے مقصد سے خارج ہے۔

دائری تفاعلوں کی تحلیلی تعریف

۲۳۳۔ دائری تفاعلوں کی خالص تحلیلی تعریفیں دینا اور ان تعریفوں سے انکی بنیادی تحلیلی خاصیتیں اخذ کرنا ممکن ہے تاکہ دائری تفاعلوں کا احصاء ایسی بنیاد پر قائم ہو سکے جو تمام ہندی تعلقات سے آزاد ہو۔ ان تعریفوں میں ملتف عدد کے دائری تفاعل بھی آجائینگے۔
ہم ی کی جیب التمام اور جیب کی تعریف ان مساواتوں

(292)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{جم ی} = \frac{1}{4} \{ \text{ق (خ ی)} + \text{ق (- خ ی)} \} \\ \text{جب ی} = \frac{1}{4} \{ \text{ق (خ ی)} - \text{ق (- خ ی)} \} \end{array} \right. \dots (4)$$

کے ذریعہ کر سکتے ہیں جہاں ق (ی) سے سلسلہ + ی + $\frac{1}{4}$ ی + ... کا

انتہائی مجموعہ تعبیر ہوتا ہے۔ یہ الفاظ دیگر ہم جم ی کی تعریف سلسلہ

$$1 - \frac{1}{2} \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \frac{1}{4} - \dots \text{ کے انتہائی مجموعہ کے ذریعہ اور جب ی}$$

$$\text{کی تعریف سلسلہ ی} - \frac{1}{3} \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \frac{1}{4} - \dots \text{ کے انتہائی مجموعہ}$$

کے ذریعہ کرتے ہیں۔ پس ہم ان کو جیب التمام اور جیب کی عام تعریف سمجھ سکتے ہیں، اس میں ملتف دلیل کی صورت شامل ہے جو قابلِ ذکر ہندی تعریفات میں شامل نہ تھی۔

ی کی حقیقی قیمتوں کے لئے تفاعلات جم ی اور جب ی

ہندسی تعریفات کے مطابق ہیں کیونکہ وہ سلسلے جنکو یہ تعبیر کرتے ہیں ان سلسلوں کے حامل ہیں جو دفعہ ۹۹ میں ہندسی تعریفوں کے ذریعہ حاصل ہوئے تھے۔

دفعہ ۱۲۳۰ میں ثابت کردہ مسئلہ $فوی = ۱ + ی + \frac{۲}{۲} + \dots + \frac{۲}{۲} + \frac{۲}{۲} + \dots + \frac{۲}{۲} + \frac{۲}{۲}$ جس

کو استعمال کرنے سے جہاں $ا ب س$ $ا$ $\frac{ای ا س^{۱+}}{۱+س}$ $فوی$ ہم دیکھتے ہیں کہ

اگر $ی$ کو $خ$ اور $خ$ میں تبدیل کیا جائے اور $س = ۱ + ۲$ فرض کیا جائے اور پھر محصلہ جملوں کو جمع کیا جائے تو

$$جم ی = ۱ - \frac{۲}{۲} + \frac{۲}{۲} - \dots + (-۱)^{۲} \frac{۲}{۲} + ب م$$

جہاں $ا ب م$ $ا$ $\frac{ای ا م^{۲+۲}}{۲+۲}$ $فوی$ بالخصوص جم $ی = ۱ + ب$

جہاں $ا ب$ $ا$ $\frac{ای ا}{۳}$ $فوی$ اور جم $ی = ۱ - \frac{۱}{۳} + ب$ جہاں

$$ا ب ا > \frac{ای ا}{۳} فوی$$

نیز $ای ا > ا$ کی صورت میں ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$ا ب ا > \frac{ای ا}{(۱-۱)۲}$$

$$ا ب ا > \frac{ای ا}{۳(۱-۱)}$$

اور

اسی طرح ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{جب } ی = ی - \frac{۳}{۳} + \frac{۵}{۵} - \dots + (-1)^{۱+۲} \frac{۱+۲}{۱+۲} + \text{سم}$$

(293) جہاں اسم $\frac{۱+۲}{۳+۲} ی$ اور بالخصوص جب $ی = ی + ی$

جہاں اسم $\frac{۱+۲}{۳} ی$ اور جب $ی = ی - \frac{۱}{۴} ی + \text{سم}$

جہاں اسم $\frac{۱+۲}{۵} ی$ اگر $ی > ۱$ تو نیز حاصل ہوتا ہے

$$\text{سم} > \frac{۱+۲}{۱-۱} ی ، اسم > \frac{۱+۲}{۱-۱} ی$$

۲۳۴ — دفعہ ۲۳۳ میں دی ہوئی تعریفوں سے اب ہم تفاعلات
جم ی اور جب ی کی بنیادی خاصیتیں ان ذکر کئے ہیں۔ چونکہ
جم ی + خ جب ی = ق (خری) اور جم ی - خ جب ی = ق (-خری)

اسلئے جم ی + جب ی = ق (خری) ق (-خری) = ق (۰) = ۱

نیز جم (ی + ی) = $\frac{۱}{۴} \{ ق (خری + خری) + ق (-خری - خری) \}$

= $\frac{۱}{۴} \{ ق (خری) ق (خری) + ق (-خری) ق (-خری) \}$

= $\frac{۱}{۴} \{ ق (خری) + ق (-خری) \} \{ ق (خری) + ق (-خری) \}$

+ ۱/۲ {ق (خ ی) - ق (خ ی)} {ق (خ ی) - ق (خ ی)}

یا جم (ی + ی) = جم ی، جم ی، جب ی، جب ی،

اسی طرح جب (ی + ی) = جب ی، جم ی، جب ی، جب ی،

اس طرح جمع کے مسئلے ہماری تعریف سے مائل ہو جاتے ہیں۔

۲۳۵۔ فرض کرو کہ ہم مساوات ق (ی) = ا پر غور کرتے ہیں۔

اول تو اس مساوات کی کوئی حقیقی اصل نہیں ہے سوائے ی = کے۔

کیونکہ توت نامی سلسلہ کے ذریعہ ق (ی) کی تعریف سے ظاہر ہے کہ

اس مساوات کی کوئی مثبت حقیقی اصل نہیں ہے اور نہ ا کی کوئی حقیقی

حقیقی اصل۔ لا ہو سکتی ہے کیونکہ ایسی صورت میں مثبت عدد لا

بھی ایک اصل ہوگی جیسا کہ رشتہ ق (- لا) ق (لا) = ا سے ظاہر ہے

نیز مساوات ق (ی) = ا کی کوئی ملحق اصل عدہ - خ نہیں

ہو سکتی جہاں ا عدہ - - کیونکہ اگر عدہ + خ بہ اصل ہو تو عدہ - خ بہ

بھی اصل ہے اور اس لئے ق (۲) = ق (عدہ + خ) ق (عدہ - خ) =

جو ناممکن ہے کیونکہ ۲ بہ اصل نہیں ہو سکتی۔

پس یہ معلوم ہوتا ہے کہ اگر مساوات ق (ی) = ا کی اصل

ی = کے سوا کوئی اور ہوں تو وہ خالص خیالی ہونی چاہئیں۔ یہ دکھانے

کے لئے کہ یہ مساوات ایسی ایک اصل رکھتی ہے یہ ثابت کرنا کافی ہوگا

کہ مساوات ق (خ بہ) - ق (- خ بہ) = یعنی جب بہ = کی ایک

حقیقی اصل صفر کے سوا ہے۔ اگر یہ ایسی ایک اصل ہو تو

ق (۲ خ بہ) = {ق (خ بہ)} = ۱

اور اس طرح ق (ی) = ا کی ایک اصل ۲ خ بہ ہوگی۔

یہ دکھایا جائیگا کہ اگر مسلسل تفاعل جب بہ کو جو سلسلہ

$$1 - \frac{2}{3} + \frac{2}{5} - \dots$$

کے انتہائی مجموعہ سے تعبیر ہوتا ہے ف (بہ) سے تعبیر کیا جائے تو ف (بہ) مثبت ہے یہ کی تمام قیمتوں کے لئے ایسی کہ $3 \geq 2$ اور یہ کہ وہ منفی ہے جبکہ $2 = 3 - 1$ اس سے نتیجہ اخذ ہو سکتا ہے کہ ۳ اور ۲ کے درمیان ایک مثبت کے لئے یا ایسی قیمتوں کی ایک طاق تعداد کے لئے ف (بہ) صفر ہے، اور کسی صورت میں ف (بہ) کی عددی طور پر چھوٹی سے چھوٹی اصل ۳ اور ۲ کے درمیان ہے اگر اس مساوات کی ایک سے زیادہ اصلیں ہوں۔

اگر بہ مثبت ہو اور $2 = 3 - 1$ سے کم تو ف (بہ) کے سلسلہ میں ہر رقم بہ استثنائے رقم اول، مابعد کی رقم سے عدد بڑی ہے۔

اس لئے ف (بہ) $1 - \frac{2}{3} + \frac{2}{5} - \frac{2}{7} + \dots$ بہ کی ان قیمتوں کے لئے جو صفر اور ۳ سے بڑے کسی عدد کے درمیان ہوں۔

اب $1 - \frac{2}{3} + \frac{2}{5} - \frac{2}{7} + \dots$ کو فہ (بہ) سے تعبیر کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ فہ (۳) $= \frac{1}{56}$ جو مثبت ہے، اور فہ (۰) $= 1$ ،

نیز مشتق تفاعل فہ (بہ) $= 2 - \frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{2}{7} - \dots$ منفی ہے جبکہ بہ، صفر اور ۳ کے درمیان ہو کیونکہ

$$\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{2}{7} - \frac{2}{9} < \frac{1}{3} - \frac{2}{5} < \frac{1}{3} - \frac{2}{7} < \frac{1}{3} - \frac{2}{9}$$

پس فہ (بہ) ایک سے $\frac{1}{56}$ تک یکساں طور پر گھٹتا ہے جیسے بہ

صفر سے ۳ تک بڑھتا ہے اور یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ف (ب) = صفر اور ۳ کے درمیان بہتگی قیمتوں کے لئے، عدد نہیں ہو سکتا۔ نیز

$$ف (۲) > ۱ - \frac{۲}{۳} + \frac{۲}{۵} - \frac{۲}{۷} + \frac{۲}{۹} - \frac{۲}{۱۱} + \frac{۲}{۱۳} - \frac{۲}{۱۵}$$

$$> ۱ - \frac{۱}{۱۵} - \frac{۱}{۱۵} \times \frac{۲۵۶}{۱۸۹} >$$

اور اسلئے ۳ اور ۴ کے درمیان ف (ب) کی کم سے کم ایک اصل موجود ہے کیونکہ ف (۳) مثبت اور ف (۴) منفی ہے۔

ف (ب) = کی عدد اچھوٹی سے چھوٹی اصل کو π سے تعبیر کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ف (ی) = کی ایک اصل $\pi ۲$ خ ہے اور اس سے صغیر تر مقياس کے ساتھ اس مساوات کی کوئی اصل نہیں ہے سوائے ی = ۰ کے۔

موجودہ تقابلی نظر سے عدد π کی تحریف اس عدد سے کی جاتی ہے جو مساوات ف (۲) خ = کو پورا کرے اور ایسا ہو کہ کوئی عدد صفر سے مختلف، غیر تر مقياس کے ساتھ مساوات ف (ی) = کی اہل نہ ہو۔ اگر ک کوئی صحیح عدد ہو مثبت یا منفی

تو ف (۲) خ = { ف (۲) خ } = ۱ اور اسلئے مساوات ف (ی) =

کی ایک اصل ۲ ک π خ بھی ہے۔ نیز کوئی اصل ۲ پ π خ موجود نہیں ہے جہاں پ ک اور ک + ۱ کے درمیان واقع ہے کیونکہ ایسی صورت میں حاصل ہونا چاہئے

$$ف (۲) پ \pi خ - ۲ ک \pi خ = ف (۲) پ \pi خ - ف (۲) ک \pi خ = ۱$$

(295) اور اس لئے ۲ (پ-ک) π خ جسکا مقياس $\pi ۲$ خ کے مقياس سے صغیر تر ہے ف (ی) = کی اہل ہوگا جو اس مفروض کے خلاف ہے کہ $\pi ۲$ خ

اِس اصل کو تعبیر کرتا ہے جسکا مقیاس صغیر ترین ہے۔
پس یہ ثابت ہو چکا کہ مساوات $ق(ی) = ا کی سب اصلیں$
شکل ۲ ک π خ کی ہیں جہاں ک مثبت یا منفی صحیح عدد ہے اور π
ایک متین عدد ہے جو ۳ اور ۴ کے درمیان واقع ہے۔ بیسا کہ اوپر
ثابت کر دیا گیا۔

اس طرح عدد π کو تحلیلی نظریہ میں داخل کرنے کے بعد ی کی
کسی قیمت کے لئے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$ق(ی + \pi 2) = ق(ی) ق(2\pi + خ) = ق(ی)$
اور اس لئے تفاعل $ق(ی)$ ایک دوری تفاعل ہے جسکا خیال
دور $\pi 2$ خ ہے۔

جم ی اور جب ی کی تعریفوں سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ وہ
بھی دوری تفاعل ہیں جسکا دور $\pi 2$ ہے، اسلئے جم $\pi 2 = جم$ اور
جب $\pi 2 = جب$ ۔ ہم نے اب تک اس امر کی تصدیق نہیں
کی کہ π حسب تعریف بالا اِس نسبت کے مائل ہے جو ایک دائرہ
کے محیط کو اس کے قطر کے ساتھ ہوتی ہے۔ لیکن اسکی تکمیل ایک
حقیقی زاوے کی صورت پر غور کرنے سے ہو سکتی ہے جس کے لئے
جیب التمام یا جیب کا دور $\pi 2$ ہے، عدد π کی۔ ایک تعریف کی جیب
۲۳۶۔ نیز چونکہ $ق(خ) \times ق(خ) = ق(2\pi + خ) = ا$
اسلئے $ق(خ) = ا$ کے مساوی ہونا چاہئے کیونکہ وہ $+ ا$ کے مساوی
ہیں ہو سکتا اس وجہ سے کہ $خ \pi$ $ق(ی) = ا$ کی اصل نہیں ہے۔
نیز $ق(-خ) = ا$ اسلئے جم $\pi = ا$ جب $\pi = ۰$ ۔

پھر چونکہ $ق(خ) \times ق(خ) = ق(2\pi + خ) = ا$ ۔

اور $ق(خ) \times ق(-خ) = ا$

اسلئے $ق (\frac{1}{p} x -) = \pm x$ اور $ق (\frac{1}{p} x -) = \pm x$

اسلئے $ج = \frac{1}{p} = \pi$ اور جب $\frac{1}{p} = \pi$ ، ± 1 ، اس ابہام کو دور کرنے کے لئے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر یہ حقیقی ہو تو جب یہ قیمتوں میں ثابت کیا جا چکا ہے، اس لئے جب $\frac{1}{p} = \pi$ ، ± 1 ۔ اس طرح صفر $\frac{1}{p}$ ، π ، π کی جیب تمام اور جیب کی قیمتیں حاصل کرنے کے بعد جمع کے سہاروں کے ذریعہ جیب تمام اور جیب کے تفاعلوں کی تمام معمولی خاصیتیں ثابت کر سکتے ہیں۔

اب تفاعلات $س$ ، $م$ ، $ق$ ، $ج$ کی تعریفات علی الترتیب مساواتوں $س = ج$ ، $ج = م$ ، $م = ق$ ، $ق = ج$ کے ذریعہ ہونگی اور پھر ہم ان تفاعلات کی خاصیتیں معلوم کر سکتے ہیں۔

دائرہ تفاعلوں کی تمام خاصیتیں جو جو تھے، پانچویں، اور ساتویں باب میں متحقق ہوئی تھیں، جمع کے ضابطوں اور دورست کی خاصیت سے اخذ ہوتی ہیں، پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ وہ تمام خاصیتیں جو حقیقی دلیلوں کیلئے وہاں ثابت کی گئی ہیں، متفق دلیلوں کے لئے بھی درست ہیں۔

۲۳۷۔ ایک اہم صورت وہ ہے جس میں $ی$ بالکلہ خیالی ہو اور $خ$ کے مساوی ہو۔ اس صورت میں

$$ج = \frac{1}{p} = \frac{1}{p} (ق + ق) = ج = \frac{1}{p} (ق - ق) = \frac{1}{p} (ق - ق)$$

$$س = \frac{1}{p} = \frac{1}{p} (ق + ق) = \frac{1}{p} (ق - ق) = \frac{1}{p} (ق - ق)$$

جملوں $\frac{1}{2} (ق + ق)$ ، $\frac{1}{4} (ق - ق)$ ، $\frac{ق - ق}{ق + ق}$ کو علی الترتیب ماک
 زائدی جیب التمام، جیب اور ماس کہتے ہیں اور ان کو جزما، جزما،
 مسرما کہتے ہیں، اس طرح
 جزما = جم خ ما، جزما = - خ جب خ ما، مسرما = - خ مس خ ما
 ہم ان تقاعلوں پر ایک ماس باب میں غور کریں گے۔

طبعی لوکارتم

۲۳۸ — اگر $ع = ق (ی)$ جو ملق تغیری کا ایک واحد القیمت
 تفاعل ہے تو ہم $ی = ق (ع)$ کی تعریف اس طرح کر سکتے ہیں کہ وہ
 اساس جو پر $ع$ کا لوکارتم ہے، لوکارتموں کا یہ نظام لوکارتموں کا طبعی
 نظام کہلاتا ہے۔ چونکہ $ق (ی)$ کے لحاظ سے دوری ہے اسلئے
 مقلوب تفاعل $ق (ی)$ لامتناہی حد تک کثیر القیمتی ہوگا اگر $ی$ کی
 ایک قیمت لوک $ی$ ہو تو لوک $ع$ کی عام قیمت لوک $ع = لوک ع$
 $+ ۲$ خک π سے حاصل ہوگی۔ کیونکہ $ق (ی) = ق (ی + ۲ خک \pi)$
 جہاں ک کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔ بانہوس ایک مثبت
 حقیقی عدد لا کے لوکارتم لوک $لا + ۲ خک \pi$ ہونگے جہاں لوک لا
 کے معمولی حقیقی لوکارتم کو تعبیر کرتا ہے۔

۲۳۹ — فرض کرد $ع = ق (ی)$ ، $ع = ق (ی)$

تو چونکہ $ق (ی) \times ق (ی) = ق (ی + ی)$

اسلئے حاصل ضرب $ع، ع$ کے لوکارتم $ق (ی + ی)$ کے لوکارتم ہیں
 یعنی $ی + ی + ۲ خک \pi$ یا

لوک $ع + لوک ع = لوک (ع، ع) + ۲ خک \pi$

ہم جملہ ۲ خک ۱۱ کو ٹوک (۶، ۶) میں شامل فرض کر سکتے ہیں اور اس لئے مساوات بالا کو کہہ سکتے ہیں

$$\text{ٹوک (۶، ۶)} = \text{ٹوک ۶} + \text{ٹوک ۶}$$

اس مساوات سے کسی ایک نوکار تم کی مخصوص قیمت متعین ہوتی ہے جبکہ دوسرے دو نوکار تم دئے گئے ہوں۔

اب فرض کرو کہ ۶ = غہ (جم فہ + خ جب فہ) جہاں غہ حقیقی ہے تو اس نتیجہ سے جو ابھی ثابت ہوا اصل ہوتا ہے ٹوک ۶ = ٹوک غہ + ٹوک (جم فہ + خ جب فہ) اور چونکہ غہ (خ فہ) = جم فہ + خ جب فہ

اس لئے ٹوک (جم فہ + خ جب فہ) کی ایک قیمت خ فہ ہے اور (297) ٹوک غہ کی عام قیمت ٹوک غہ + ۲ خک ۱۱ ہے پس ٹوک ۶ کی عام قیمت ہے

$$\text{ٹوک ۶} = \text{ٹوک غہ} + \text{خ فہ} + ۲ \text{ خک ۱۱}$$

جہاں ٹوک غہ سے ٹوک غہ کی اصلی قیمت مراد ہے۔

اگر فہ پر - ۱۱ اور + ۱۱ کے درمیان اونٹنی کی قید ہو تو ہم

ٹوک غہ + خ فہ کو ٹوک ۶ کی صد قیمت کہیں گے اور اس کو

ٹوک ۶ سے تعبیر کریں گے پس ٹوک ۶ کی عام قیمت

$$\text{ٹوک ۶} = \text{ٹوک ۶} + ۲ \text{ خک ۱۱}$$

سے ملتی ہے جہاں ٹوک ۶ اسکی صد قیمت اور ک مثبت

یا منفی کوئی عدد صحیح ہے

ہم اس نتیجہ کو لکھ سکتے ہیں

لوک (لا + خ) = $\frac{1}{2}$ لوک (لا + لا) + خ (مس + $\frac{1}{2}$ ک + ۲) ... (۸)

کسی حقیقی منفی عدد - لا کے لوکارتم کی صدر قیمت کی تعریف کافی طور پر نہیں ہوئی ہے کیونکہ ایسی کسی مقدار کی دلیل ۲ ہو سکتی ہے یا - ۲، تاہم سہولت کے مد نظر ہم فرض کرینگے کہ اسکی صدر قیمت کے لئے دلیل ۲ ہے اور اس لئے اسکی صدر قیمت لوک لا + خ ۲ ہے اور اسکے لوکارتم کی عام قیمت لوک لا + (۲ ک + ۱) خ ۲ ہے۔

کسی حقیقی مثبت عدد لا کے لوکارتم کی عام قیمت

لوک لا = لوک لا + لوک ۱ = لوک لا + ۲ ک خ ۲

سے حاصل ہوتی ہے جہاں لوک لا صدر قیمت ہے۔

لوک خ کی صدر قیمت $\frac{1}{2}$ خ ۲ ہے اس لئے لوک خ = (ک + $\frac{1}{2}$) خ ۲

لوک (-خ) کی صدر قیمت - $\frac{1}{2}$ خ ۲ ہے اس لئے لوک (-خ) = (ک - $\frac{1}{2}$) خ ۲۔

۶ کے لوکارتم کو مقياس غہ اور دلیل ذکا ایک واحد القیمت تفاعل سمجھ کر اس پر غور کرنا ممکن ہے جبکہ دلیل ۶ - ۵ سے + ۵ تک تمام قیمتوں میں سے گزرتی ہوئی فرض کیجائے اور پیر ۲ اور - ۲ کے درمیان واقع ہونے کی قید نہ ہو جیسا کہ اس سے قبل تھی۔ تب ۶ کا لوکارتم غہ اور ذکا واحد القیمت تفاعل لوک غہ + خ ذ ہے اور ہر دفعہ جبکہ ذ میں ۲۲ کا اضافہ ہوتا ہے یہ لوکارتم بقدر ۲ خ ۲ کے بڑھتا ہے اور عدد ۶ کی عددی قیمت وہی ہوتی ہے جو پہلے تھی۔ وہ طالب علم جو ریمان (Reimann) کی سطحوں کے نظریہ سے واقف ہے کثیر القیمت تفاعل کو ایک واحد القیمت تفاعل میں بدل کر غور کرینگے اس طریقہ کے پورے فوائد کا اندازہ کر سکیگا۔

عام توت نامتفاعل

۲۴۰۔ اگر کوئی عدد حقیقی یا ملق تو رمز $\frac{1}{2}$ سے ق (ی لوک)

مراد لیا جاسکتا ہے جہاں لوگ و اپنی قیمتوں کی لا انتہا
تعداد میں سے کوئی ایک قیمت اختیار کرنا ہے۔ اگر لوگ و اپنی صد
قیمت لوگ و اختیار کرے تو ہم ق (ی لوگ و) کو و کی صد
قیمت کہینگے۔

(298)

$$\text{چونکہ } ق (ی لوگ و) = ۱ + \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۷} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۱۰} + \dots$$

اسلئے عام قوت نامہ سلسلہ ہے

$$۱ = ۱ + \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۷} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۱۰} + \dots$$

اور و کی صد قیمت

$$۱ = ۱ + \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۷} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۱۰} + \dots$$

سے حاصل ہوتی ہے۔

اگر ۱ اور ۱ دونوں حقیقی ہوں تو قوت نامہ سلسلہ کی معمولی شکل

$$۱ = ۱ + \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۷} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۱۰} + \dots$$

حاصل ہوتی ہے جس سے و کی صد قیمت ملتی ہے۔

۲۲۱ — مخصوص صورت ۱ = نو میں

$$\text{لوگ نو} = \text{لوگ نو} + ۲ \text{ خرک} = ۱ + ۲ \text{ خرک} = ۱۱$$

اور رمز نو کے عام معنی ق (ی لوگ نو) یا ق (ی + ۲ خرک ۱۱)

ہیں۔ نو کی عام قیمت ق (ی) ہے اور یہ اس تعریف کے مطابق

ہے جو دفعہ ۲۲۱ میں دی گئی تھی۔ اسلئے نو کی عام قیمت

ق (ی) (جم ۲ ک ۲ ی + خر جب ۲ ک ۲ ی)

ہے۔ ہم اب بھی فرض تو سے اسکی صدر قیمت مراد لیتے ہیں۔

۲۲۲۔ دکانی عام قیمت حسب تعریف بالا ق {ی (لوک ۲ + خر طہ + ۲ ک ۲ ی) کے مائل ہے جہاں $r = (جم طہ + خر جب طہ) = عد + خر بہ اور طہ = ۲$ اور ۲ کے درمیان واقع ہے 'ی = لا'۔ خر ما کہنے سے (عد + خر بہ) + خر ما کی عام قیمت کے لئے جملہ حاصل

ہوتا ہے ق {لا لوک ۲۔ طہ ما۔ ۲ ک ۲ ی + خر ما لوک ۲ + لا طہ ۲ ک ۲ ی}

جو لا لوک ۲۔ طہ ما۔ ۲ ک ۲ ی {جم (ما لوک ۲ + لا طہ ۲ ک ۲ ی)}

+ خر جب (ما لوک ۲ + لا طہ ۲ ک ۲ ی)

کے مساوی ہے۔ اسلئے (عد + خر بہ) + خر ما کی صدر قیمت ہے

لا لوک ۲۔ طہ ما {جم (ما لوک ۲ + لا طہ ۲ ک ۲ ی) + خر جب (ما لوک ۲ + لا طہ ۲ ک ۲ ی)}

جہاں $r = (عد + خر بہ) طہ = مس' ا$

یہ ضروری نہیں کہ مس' ا کی صدر قیمت جس کی تعریف دفعہ ۳ میں کی گئی ہے لی جائے۔

اگر $r = ۱$ تو (جم طہ + خر جب طہ) + خر ما کی صدر قیمت کے لئے

تفاعل ق {خر طہ (لا + خر ما) + خر ما} حاصل ہوتا ہے جسکو شکل جم (لا + خر ما) طہ

+ جب (لا + خ ما) ط میں لکھا جاسکتا ہے، یہ ڈیموائر کے مسئلہ کی توسیع ہے جبکہ قوت ثنائی ملحق ہو۔

(299) ۲۴۳ — مساوات $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ کے درست رہنے

کے لئے ہیں یہ فرض کرنا پڑیگا کہ $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{4}$ کی قیمتیں وہ ہیں جو لوک $\frac{1}{2}$ کی ایک ہی قیمت کے متناظر ہیں، ایسی صورت

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \text{ق} \{ \text{ی} (\text{لوک } 1 + 2 \text{ خک } 2) \} \times \text{ق} \{ \text{ی} (\text{لوک } 1) \}$$

$$= \text{ق} \{ (\text{ی} + \text{ی}) (\text{لوک } 1 + 2 \text{ خک } 2) \}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

لیکن یہ مساوات درست نہیں ہوگی اگر ان دو تقاطعوں $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{2}$ میں ہم ک کی مختلف قیمتیں لینگے۔ ان خصوص مساوات $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ان تقاطعوں کی صدر قیمتوں کی صورت میں درست ہے۔

۲۴۴ — جملہ $(\frac{1}{2})$ کا $\frac{1}{2}$ کی ایک قیمت ہونا ضروری نہیں ہے لیکن $\frac{1}{2}$ کی ہر قیمت، $(\frac{1}{2})$ کی ایک قیمت ہے کیونکہ

$$\frac{1}{2} = \text{ق} \{ \text{ی} (\text{ی} (\text{لوک } 1)) \} = \text{ق} \{ \text{ی} (\text{ی} (\text{لوک } 1 + 2 \text{ خک } 2)) \}$$

اور $(\frac{1}{2}) = \text{ق} \{ \text{ی} (\text{لوک } 1) \} = \text{ق} \{ \text{ی} (\text{ی} (\text{لوک } 1 + 2 \text{ خک } 2)) \}$

$$= \text{ق} \{ \text{ی} (\text{ی} (\text{لوک } 1 + 2 \text{ خک } 2)) \}$$

اسلئے ΔABC کی قیمتیں، ΔABC کی صرف وہ قیمتیں ہیں جو کہ صورت میں حاصل ہوتی ہیں۔ اگر ہم ہر صورت میں صد قیمتیں لیں تو مساوات $\Delta ABC = \Delta ABC$ درست ہے۔

اگر ہم رموز ΔABC کو انکی صد قیمتوں ΔABC (ی لوک) کے قریب کے مماثل لیں جو بالعموم عمل میں کیا جاتا ہے تو ہم ابھی دکھا چکے ہیں کہ ان جملوں میں جنہیں یہ رموز واقع ہوتے ہیں اعمال کی تکمیل قوت ثانیوں کے معمولی قاعدوں کے مطابق کیجا سکتی ہے جیسا کہ عام طور پر جبر و مقابلہ میں کیا جاتا ہے۔

مثال

اگر ΔABC ، ΔABC ، ایک منظم ن ضلعی کثیر الاضلاع کے راس ہوں جو نصف قطر ΔABC کے دائرہ میں کھینچا گیا ہے جس کا مرکز O ہے تو ثابت کرو کہ ان راسوں کا مجموعہ جو ΔABC ، ΔABC ، ΔABC ،

نصف قطر ΔABC کے ساتھ بناتے ہیں مساوی ΔABC ، ΔABC ، ΔABC ، ہے جہاں

$\Delta ABC = \Delta ABC$ اور زاویہ $\Delta ABC = \Delta ABC$ ۔

چونکہ $\Delta ABC = \Delta ABC$ ، $\Delta ABC = \Delta ABC$ ، $\Delta ABC = \Delta ABC$ ،

اسلئے لوکار تم لینے سے
لوک (ر)۔ ΔABC ، ΔABC ، ΔABC ،

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \right\} = \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \right\} = \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \right\}$$

اور اس مساوات کی طرف میں خ کے تہوں کو مساوی رکھنے سے

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n} \quad \text{اس سے} \quad \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \quad \text{اس سے} \quad \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$$

(300) جہاں مقلوب تفا علوں کی متناظر قیمتیں لگائی ہیں۔ اس مساوات کی پائین جانب کا جملہ ان زاویوں کا مجموعہ ہے جو نصف قطروں کے دتروں میں پائے گئے ہیں۔ اس لئے یہ مجموعہ ہے

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n} \quad \text{اس سے} \quad \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$$

کسی اساس پر لوکارتم

۲۴۵۔ اگر $\frac{1}{n}$ کی مدد قیمت $\frac{1}{n}$ کے مساوی ہو تو $\frac{1}{n}$ کا لوکارتم اساس $\frac{1}{n}$ پر کہتے ہیں اور اسکو لوگ $\frac{1}{n}$ کہہ سکتے ہیں۔ اب $\frac{1}{n}$ کی مدد قیمت $\frac{1}{n}$ (ی لوگ $\frac{1}{n}$) ہے جہاں لوگ $\frac{1}{n}$ کا لوکارتم اساس $\frac{1}{n}$ پر ہے، اور اگر $\frac{1}{n}$ (ی لوگ $\frac{1}{n}$) = $\frac{1}{n}$ تو

$$y = \frac{1}{n} = \frac{1}{n} = \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$$

اس لئے $\frac{1}{n} = \frac{1}{n} = \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$ (لوگ $\frac{1}{n}$ = (لوگ $\frac{1}{n}$ + $\frac{1}{n}$) (لوگ $\frac{1}{n}$)
لوگ $\frac{1}{n}$ کی مدد قیمت کو ہم لوگ $\frac{1}{n}$ لیتے ہیں اور اسکو

لوک ۶ء سے تعبیر کر سکتے ہیں۔ پس عام قیمت ہے

$$\text{لوک } ۶ = \text{لوک } ۶ + ۲ \text{ خرک } ۲ \mid \text{لوک } ۱$$

جو ایک کثیر القیمت تفاعل ہے جس میں مختلف قیمتیں بقدر ۲ خرک ۲ \mid لوک ۱ کے ضعیفوں کے ایک دوسرے سے فرق رکھتی ہیں۔ مخصوص صورت

۱ = ۱۰ میں اوپر کی تعریف دفعہ ۲۳۸ میں بیان کردہ تعریف کے مطابق ہے کیونکہ اس سے لوک ۶ء کی عام قیمت کیلئے لوک ۶ + ۲ خرک ۲ حاصل ہوتا ہے۔

عام ترین لوکارتم

۲۳۶ — ہم لوکارتم کی حسب ذیل تعریف دے سکتے ہیں جو دفعہ سابق میں دی ہوئی تعریف کی بہ نسبت زیادہ عام ہے۔

اگر ۱ کی کوئی قیمت ۶ء کے مساوی ہو تو ۱ء کا لوکارتم

اساس ۱ پر ہے اور لکھا جاسکتا ہے [لوک ۶ء] تاکہ لوک ۶ء سے خود دفعہ

سابق میں استعمال ہوا ہے تمیز ہو جائے۔ ۱ کی عام ترین قیمت

ق (۱ لوک ۱) ہے اور اگر یہ قیمت ۶ء کے مساوی ہو تو

$$\text{ی لوک } ۱ = \text{لوک } ۶ \text{ء یا } (\text{لوک } ۱ + ۲ \text{ خرک } ۲) = \text{لوک } ۶ + ۲ \text{ خرک } ۲$$

جہاں ک اور ک صحیح اعداد ہیں۔ پس [لوک ۶ء] کی عام قیمت

لوک ρ ع | لوک ρ د | : (لوک ρ ع + خک π) \ (لوک ρ د + خک π)
 ہے جو دو طرح سے ہے: "مقتضیٰ حد تک کثیر القیمتی ہے۔ اس لئے" [لوک ρ ع]
 کی قیمتوں میں کثرت ہے۔ جو مختصراً جو محسوس جہت حاصل ہوتا ہے انہیں
 لوکارتم لوک ρ ع شریک ہیں۔ ہم [لوک ρ ع] لوک ρ ع کا عام ترین
 لوکارتم اساس ۱ پر کہہ سکتے ہیں۔

۲۴ — اگر ۱ = نو تو [لوک ρ ع] = (لوک ρ ع + خک π) \ (لوک ρ د + خک π)
 ۲ + خک π جو اساس نو پر ع کے عام ترین لوکارتم کے لئے جملہ
 ہے۔ زیادہ عقیدہ لوکارتم لوک ρ ع کی صورت میں ہم نے نئی کی
 تعریف یہ کی تھی کہ وہ لوک ρ ع کی ایک قیمت ہے جبکہ نو کی حد
 قیمت ع کے مساوی ہو، لیکن عام ترین لوکارتم [لوک ρ ع] کی صورت
 میں ہم ی کو [لوک ρ ع] کی ایک قیمت سمجھتے ہیں جبکہ نو کی
 کوئی قیمت ع کے مساوی ہو۔

[لوک ρ د] کی عام ترین قیمت ۲ خک π \ (لوک ρ د + خک π)

ہے اور [لوک ρ د - ۱] کی (۱ + ک + ۱) خک π \ (لوک ρ د + خک π) -

جملہ (لوک ρ ع + خک π) \ (لوک ρ د + خک π) پر دوسرے نقطہ

نگاہ سے بحث کیا جاسکتی ہے۔ {ق (۲ + ۱) خک π } \ (لوک ρ د + خک π) کی

قیمت سلسلہ (۲) کی رو سے ق (لوک ρ ع + خک π) ہے جو ع کے
 مساوی ہے۔ اس لئے (لوک ρ ع + خک π) \ (لوک ρ د + خک π) کو دفعہ ۲۳۸

کی تعریف کی بموجب نہ کا لوکارتم اساس قی (۲۰۱۱ خرک ۲) پر سمجھا جاسکتا ہے اور یہ نہ اس کو کی نہیں بلکہ نو ۲+۱ خرک ۲ کی بہ قیمت ہے ۱۰ میلے

فی الحقیقت ہیں یہ حاصل ہوتا ہے کہ [لوک ۲] لوک ۲+۱ خرک ۲ کی قیمتوں کے مساوی ہے جبکہ کہ کو مختلف قیمتیں دی جائیں۔ پس ہم اساس نو پر عام ترین لوکارتموں کو معمولی لوکارتم اساس نو پر نہیں بلکہ اساس نو ۲+۱ خرک ۲ پر سمجھ سکتے ہیں جو (بعد الذکر اساس) اگرچہ عدد آ فو کے مساوی ہے لیکن ک کی مختلف قیمتوں کی بموجب اسکی مختلف دلیلیں ہوتی ہیں۔ اس سوال پر اکثر بحث ہوتی رہی ہے کہ آیا ایک منفی حقیقی عدد کا لوکارتم حقیقی ہو سکتا ہے یا نہیں، مثلاً ۱ کو۔ ہا تو کا لوکارتم

سمجھ سکتے ہیں یا نہیں جبکہ یہ امر واقعہ ہے کہ نو کی قیمتیں ۱۰ مساوی ہیں اس سوال کا جواب اس تعریف پر منحصر ہے جو ہم لوکارتم کے لئے اختیار کریں، اگر ہم دفعہ ۲۳۸ کی معمولی تعریف لیں جو یہ ہے کہ ی کا لوکارتم ہے جبکہ نو کی عدد قیمت ۱۰ کے مساوی ہو تو منفی حقیقی عدد کا حقیقی لوکارتم نہیں ہو سکتا، لیکن اگر ہم دفعہ ۲۴۶ کی تعریف اختیار کریں جو یہ ہے کہ ی کا لوکارتم ہے جبکہ نو کی کوئی قیمت ۱۰ کے مساوی ہو تو منفی حقیقی عدد کا حقیقی لوکارتم ہو سکتا ہے۔ اگر ایک مثبت حقیقی عدد ہو تو

$$[\text{لوک}(-r)] = \frac{\text{لوک } r + (1+k) \times \pi}{\pi \times 2 + 1}$$

$$= \frac{\{\text{لوک } r + (1+k) \times \pi\} + \{\pi(1+k) - \pi(1+k) - \pi \times \text{لوک } r\}}{\pi \times 2 + 1}$$

اور یہ حقیقی ہے اگر لوک $r = (۲ک + ۱) \backslash ۲ک$ - ہیں اگر r ہو ایسا کہ
لوک r کی شکل $(۲ک + ۱) \backslash ۲ک$ ہو جہاں k اور k صحیح عدد
ہیں تو $[لوک - (r)]$ کی ایک قیمت حقیقی ہے۔

اگر لوک r کی یہ شکل نہ ہو تو ہم ہمیشہ ایک عدد r معلوم کر سکتے ہیں
ایسا کہ جبیں اور r میں اتنا کم فرق ہو جتنا ہم چاہیں اور ایسا کہ $[لوک - (r)]$
کی ایک قیمت حقیقی ہو، کیونکہ ایک کسر $\frac{1}{n}$ اپنی مختصر ترین شکل میں ہمیشہ معلوم
ہو سکتی ہے جو لوک r سے اس قدر کم فرق رکھے جس قدر ہم چاہیں۔ فرض کو

لوک $r = \frac{1}{n}$ ، تب اگر q جفت ہے تو $[لوک - (r)]$ کی ایک قیمت
حقیقی ہے اور $r = \frac{1}{n}$ ، لیکن اگر q طاق ہے تو $r = \frac{1}{2n}$ تو $\frac{1}{2n}$

اور تو $\frac{1}{2n}$ کو s کافی بڑا لینے سے ایک کے اتنا قریب لایا جاسکتا ہے

جتنا ہم چاہیں، یا لوک r کو $\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}$ کے اتنا قریب لایا جاسکتا ہے

جتنا ہم چاہیں، اسلئے عدد $\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = لوک r$ معلوم ہو سکتا ہے

جو لوک r سے اس قدر کم فرق رکھے جس قدر ہم چاہیں اور جو ایسا ہو کہ
 $[لوک - (r)]$ کی ایک قیمت حقیقی ہو۔ ہیں ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ
اگر q کی ہر قیمت کے جواب میں $[لوک - (r)]$ کی ایک قیمت حقیقی
نہیں ہے لیکن ہم ہمیشہ ایک عدد r معلوم کر سکتے ہیں ایسا کہ r - اتنا
چھوٹا ہو جتنا ہم چاہیں اور ایسا کہ $[لوک - (r)]$ کی ایک قیمت حقیقی ہو۔

(302)

لوکار متی سلسلہ

۲۴۹ - $(۱+۱) کی صدر قیمت ق \{م لوک (۱+۱) \}$ ہے

اس سلسلہ کو جس سے لوک $(۱+۱)$ کی صد قیمت حاصل ہوتی ہے لوکار تھی سلسلہ کہتے ہیں۔ یہ ثابت ہو چکا ہے کہ یہ سلسلہ درست ہوتا ہے جبکہ مق $۱ > ۱$ نیز دفعہ ۲۰ کی بموجب اس سلسلہ کا مجموعہ لوک $(۱+۱)$ رہتا ہے جبکہ مق $۱ = ۱$ بشرطیکہ سلسلہ مستحق ہو جو ہوگا زلا آنکہ ۱ کی دلیل ۱ ہو۔

۹۲۲۱ — یہ مانکر کہ $۱ > ۱$ سلسلہ (۹) سے ظاہر ہے کہ

لوک $(۱+۱) = ۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots$ جس جہاں جس مستحق سلسلہ $\frac{۱}{۱+۱} + \frac{۱}{۲+۱} + \dots$ کے مجموعہ سے متجاوز نہیں ہو سکتا اور اسلئے [جس $> \frac{۱}{۱+۱} + \frac{۱}{۲+۱} + \dots$]

$$یا جس $> \frac{۱}{۱+۱} + \frac{۱}{۲+۱} + \dots$$$

(308)

پس یہ ثابت ہو چکا کہ جب $۱ > ۱$ تو

لوک $(۱+۱) = ۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots$ جس $(۱+۱)$

جہاں $۱ > \frac{۱}{۱+۱} + \frac{۱}{۲+۱} + \dots$ اور اسلئے اس ۱ کے ساتھ صفر کی طرف مستحق ہوتا ہے۔

بالخصوص $۱ = ۱$ لینے سے لوک $(۱+۱) = ۱$ جس $(۱+۱)$ جہاں $\frac{۱}{۱+۱} + \frac{۱}{۲+۱} + \dots$ اور اس طرح ۱ کے ساتھ صفر کی طرف مستحق ہوتا ہے۔ اس نتیجہ کو

شکل

$$\text{ہی} = \frac{\text{لوک و (۱+۱) - ۱}}{۱} = ۱$$

میں لکھا جاسکتا ہے۔

اگر 'ای' سے بڑا کوئی مثبت حقیقی عدد ہو تو $(۱ + \frac{۱}{م}) = ۱$

م لوک و $(۱ + \frac{۱}{م})$ 'ای' جہاں طہ $(۱ + \frac{۱}{طہ})$ کے ساتھ صفر کی طرف مستقیم ہوتا ہے۔ پس اگر م کو غیر معین طور پر بڑھنے والے مثبت حقیقی عددوں کے کسی تو اتر کی قیمتیں دی جائیں تو ہم دیکھتے

ہیں کہ $(۱ + \frac{۱}{م})$ کی انتہا ٹو ہے۔ یہ مسئلہ دفعہ ۲۲۶ میں صرف

اس مخصوص صورت کے لئے ثابت کیا جا چکا ہے جس میں اعداد م پر مثبت صحیح اعداد ہونیکی قید تھی۔ یہ قید اب اٹھ چکی ہے۔

$$۲۵۰ - ی = ر (رجم طہ + خر جب طہ) \text{ کہنے سے}$$

$$\text{لوک و (۱+۱)} = \text{لوک و (۱+رجم طہ + خر جب طہ)}$$

اور یہ جملہ ذیل کے مساوی ہے

$$\frac{۱}{۴} \text{ لوک و (۱+۲ رجم طہ + ۱) + خر جب طہ (۱+۱)}$$

$$+ رجم طہ \{$$

جہاں متغلوب ماس اپنی صد قیمت رکھتا ہے۔ پس ہمیں حسب ذیل

دو سلسلے ملتے ہیں

$$\frac{1}{4} \text{ لوک } (1 + 2 \text{ جم طہ} + 2) = 2 \text{ جم طہ} - \frac{1}{4} 2 \text{ جم طہ} + \frac{1}{4} 3 \text{ جم طہ} - \dots (10)$$

$$\text{مس } \left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ جم طہ} \\ 1 + 2 \text{ جم طہ} \end{array} \right\} = 2 \text{ جم طہ} - \frac{1}{4} 2 \text{ جم طہ} + \frac{1}{4} 3 \text{ جم طہ} + \dots (11)$$

جہاں $r > 1$ یا $r = 1$ اور $\pi \neq \pm \pi$
اگر $r = 1$ رکھا جائے تو

$$\text{لوک } (2 \text{ جم } \frac{1}{4} \text{ طہ}) = 2 \text{ جم طہ} - \frac{1}{4} 2 \text{ جم طہ} + \frac{1}{4} 3 \text{ جم طہ} - \dots (12)$$

$$\frac{1}{4} \text{ طہ} = 2 \text{ جم طہ} - \frac{1}{4} 2 \text{ جم طہ} + \frac{1}{4} 3 \text{ جم طہ} - \dots (13)$$

جہاں $\pi \neq \pm \pi$ کے درمیان واقع ہے اور $\pi \neq \pm \pi$ کے مساوی نہیں ہے
اگر (۱۱) میں π کو 2 طہ میں تبدیل کیا جائے تو مسئلہ ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\text{لوک جم طہ} = \text{لوک } 2 + 2 \text{ جم طہ} - \frac{1}{4} 2 \text{ جم طہ} + \frac{1}{4} 3 \text{ جم طہ} - \dots$$

جو درست رہتا ہے اگر $\pi \neq \pm \pi$ کے درمیان واقع ہو۔
پھر π کو $\frac{1}{4} \pi$ میں تبدیل کرنے سے

$$\text{لوک جب طہ} = \text{لوک } 2 - 2 \text{ جم طہ} - \frac{1}{4} 2 \text{ جم طہ} + \frac{1}{4} 3 \text{ جم طہ} - \dots$$

جو درست رہتا ہے اگر π صفر اور π کے درمیان واقع ہو۔

سلسلہ (۱۳) سے غیر متکسر کی ایک مثال فراہم ہوتی ہے اسوجہ سے
کہ یہ سلسلہ لا انتہا شست رفتار سے مستقر ہوتا ہے جبکہ π قیمت
کے قریب آتا ہے، جب $\pi = \pi$ تو اس سلسلہ کا مجموعہ صفر ہوتا ہے

لیکن جب طہ ۲۱ سے نواہ کتنی ہی صغیر مقدار کے کم ہو اس سلسلہ کا مجموعہ $\frac{1}{4}$ طہ ہوتا ہے۔

گرگوری کا سلسلہ

۲۵۱۔ چونکہ لوک و (جم طہ + خ جب طہ) = خ طہ جہاں طہ ± ۲۱ کے درمیان واقع ہے اس لئے

لوک و جم طہ + لوک و (۱ + خ س طہ) = خ طہ
یا لوک و جم طہ + خ س طہ - $\frac{1}{4}$ س طہ + $\frac{1}{8}$ س طہ + ...
+ ($\frac{1}{4}$ س طہ - $\frac{1}{8}$ س طہ + ... = خ طہ

بشرطیکہ س طہ ± ۱ کے درمیان واقع ہو جو ہو گا اگر طہ ± ۲۱ کے درمیان واقع ہو یا $\pm \frac{1}{4}$ کے مساوی ہو۔ پس چونکہ جم طہ ثابت ہے چہیں حاصل ہوتا ہے

لوک و جم طہ = $\frac{1}{4}$ س طہ + $\frac{1}{8}$ س طہ - ...
اور طہ = س طہ - $\frac{1}{4}$ س طہ + $\frac{1}{8}$ س طہ - ... (۱۴)
اس آخری سلسلے کو گرگوری کا سلسلہ کہتے ہیں اور یہ درست رہتا ہے اگر طہ $\pm \frac{1}{4}$ کے درمیان (بشمول ہر دو حدود) واقع ہو۔

اب طہ کو $\frac{1}{4}$ - طہ میں بدلنے سے

$\frac{1}{4}$ - طہ = جم طہ - $\frac{1}{4}$ جم طہ + $\frac{1}{8}$ جم طہ - ...

جو درست رہتا ہے اگر طہ $\frac{1}{\pi}$ اور $\frac{3}{\pi}$ کے درمیان واقع ہو۔
کسی زاویہ طہ کے لئے عام جملہ ہیں

$$\text{طہ} = \pi \text{ ن} + \text{مس طہ} - \frac{1}{\pi} \text{ مس}^2 \text{ طہ} + \dots$$

$$\text{یا} \quad \text{طہ} = (\pi \text{ ن} + \frac{1}{\pi}) - \pi (\frac{1}{\pi} + \text{مم طہ} + \frac{1}{\pi} \text{ مم}^2 \text{ طہ} - \dots$$

جہاں سلسلہ اول میں ن ایک صحیح عدد ہے ایسا کہ طہ - ن π ،

$\pm \frac{1}{\pi}$ کے درمیان واقع ہے اور سلسلہ دوم میں ن ایک
صحیح عدد ہے ایسا کہ طہ - ن π ، $\frac{1}{\pi}$ اور $\frac{3}{\pi}$ کے درمیان واقع

ہے۔ گریگوری کے سلسلے کو شکل

$$\text{مس}^2 \text{ لا} = \text{لا} - \frac{1}{\pi} \text{ لا}^2 + \frac{1}{5} \text{ لا}^3 - \dots$$

میں بھی لکھ سکتے ہیں جہاں لا ± 1 کے درمیان واقع ہے اور
مس² لا اپنی صدر قیمت رکھتا ہے۔

لا کی قوتوں میں جب لا کے لئے جو سلسلہ دفعہ ۲۱۸ میں حاصل
کیا جا چکا ہے اسکو گریگوری کے سلسلے سے اخذ کیا جاسکتا ہے فرض کرو
طہ = جب² لا تو

$$\dots - \frac{\text{لا}^5}{\frac{5}{2}(\text{لا}^2 - 1)} + \frac{1}{5} + \frac{\text{لا}^3}{\frac{3}{2}(\text{لا}^2 - 1)} - \frac{1}{3} - \frac{\text{لا}}{\frac{1}{2}(\text{لا}^2 - 1)} = \text{جب}^2 \text{ لا}$$

$$\dots + \frac{1 + 2\text{لا}}{(7 + 2\text{لا})\frac{1}{2}(\text{لا}^2 - 1)} - \frac{1}{1 + 2\text{لا}} (1 - \dots)$$

اس ثبوت سے صرف یہ معلوم ہوتا ہے کہ یہ سلسلہ $\pm \frac{1}{17}$ کے درمیان لا کی قیمتوں کے لئے درست ہے لیکن اس واقعہ کو استعمال کرنے سے کہ اس سلسلہ مجموعہ اسکے استفادہ کے دائرہ میں سلسلہ ہے یہ بتایا جاسکتا ہے کہ یہ سلسلہ درست رہتا ہے اگر لا ± 1 کے درمیان ہو۔

دائرہ کی تربیع

۵۱ (۱)۔ وہ مشہور مسئلہ جو دائرہ کو مربع میں تحویل (Squaring the circle) کرنا ہے یعنی ایک مربع بنانا جس کا رقبہ ایک دے ہوئے دائرہ کے مساوی ہو اس مسئلہ کے مائل ہے کہ ایک خط مستقیم بنایا جائے جو طول میں ایک دے ہوئے دائرہ کے محیط کے مساوی ہو۔ وہ طریقہ عمل جو اس مسئلہ علی کے حل کرنے میں استعمال کیا جاتا ہے اقلیدس ہی ہے جس میں صرف دائروں اور خطوط مستقیم کو اقلیدسی نظام کے اصول موضوعہ کی بموجب سمجھنے کا عمل شامل ہے۔

اس مسئلہ علی کو اس طرح بیان کیا جاسکتا ہے کہ وہ ایک خط مستقیم کو جس کا طول عدد π سے تعبیر ہوتا ہے بنانا مسئلہ ہے جبکہ ایک دے ہوئے محدود خط کا طول طول کی اکائی منظور ہو۔ یہی مسئلہ نے

یہ بات ثابت کی کہ عدد π غیر منطوق ہے یعنی اسکو شکل $\frac{p}{q}$ میں بیان نہیں

کیا جاسکتا جہاں p اور q صحیح عدد ہیں اور ایک دوسرے کے لحاظ سے مفرد ہیں لیکن یہ امر واقعہ اس بات کو ثابت کر نیکی کے لئے کافی نہیں ہے کہ طول π کا خط مستقیم بنانا ناممکن ہے کیونکہ غیر منطوق طول کے خطوط مستقیم کی ایک خاص جماعت اقلیدس ہی طریقہ عمل سے حاصل کیجا سکتی ہے۔ اس سلسلہ میں بنیادی اہمیت رکھنے والی ایک کڑی

اضافہ ہوا جبکہ لیویل (Liouville) نے عددی انداز کے وجود کو ثابت کیا جو جبری اعداد سے مختلف ہیں۔ جبری اعداد وہ ہست جو کسی درجہ ن کی ایک جبری مساوات کی ایک اصل ہوتا ہے جبکہ اس مساوات کے منطبق عدد ہوں، مسئلہ کی عمومییت پر اثر نہیں پڑتا اگر ان سروں پر مثبت یا منفی صحیح عدد ہوں تو یہ قید عائد کی جائے۔ یہ علوی عدد وہ ہے جو کسی ایسی جبری مساوات کی اصل نہیں ہو سکتا جس کے سر منطبق (یا صحیح عدد) ہوں۔ خود لیویل نے علوی عددوں کی مثالیں دی ہیں لیکن وہ پہلی صورت جس میں ایک عدد کو جو علم التحلیل میں بہت معروف ہے علوی ثابت کیا گیا تھا عدد e کی فنی جس کی علویت ہرماٹ (Hermite) نے قائم کی۔ ہرماٹ کے بعد لندی میا (Lindemann) نے اس امر کا ثبوت دیا کہ π ایک علوی عدد ہے۔ اس نے یہ عام تر مسئلہ ثابت کیا کہ اگر α ما تو یہ دو عدد لا اور ما دونوں جبری نہیں ہو سکتے الا بصورت آنکہ لا = ما = ۱۔ آسان ثبوت کہ نو اور π علوی عدد ہیں بعد میں ہلبرٹ، ہرز (Hurwitz) اور گارڈن (Gordan) نے دیے۔

گارڈن کے ثبوت کی ترمیم شدہ شکل یہاں دی جائے گی۔ یہ ثبوت کہ π ایک علوی عدد ہے اس امر کے مماثل ہے کہ کسی ہندسی عمل کے ذریعہ ہمیں صرف خطوط مستقیم اور دائرے استعمال کئے گئے ہوں دائرہ کو ایک مربع میں تحویل کرنا ناممکن ہے یا زیادہ عام صورت میں یہ کہ کسی جبری تخنیوں کے ذریعہ ایسا کرنا ناممکن ہے۔ کیونکہ کسی ایسے عمل کے یہ معنی ہیں کہ π کو کسی خاص

جبری مساوات کی ایک اصل کے طور پر ظاہر کیا گیا ہے جہاں یہ مساوات خطوط مستقیم اور دائروں یا دو سرے جبری تخنیوں کی کار پریشی مساواتوں ترکیب دینے سے حاصل ہوئی ہے۔ دائرہ کو مربع میں تحلیل کرینیکا مسئلہ ایسا ہے کہ جس نے صدیوں تک علماء ریاضی کے دماغوں کو محو فریب رکھا اور اسلئے لنڈر من کا ثبوت اس مسئلہ کے عدم امکان کے متعلق اس لحاظ سے بڑی اہمیت رکھتا ہے کہ وہ تاریخی دلچسپی کے ایک مسئلے سے متعلق ہے۔

۲۵۱ (ب) — یہ دکھانے کے لئے کہ عدد نو علمی ہے مان لو
(بفرض امکان) کہ نو اس شرط

$$= \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{2} + 1$$

کو پورا کرتا ہے جہاں 'ا'، 'ا'، 'ا'... مثبت یا منفی صحیح عدد ہیں اور (307)
 'ا' ایک مثبت صحیح عدد ہے۔ اب یہ دکھانے کے لئے کہ اس
 مفروضہ سے ہم اس مسئلہ کے فساد پر پہنچتے ہیں یہ ثابت کیا جائیگا
 کہ ایک عدد کی متعین ہو سکتا ہے ایسا کہ

ک ا = ص + ب + گ ا = و = ص + ن + گ ا = و = ص + ن +

.... ایک ایسا نو = ص + فن

جہاں ص، ص، ص، ... شیت یا متغی صیح عددوں کو تغیر کرتے ہیں اور ف، ف، ف، ... فن اُن عددوں کو تغیر کرتے ہیں جو عدداً ایک سے کم ہیں اور یہ کہ ف، ف، ف، ... + فن عدداً ایک سے کم ہے، نیز ص، ص، ص، ... + ص، ص، ص، ...

ابتدائی مساوات کو ک سے ضرب دینے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ایک صمیم عدد اور عدداً ایک سے چھوٹے عدد کا مجموعہ صفر کے مساوی حاصل ہوتا ہے جو ناممکن ہے۔ گ کی تعین کے لئے جملہ

$$\text{فہ (لا)} = \frac{\text{لا}^{\text{پ-۱}}}{\text{پ-۱}} \{ (۱-لا) (۲-لا) \dots (ن-لا) \}$$

پر غور کرو جہاں پ، ن سے بڑا اور ل سے بڑا ایک مفرد عدد ہے۔

ہم فہ (لا) کو اسے لا کی قوتوں میں بھیلانے کے بعد ج^{۱-لا} پ^{۱-۱}

+ ج^{۱-لا} پ^{۱-۱} + ... + ج^{ن-لا} پ^{ن-۱} سے ظاہر کر سکتے ہیں۔ اب فہ (لا) کے متواتر مشتق تفاعلوں کو

$$\text{فہ (لا)}، \text{فہ (لا)}، \dots، \text{فہ (لا)}، \dots، \text{فہ (ن-لا)}، \text{فہ (ن-لا)}، \dots، \text{فہ (۱-لا)}$$

سے تعبیر کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{فہ (پ)}، \text{فہ (پ+۱)}، \dots، \text{فہ (ن-پ+۱)}، \text{فہ (ن-پ)}$$

سب کے سب پ کے ضعیف ہیں، لیکن فہ (پ-۱)، پ کا ضعیف

نہیں ہے کیونکہ (ن-پ) پ کے لحاظ سے مفرد ہے۔ نیز اگر صمیم عددوں ۱، ۲، ۳، ...، ن میں سے ایک م سے تعبیر ہو تو

ہم دیکھتے ہیں کہ فہ (م)، فہ (م)، ...، فہ (پ-۱)، (م) سب کے سب

معدوم ہوتے ہیں اور فہ (پ)، فہ (پ+۱)، ...، فہ (ن-پ+۱)، (م) سب کے سب

پ سے تقسیم پذیر صحیح عدد ہیں۔
فرض کرو کہ ک پ سے

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \dots + \frac{1}{p^r} + \frac{1}{p^r} \times \text{ج ر}$$

یا $\frac{1}{p} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \dots + \frac{1}{p^r} + \frac{1}{p^r} \times \text{ج ر}$
تعبیر ہوتا ہے، اس طرح ک پ کا ضعف نہیں ہے کیونکہ $\frac{1}{p}$ سے تقسیم پذیر نہیں ہے۔ یہ دکھایا جائیگا کہ ک پ کی وہ قیمت جو مفرد عدد پ کی کافی طور پر پری قیمت کے جواب میں ہے مطلوبہ عدد ہے۔
چونکہ $\frac{1}{p}$ کے لحاظ سے مفرد ہے اسلئے ک پ کا ضعف نہیں ہے۔
ہیں ماضل ہوتا ہے

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \dots + \frac{1}{p^r} + \frac{1}{p^r} \times \text{ج ر}$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \dots + \frac{1}{p^r} + \frac{1}{p^r} \times \text{ج ر}$$

$$\left\{ \dots + \frac{1}{p^{r+1}} + \frac{1}{p^{r+2}} + \dots \right\}$$

(308) اب چونکہ $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \dots + \frac{1}{p^r} + \frac{1}{p^r} \times \text{ج ر}$ کا انتہائی مجموعہ $\left\{ \dots + \frac{1}{p^{r+1}} + \frac{1}{p^{r+2}} + \dots \right\}$

کے انتہائی مجموعہ سے یا م فو سے کم ہے اس لئے اس انتہائی مجموعہ کو م فو سے تعبیر کیا جاسکتا ہے جہاں ۰ > طر، ۱۔ اب ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$k \text{ پر } m \text{ نو} = \{m \text{ نو} + (m) \text{ فہ} + \dots + (m) \text{ فہ} + (m) \text{ فہ} + (m) \text{ فہ}\}$$

۱۔ پ + پ = پ
۲۔ پ + ج = ج
۳۔ ج + ج = ج
۴۔ ج + پ = پ
۵۔ پ + پ = پ
۶۔ پ + ج = ج
۷۔ ج + ج = ج
۸۔ ج + پ = پ
۹۔ پ + پ = پ
۱۰۔ پ + ج = ج
۱۱۔ ج + ج = ج
۱۲۔ ج + پ = پ
۱۳۔ پ + پ = پ
۱۴۔ پ + ج = ج
۱۵۔ ج + ج = ج
۱۶۔ ج + پ = پ
۱۷۔ پ + پ = پ
۱۸۔ پ + ج = ج
۱۹۔ ج + ج = ج
۲۰۔ ج + پ = پ
۲۱۔ پ + پ = پ
۲۲۔ پ + ج = ج
۲۳۔ ج + ج = ج
۲۴۔ ج + پ = پ
۲۵۔ پ + پ = پ
۲۶۔ پ + ج = ج
۲۷۔ ج + ج = ج
۲۸۔ ج + پ = پ
۲۹۔ پ + پ = پ
۳۰۔ پ + ج = ج
۳۱۔ ج + ج = ج
۳۲۔ ج + پ = پ
۳۳۔ پ + پ = پ
۳۴۔ پ + ج = ج
۳۵۔ ج + ج = ج
۳۶۔ ج + پ = پ
۳۷۔ پ + پ = پ
۳۸۔ پ + ج = ج
۳۹۔ ج + ج = ج
۴۰۔ ج + پ = پ
۴۱۔ پ + پ = پ
۴۲۔ پ + ج = ج
۴۳۔ ج + ج = ج
۴۴۔ ج + پ = پ
۴۵۔ پ + پ = پ
۴۶۔ پ + ج = ج
۴۷۔ ج + ج = ج
۴۸۔ ج + پ = پ
۴۹۔ پ + پ = پ
۵۰۔ پ + ج = ج
۵۱۔ ج + ج = ج
۵۲۔ ج + پ = پ
۵۳۔ پ + پ = پ
۵۴۔ پ + ج = ج
۵۵۔ ج + ج = ج
۵۶۔ ج + پ = پ
۵۷۔ پ + پ = پ
۵۸۔ پ + ج = ج
۵۹۔ ج + ج = ج
۶۰۔ ج + پ = پ
۶۱۔ پ + پ = پ
۶۲۔ پ + ج = ج
۶۳۔ ج + ج = ج
۶۴۔ ج + پ = پ
۶۵۔ پ + پ = پ
۶۶۔ پ + ج = ج
۶۷۔ ج + ج = ج
۶۸۔ ج + پ = پ
۶۹۔ پ + پ = پ
۷۰۔ پ + ج = ج
۷۱۔ ج + ج = ج
۷۲۔ ج + پ = پ
۷۳۔ پ + پ = پ
۷۴۔ پ + ج = ج
۷۵۔ ج + ج = ج
۷۶۔ ج + پ = پ
۷۷۔ پ + پ = پ
۷۸۔ پ + ج = ج
۷۹۔ ج + ج = ج
۸۰۔ ج + پ = پ
۸۱۔ پ + پ = پ
۸۲۔ پ + ج = ج
۸۳۔ ج + ج = ج
۸۴۔ ج + پ = پ
۸۵۔ پ + پ = پ
۸۶۔ پ + ج = ج
۸۷۔ ج + ج = ج
۸۸۔ ج + پ = پ
۸۹۔ پ + پ = پ
۹۰۔ پ + ج = ج
۹۱۔ ج + ج = ج
۹۲۔ ج + پ = پ
۹۳۔ پ + پ = پ
۹۴۔ پ + ج = ج
۹۵۔ ج + ج = ج
۹۶۔ ج + پ = پ
۹۷۔ پ + پ = پ
۹۸۔ پ + ج = ج
۹۹۔ ج + ج = ج
۱۰۰۔ ج + پ = پ

ہائیں جانب کی پہلی رقم ایک مثبت یا منفی صحیح عدد ہے جو پ سے تقسیم پذیر ہے اور دوسری رقم عدد آ

الماء = پ + پ + ا - ج ا م

$$\left\{ (m+1) \cdots (m+r)(m+1) \right\} \frac{1-p}{1-p^{m+1}} \geq 1$$

$$جواب: \frac{n^{p-1}}{1-p} \left\{ (n+1)(n+2) \dots (n+n) \right\}$$

اب یہ کو کافی بڑا لینے سے عدد

۱- پ \{ (n+n) \dots (2+n)(1+n)n \}

اتنا چھوٹا بنایا جاسکتا ہے جتنا ہم چاہیں۔ فرض کرو کہ گ، گپ کی وہ قیمت ہے جسکے پ استقدر بڑا ہے کہ

$$\frac{1-p}{1-p} \{ (1+n) (2+n) \dots (n+n) \} \{ 1+n+1+n+1+n+1 \}$$

$$+ \dots + \{ 1+n+1+n+1 \}$$

ایک سے کم ہے۔

پس میں حاصل ہوتا ہے کہ $(1+n+1+n+1) + \dots$

+ (1+n) تین عددوں کا مجموعہ ہے جنہیں سے ایک ایک صحیح عدد ہے جو پ سے تقسیم پذیر نہیں ہے اور دوسرا ایک صحیح عدد ہے جو پ سے تقسیم پذیر ہے اور تیسرا ایک عدد ہے جو ایک سے کم ہے اور یہ ناممکن ہے پس چونکہ نو مساوات
 $1+n+1+n+1+\dots+1+n=$

کی اصل نہیں ہو سکتا جسکے سرمنطق ہیں اس لئے وہ ایک علوی عدد ہے۔
 ۲۵۱ (ج) اگر π بغرض امکان ایک جبری مساوات کی اصل ہو جسکے سرمنطق ہیں تو π بھی ایسی مساوات کی اصل ہو گا۔ مان لو کہ
 π مساوات

$$ج (1-n) (2-n) \dots (n-n) = (1-n) (2-n) \dots (n-n)$$

کی ایک اصل ہے جسکے سرمنطق ہیں اس طرح عددوں $1-n, 2-n, \dots, n-n$ میں سے ایک عدد π ہے۔

$$چونکہ $1-n = \pi$ اس لئے $(1+n) (2+n) \dots (n+n) = (1+n) (2+n) \dots (n+n)$$$

اب اجزائے ضربی کو باہم ضرب دے لینے کے بعد اسکی شکل ہے

$$1+n+1+n+1+\dots+1+n=$$

۲۵۳۔ اگر ہم تہا $\frac{1}{n} = \pi$ مس $\frac{1}{4} +$ مس $\frac{1}{16}$ استعمال کریں اور مس $\frac{1}{4}$ مس $\frac{1}{16}$ کی بجائے اُن کی قیمتیں گریگوری کے سلسلہ سے لیکر درج کریں تو

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4}\right) \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4}\right) \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{4}\right) \frac{1}{7} + \dots$$

$$+ \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right) \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right) \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{3}\right) \frac{1}{7} + \dots$$

اس کو یور کا سلسلہ کہتے ہیں۔

اسی تہا سے ایک دوسرے سلسلہ حاصل ہو سکتا ہے اگر مس $\frac{1}{4}$ اور مس $\frac{1}{16}$ کی بجائے اُن کی قیمتیں سلسلہ ذیل سے جو دفعہ ۲۱۹ میں حاصل کیا گیا تھا لیکر رکھی جائیں

$$\text{مس } \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots \right\} \frac{1}{5 \times 3} + \left\{ \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots \right\} \frac{1}{5 \times 3} + \dots$$

تب ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{4} + \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots \right\} \frac{1}{5 \times 3} + \left\{ \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots \right\} \frac{1}{5 \times 3} + \dots$$

$$+ \left\{ \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots \right\} \frac{1}{5 \times 3} + \left\{ \frac{1}{7} + \dots \right\} \frac{1}{5 \times 3} + \dots$$

۲۵۴۔ دوسرے سلسلے جو اسی طرح حاصل ہوئے ہیں مختلف محاسبوں نے استعمال کئے ہیں۔ کلاسن (Clausen) نے اپنا سلسلہ تہا $\frac{1}{n} = \pi$ مس $\frac{1}{4} +$ مس $\frac{1}{16}$ سے گریگوری کا سلسلہ استعمال کر کے حاصل کیا مینن (Machin) کا سلسلہ ضابطہ

$$\frac{1}{239} = \pi - \frac{1}{5} \text{ سن } - \frac{1}{5} \text{ سن } - \frac{1}{5} \text{ سن}$$

سے حاصل ہوا ہے۔ ڈیس (Dase) نے تماثلہ

$$\frac{1}{8} = \pi - \frac{1}{5} \text{ سن } - \frac{1}{5} \text{ سن } - \frac{1}{5} \text{ سن}$$

استعمال کی۔ مین کے سلسلہ کی ایک آسان تر شکل روٹہرفورڈ (Rutherford)

$$\frac{1}{49} = \pi - \frac{1}{5} \text{ سن } - \frac{1}{5} \text{ سن } - \frac{1}{5} \text{ سن} - \frac{1}{5} \text{ سن} - \frac{1}{5} \text{ سن}$$

استعمال کی۔ ہٹن (Hutton) نے یہ سلسلہ

$$\left\{ \dots + \frac{1}{10} \cdot \frac{2 \times 2}{5 \times 3} + \frac{1}{10} \times \frac{2}{3} + 1 \right\} 254 = \pi$$

$$\left\{ \dots + \left(\frac{2}{100} \right) \frac{2 \times 2}{5 \times 3} + \frac{2}{100} \times \frac{2}{3} + 1 \right\} 51 +$$

دیا جو لا سن لا کو $\frac{2}{100} + 1$ کی قوتوں میں پھیلا کر اس پھیلاؤ میں

لا = $\frac{1}{3}$ اور لا = $\frac{1}{5}$ رکھنے اور کلاس کی تماثلہ استعمال کرنے سے حاصل

ہوا ہے۔

یولر نے یہ سلسلہ

$$\left\{ \dots + \left(\frac{2}{100} \right) \frac{2 \times 2}{5 \times 3} + \left(\frac{2}{100} \right) \frac{2}{3} + 1 \right\} \frac{28}{10} = \pi$$

$$\left\{ \dots + \left(\frac{144}{100000} \right) \frac{2 \times 2}{5 \times 3} + \left(\frac{144}{100000} \right) \frac{2}{3} + 1 \right\} \frac{30336}{100000} +$$

دیا ہے جو تھانکہ

$$\frac{3}{2} \pi = \frac{1}{2} \pi + \frac{1}{2} \pi + \frac{1}{2} \pi$$

سے اخذ ہو سکتا ہے۔

ڈبلیو شہانکس (W. Shanks) نے π کی قیمت اعشاریہ کے ۷۰۰ مقامات تک محسوب کی ہے۔

لارڈ براؤنکر (Lord Brouncker) رائل سوسائٹی کے پہلے صدر نے

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \dots$$

یہ کسر معمولی قاعدے سے گرگوری کے سلسلہ $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$ کو مستحیل کرنے سے حاصل ہوئی ہے۔ سٹرن (Stern) نے مسلسل کسر

$$\frac{1}{\pi} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \dots$$

دیا ہے۔

دائرہ کی تربیع کے مضمون کی تاریخ کا ایک دلچسپ تذکرہ انسائیکلو پیڈیا

بریٹانیکا اشاعت نمبر میں مقالہ "Squaring of the circle" میں لیا گیا۔

نیز ریچرڈ شیکسپیر کا مقالہ "On the quadrature of the circle 1580-1630" مسجرف آف

میٹھائیٹکس جلد سوم میں۔

مثلثی تماثلات

۲۵۵۔ دفعہ ۱۹۰ مثال (۵) کی طرح یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ مقدار
'ا' 'ب' 'ج' کی کسی تعداد کے درمیان کسی مثلث جبری رشتہ
ف (ا' 'ب' 'ج') = ۰ سے دو متناظر مثلثی تماثلات اخذ ہو سکتے ہیں

یا = $\frac{\text{جب (ط - ہ) جب (ط - ج)}}{\text{جب (ع - ی) جب (ع - ج)}}$ {جم ۲ (ط - ع) + خر جب ۲ (ط - ع)}
 پس ہر کسر کو اس طریقہ پر مستقیم کرنے اور خر کے کسر کو صفر کے مساوی رکھنے سے
 ثابت شدنی متاثرہ حاصل ہوتی ہے۔

سلسلوں کا جمع کرنا

۲۵۶ — جب کسی محدود یا غیر محدود سلسلہ

$$ا + ا + ا + ا + ا + ا + \dots$$

کا مجموعہ معلوم ہو تو سلسلوں

$$ا + جم ع + ا + لا جم (ع + ط) + ا + لا جم (ع + ط) + \dots$$

$$ا + جب ع + ا + لا جب (ع + ط) + ا + لا جب (ع + ط) + \dots$$

کے مجموعے میں اور میں اخذ ہو سکتے ہیں۔

$$\text{فرض کرو ف (لا) = } ا + ا + ا + ا + ا + \dots$$

$$\text{تو } ف (لا خط) = س + خر میں$$

$$\text{اور نیز } ف (لا خط) = س - خر میں$$

$$\text{اس لئے } س = \frac{1}{2} \{ ف (لا خط) + ف (لا خط) - ف (لا خط) \}$$

$$\text{اور } س = \frac{1}{2} \{ ف (لا خط) - ف (لا خط) + ف (لا خط) \}$$

اس طرح میں، اور میں، کی جو قیمتیں حاصل ہوں ان کو اب حقیقی شکل میں تبدیل کیا جاسکتا ہے۔

مثالیں

(۱) جمع کرد سلسلہ

$$\text{جم} + \text{لاجم} + (\text{ع} + \text{ب}) + \text{لاجم} + (\text{ع} + ۲\text{ب}) + \dots + \text{لاجم} + (\text{ع} + (ن-۱)\text{ب})$$

$$\text{اب } ۱ - \frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\text{لا} - ۱} = ۱ + \text{لا} + \text{لا}^۲ + \dots + \text{لا}^{\text{ن}-۱}$$

اسیں لا کو لا خو^۲ میں تبدیل کرو اور خو^۲ سے ضرب دو تو

$$\text{خو}^{\text{ع}+۱} - \text{لا}^{\text{ن}} \text{خو}^{\text{ن}} + \text{خو}^{\text{ع}+۲} + \text{خو}^{\text{ع}+۳} + \dots + \text{لا}^{\text{ن}-۲} \text{خو}^{\text{ع}+۲} + \text{لا}^{\text{ن}-۱} \text{خو}^{\text{ع}+۱} = \frac{\text{لا}^{\text{ن}} \text{خو}^{\text{ن}} + \text{خو}^{\text{ع}+۱}}{\text{لا}^{\text{ن}} \text{خو}^{\text{ن}} - ۱}$$

$$\dots + \text{لا}^{\text{ن}-۱} \text{خو}^{\text{ع}+۱} + \text{لا}^{\text{ن}} \text{خو}^{\text{ع}+۱}$$

اور اسی طرح

$$\text{خو}^{\text{ع}+۱} - \text{لا}^{\text{ن}} \text{خو}^{\text{ن}} + \text{خو}^{\text{ع}+۲} + \text{خو}^{\text{ع}+۳} + \dots + \text{لا}^{\text{ن}-۲} \text{خو}^{\text{ع}+۲} + \text{لا}^{\text{ن}-۱} \text{خو}^{\text{ع}+۱} = \frac{\text{لا}^{\text{ن}} \text{خو}^{\text{ن}} + \text{خو}^{\text{ع}+۱}}{\text{لا}^{\text{ن}} \text{خو}^{\text{ن}} - ۱}$$

$$\dots + \text{لا}^{\text{ن}-۱} \text{خو}^{\text{ع}+۱} + \text{لا}^{\text{ن}} \text{خو}^{\text{ع}+۱}$$

اسلئے دی ہوئے سلسلہ کا مجموعہ ہے

$$\left\{ \frac{\text{خو}^{\text{ع}+۱} - \text{لا}^{\text{ن}} \text{خو}^{\text{ن}}}{\text{لا}^{\text{ن}} \text{خو}^{\text{ن}} - ۱} + \frac{\text{خو}^{\text{ع}+۱} - \text{لا}^{\text{ن}} \text{خو}^{\text{ن}}}{\text{لا}^{\text{ن}} \text{خو}^{\text{ن}} - ۱} \right\} \frac{۱}{۲}$$

$$یا \frac{1}{۲} \frac{خء (۱- لا خو بن) (۱- لا خو بن) + خء (۱- لا خو بن) (۱- لا خو بن)}{(۱- لا خو بن) (۱- لا خو بن)}$$

$$جو = \frac{جمء - لا جم (ع - ب) - لا جم (ع + ب) + لا جم (ع + ب) + لا جم (ع + ب)}{۱ - لا جم ب + لا}$$

(۲) جمع کرد لاتنا ہی سلسلہ

$$جب ع + لا جب (ع + ب) + \frac{لا جب (ع + ب)}{۲} + \dots + \frac{لا جب (ع + ب)}{ن} \\ اب \quad خو = ۱ + لا + \frac{لا}{۲} + \dots + \frac{لا}{ن} + \dots$$

اسیں لا کی بجائے لا خو رکھو اور خو سے ضرب دو تو

$$لا خو خء خء خء = خو + لا خو خء + \frac{لا خو خء (ع + ب)}{۲} + \dots + \frac{لا خو خء (ع + ب)}{ن}$$

اور اسی طرح

$$لا خو خء خء خء = خو + لا خو خء + \frac{لا خو خء (ع + ب)}{۲} + \dots + \frac{لا خو خء (ع + ب)}{ن}$$

پس دیکے ہوئے سلسلہ کا مجموعہ ہے

$$\frac{1}{۲} \{ لا خو خء خء - لا خو خء - خء \}$$

(814)

$$یا \frac{1}{۲} \frac{خو (لا جب ب + ع) - خو (لا جب ب + ع)}{خو (لا جب ب + ع) - خو (لا جب ب + ع)}$$

$$جو = \frac{خو (لا جب ب + ع) - خو (لا جب ب + ع)}{خو (لا جب ب + ع) - خو (لا جب ب + ع)}$$

۲۵۔ اب ہم چند مثالیں دینگے جن سے یہ معلوم ہوگا کہ دائری تفاعل کچھ قوت نامائی جیسے کس طرح جلوں کو سلسلوں میں پھیلانے میں کام آتے ہیں۔
(۱) (۱-۲ لاجم طہ + لا^۱) کو لا کی قوتوں کے ایک سلسلے

میں پھیلانا جہاں لا ایک سے کم ہے۔ اب

$$(۱-۲ لاجم طہ + لا^۱) = (۱- لا^{خط} طہ) - (۱- لا^{قوت} طہ) - (۱- لا^{خط} طہ)$$

اسکو جزوی کسرات میں بیان کرنے سے وہ

$$= \frac{۱}{۲ خجب طہ} \left(\frac{لا^{خط} طہ}{(۱- لا^{قوت} طہ)} - \frac{لا^{خط} طہ}{(۱- لا^{خط} طہ)} \right)$$

اور ہر کسر کو لا کی قوتوں میں پھیلانے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{۱}{۲ خجب طہ} (لا^{خط} طہ + لا^{قوت} طہ + لا^{خط} طہ + لا^{قوت} طہ + لا^{خط} طہ + لا^{قوت} طہ + ...)$$

$$- \frac{۱}{۲ خجب طہ} (لا^{خط} طہ + لا^{قوت} طہ + لا^{خط} طہ + لا^{قوت} طہ + لا^{خط} طہ + لا^{قوت} طہ + ...)$$

جو = قم طہ (جب طہ + لاجب طہ + لاجب طہ + لاجب طہ + ... + لاجب طہ + ...)
اسی طرح یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ

$$\frac{۱- لا^۱}{۲ لاجم طہ + لا^۱} = ۱ + ۲ لاجم طہ + ۲ لاجم طہ + ... + ۲ لاجم طہ + لا^۱ لاجم طہ + ...$$

(۲) لوک^۱ (۱+۲ لاجم طہ + لا^۱) کو لا کی قوتوں میں پھیلانا جہاں

لا ایک سے کم ہے۔ چونکہ
لوک^۱ (۱+۲ لاجم طہ + لا^۱) = لوک^۱ (۱+ لا^{قوت} طہ) + لوک^۱ (۱+ لا^{خط} طہ)

اس لئے بائیں جانب کے ہر لوکار تم کو پھیلا نے سے دفعہ ۲۵۰ کا ضابطہ
(۹) حاصل ہوتا ہے۔

(۳) $\text{قو}^{\text{لا}}$ جب (ب + لا + ج) کو پھیلا نے کے لئے ہم لکھ سکتے ہیں جملہ

$$\frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \text{خرج} (1 + \text{خریب}) \text{ لا} - \text{خرج} (1 - \text{خریب}) \text{ لا} \\ \text{قو}^{\text{لا}} - \text{قو}^{\text{لا}} \end{array} \right\}$$

اب اگر ہم $\text{قو}^{\text{لا}}$ + خریب لا $\text{قو}^{\text{لا}}$ - خریب لا کو لا کی قوتوں میں پھیلائیں تو لا
کا سر ملتا ہے

$$\frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \text{خرج} (1 + \text{خریب}) \text{ ن} - \text{خرج} (1 - \text{خریب}) \text{ ن} \\ \text{قو}^{\text{لا}} - \text{قو}^{\text{لا}} \end{array} \right\}$$

فرض کرو کہ $\frac{1}{2} = \text{مس ع}$ تو یہ جملہ ہو جاتا ہے

(15)

$$\frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \text{خرج} (1 + \text{خریب}) \text{ ن} - \text{خرج} (1 - \text{خریب}) \text{ ن} \\ \text{قو}^{\text{لا}} - \text{قو}^{\text{لا}} \end{array} \right\}$$

$$\frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \text{خرج} (1 + \text{خریب}) \text{ ن} - \text{خرج} (1 - \text{خریب}) \text{ ن} \\ \text{قو}^{\text{لا}} - \text{قو}^{\text{لا}} \end{array} \right\}$$

پس یہ جملہ مطلوبہ پھیلاؤ میں لا کا سر ہے۔

(۴) اگر یہ دیا جائے کہ جب لا = ن جب (لا + ع) تو لا کون
کی قوتوں میں پھیلاؤ جہاں $ن > ۱$ ۔

$$\text{چونکہ } \text{قو}^{\text{لا}} - \text{قو}^{\text{لا}} = \text{ن} \left\{ \begin{array}{l} \text{خرج} (1 + \text{خریب}) \text{ لا} - \text{خرج} (1 - \text{خریب}) \text{ لا} \\ \text{قو}^{\text{لا}} - \text{قو}^{\text{لا}} \end{array} \right\}$$

$$\text{قو}^{\text{لا}} - ۱ = \text{ن} \left\{ \begin{array}{l} \text{خرج} (1 + \text{خریب}) \text{ لا} - \text{خرج} (1 - \text{خریب}) \text{ لا} \\ \text{قو}^{\text{لا}} - \text{قو}^{\text{لا}} \end{array} \right\}$$

$$\text{اسلئے} \quad \frac{\text{خلا}^2}{\text{ن} - 1} = \frac{\text{ن} - 1}{\text{ن} - 1} \text{خء}$$

لو کارتم لینے اور بائیں جانب کو پھیلائے سے

$$2 \text{ خء (لا + ک ۷)} = \text{ن} (\text{خء} - \text{خء}) + \frac{\text{ن}^2}{4} (\text{خء} - \text{خء}) + \dots$$

$$\text{پس لا + ک ۱۱} = \text{ن جب عء} + \frac{1}{4} \text{ن جب عء} + \frac{1}{16} \text{ن جب عء} + \dots$$

جہاں ک ایک صحیح عدد ہے۔

اگر ب، ایک مثلث کا زاویہ ہو اور ا سے کم ہو تو ہم ب کے دائری ناپ کو $\frac{1}{4}$ کی قوتوں میں پھیلا سکتے ہیں۔ چونکہ

$$\text{جب ب} = \frac{1}{4} \text{ جب (ب + ج)}$$

$$\text{اسلئے ب} = \frac{1}{4} \text{ جب ج} + \frac{1}{4} \frac{1}{4} \text{ جب ج} + \frac{1}{16} \frac{1}{4} \text{ جب ج} + \dots$$

کیونکہ اس صورت میں ک = ۰۔

پندرہویں باب پر مثالیں

۱۔ ثابت کرو کہ $\frac{1 + \text{بی}}{2 - 1 \text{ حجم فء ی}}$ کے پھیلاؤ میں جبکہ اسکوی کی قوتوں میں

پھیلا جائے عام رقم ہے

$$\frac{(1 + \text{ن}) \text{ قء} + \text{ب جب ن فء ی}}{\text{جب فء ی}}$$

اور $\frac{1 + \text{بی}}{(1-2) \text{بی جم نہ} + 2}$ کے پھیلاؤ میں عام رقم ہے

$$\frac{(3 + \text{بی}) \text{جب} (1 + \text{نہ}) - (1 + \text{نہ}) \text{جب} (3 + \text{نہ})}{\text{بی}} + \frac{(2 + \text{نہ}) \text{جب} \text{نہ} - \text{نہ} \text{جب} (2 + \text{نہ})}{\text{بی}}$$

(یولر)

(316)

۲۔ اگر بس لا = $\frac{\text{ن جب ع}}{\text{ن جم ع}}$ تو ثابت کرو کہ

لا = ن جب ع + $\frac{1}{4}$ ن جب ۲ ع + $\frac{1}{16}$ ن جب ۳ ع + ...

جبکہ ن ایک سے کم ہے۔

۳۔ اگر مم ما = مم لا + قم ع قم لا تو ثابت کرو کہ

ما = جب لا جب ع - $\frac{1}{4}$ جب ۲ لا جب ۲ ع + $\frac{1}{16}$ جب ۳ لا جب ۳ ع + ...

۴۔ اگر مس $\frac{1}{4}$ ط = $\left(\frac{1+1}{1-1} \right) \frac{1}{4}$ مس $\frac{1}{4}$ ف تو ثابت کرو کہ

ط = ف + ۲ لا جب ف + $\frac{1}{2}$ لا جب ۲ ف + $\frac{1}{4}$ لا جب ۳ ف + ...

جہاں $ل = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4} \right) ۲ + \left(\frac{1}{4} \right) ۳ + \left(\frac{1}{4} \right) ۴ + \dots$

۵۔ اگر مس ط = لا + مس ع تو ثابت کرو کہ

ط = ع + لا جم ع - $\frac{1}{4}$ لا جم ۲ ع - $\frac{1}{16}$ لا جم ۳ ع + ...

+ $\frac{1}{64}$ لا جم ۴ ع + ...

۶۔ اگر $(1+m)$ مس طہ $= (1-m)$ مس فہ جبکہ طہ اور فہ مثبت
سادہ زاوے ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\text{طہ} = \text{فہ} - m \text{ جب } 2 \text{ فہ} + \frac{1}{m} m \text{ جب } 4 \text{ فہ} - \frac{1}{m} m \text{ جب } 6 \text{ فہ} + \dots$$

۷۔ اگر مس عہ $=$ جم ۲ سے مس لہ تو ثابت کرو کہ
لہ $=$ عہ $=$ مس ۲ سے جب ۲ عہ $+$ $\frac{1}{m}$ مس ۴ سے جب ۴ عہ $+$ $\frac{1}{m}$ مس ۶ سے جب ۶ عہ $+$ \dots

۸۔ اگر جب لا $=$ ن جم (لا عہ) تو لاکون کی سعودی قوتوں میں پھیلاؤ

۹۔ ثابت کرو کہ $(1-2 \text{ لا جم طہ} + \text{لا}^2)$ کے پھیلاؤ میں لا کا سر ہے

۲ $\left\{ \frac{1}{m} \text{ جم پ طہ} + \frac{1}{m} \text{ پ} - \frac{1}{m} \text{ جم (پ-۲ طہ)} + \frac{1}{m} \text{ پ} - \frac{1}{m} \text{ جم (پ-۴ طہ)} + \dots \right\}$
جہاں 'م' (لا) کے پھیلاؤ میں لا کا سر ہے۔

$$10. \text{ ثابت کرو کہ } \sum_{n=0}^{\infty} 18 = \frac{2}{11} = \frac{\frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2}}{2 + n \cdot 2}$$

۱۱۔ ثابت کرو کہ کسی مثلث میں

$$\text{لوک ج} = \text{لوک } 1 - \frac{1}{2} \text{ جم ج} - \frac{1}{2} \text{ جم ج} - \frac{1}{3} \text{ جم ج} - \frac{1}{3} \text{ جم ج} - \dots$$

یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ ب، ا سے کم ہے۔

۱۲۔ اگر مساوات $1 \text{ لا}^2 + \text{ب لا} + \text{ج} = 0$ کی اصلیں خیالی ہوں تو

ثابت کرو کہ $(1 \text{ لا}^2 + \text{ب لا} + \text{ج})$ کے پھیلاؤ میں لا کا سر ہے

$$\frac{\frac{n}{2} \text{ جب } (1+n) \text{ طہ}}{\frac{1}{2} + n \cdot \frac{1}{2} \text{ جب طہ}}$$

جہاں طہ مساوات ب قط طہ + ۲ اوج = سے حاصل ہوا ہے۔

۱۳۔ اگر پ = $\frac{(1+n)^2 \text{ جم طہ} + (n-1)^2 \text{ جب طہ}}{(1+n)^2 \text{ جم طہ} + (n-1)^2 \text{ جب طہ}}$ تو لوک پ کو طہ جفت نیغوں کی جیوب التمام کے ایک سلسلہ میں پھیلاؤ۔

۱۴۔ لوک جو جم (طہ + $\frac{1}{\pi}$) کو طہ کے نیغوں کی جیوب اور جیوب التمام کے ایک سلسلہ میں پھیلاؤ۔

(317) ۱۵۔ ثابت کرو کہ
$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots$$

۱۶۔ ثابت کرو کہ
$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \dots = \frac{(1+\sqrt{2})\pi}{8}$$

۱۷۔ $(1-\sqrt{2})$ کی سب قیمتیں معلوم کرو۔

۱۸۔ ثابت کرو کہ $(1+\sqrt{2})$ مس (نہ) لوک (نقطہ) نہ $\sqrt{2}$ ایک حقیقی عدد ہے اور اسکی قیمت معلوم کرو۔

۱۹۔ اگر وجم طہ + ب جب طہ = ج جہاں ج < $(\sqrt{2} + \sqrt{2})$ تو ثاب

طہ = $(1+n)\frac{\pi}{4} + \text{لوک جو } \frac{ج + \sqrt{2} - \sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{2}}$ مس $\frac{1}{\sqrt{2}}$

۲۰۔ لا + ۱ کے اس جملہ سے جو اجزائے ضربی ہیں یہ اخذ کرو کہ جب ن

جہاں n ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

۲۶۔ اگر $\text{لوک} \times \text{لوک} \times \text{لوک} = (ع + خ + ب) = ن + خ + ق$

تو $\text{نوٹ جم} \times \text{نوٹ جم} = \frac{۲}{۳} \text{لوک} = (ع + ب + ۲)$

اور $\text{نوٹ جب} \times \text{جب} = (نوٹ جب ق) = مس + ۱$

۲۷۔ اگر $\text{نوٹ جم} \text{ لا کو لا کی معودی قوتوں میں پھیلا یا جائے تو ثابت کرو کہ}$ (18)

لا کا سر $\frac{۱}{۲} \times \text{جم} = \frac{۱}{۳} \text{ن}$ ہے۔

۲۸۔ ثابت کرو کہ

$\frac{۱}{(۱ + \text{نوٹ جم ط})} = \frac{۱}{۲} \text{قط} + \frac{۱}{۳} \text{قط} + \dots + \frac{۱}{(۱ - ۲)} \text{قط} + \frac{۱}{(۱ + \text{جم} ۲)} \text{جم} + \dots$

جہاں ۲ جب ۱ کو ۱ کم سے کم مثبت قیمت ہے۔

۲۹۔ ثابت کرو کہ سلسلہ

$\frac{۱}{(۱ + ۲) \dots ۵ \times ۳ \times ۱} - \frac{۱}{(۳ + ۲) \dots ۴ \times ۵ \times ۳} + \dots$ تک

کو شکل $\frac{۱}{(۱ + ۲) \dots ۵ \times ۳ \times ۱}$ میں بیان کیا جاسکتا ہے جہاں ۱ بم ۱ جم

صحیح عدد ہیں اور

$\frac{۱}{۲ - ۲} = \text{جم} = \frac{(۱ - ۲) \dots ۵ \times ۳ \times ۱}{(۱ - ۲)}$

۳۰۔ ثابت کرو کہ

$\text{جب} \text{ ط جم} \text{ ن} = \text{جب} \text{ ن جم} \text{ ن ط} + \text{جب} \text{ ن جم} \text{ ن} - ۱$ جب $(ط - ۱)$

$$+ \frac{n(n-1)}{2} \text{ جب } 2^{\text{ن}} \text{ فہم } (n-2) \text{ ط جب } 1^{\text{ط}} \text{ (نہ) } + \dots + \text{جب } 1^{\text{ط}} \text{ (نہ)}$$

جہاں n ایک مثبت صحیح عدد ہے۔
۳۱ - ثابت کرو کہ متماثل

$$\text{جم } 2^{\text{عہ}} = \frac{\text{جب } 1^{\text{ط}} (عہ + عہ + عہ + عہ + عہ)}{\text{جب } 1^{\text{ط}} (عہ - عہ) \text{ جب } 1^{\text{ط}} (عہ - عہ) \text{ جب } 1^{\text{ط}} (عہ - عہ)}$$

$$32 - \text{ثابت کرو کہ } 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \dots = \frac{\pi}{4}$$

۳۳ - سن (جم ط + خ جب ط) کو شکل ۱ + ط ب میں تجویز کرو اور اسے ثابت کرو کہ

جم ط - $\frac{1}{2}$ جم ۳ ط + $\frac{1}{5}$ جم ۵ ط - $\dots = \frac{\pi}{4}$
جہاں اوپر کی یا نیچے کی علامت لسی جائے ہو جب اس کے لیے کہ جب ط مثبت ہے یا منفی

۳۴ - ثابت کرو کہ لوک (۱ + جم ۲ ط + خ جب ۲ ط) کی ایک قیمت

لوک (۲ جم ط) + خ ط ہے جبکہ ط - $\frac{1}{3}$ اور $\frac{1}{3}$ کے درمیان واقع ہو۔
۳۵ - گریگورین کا سلسلہ اتد کرو۔

ثابت کرو کہ بنت (جم ط + خ جب ط) کی ایک قیمت ہے

$$\text{جم } 1^{\text{ط}} \text{ ط + خ لوک } (1 - 1^{\text{ط}} \text{ ط} + 1^{\text{ط}} \text{ ط} - 1^{\text{ط}} \text{ ط} + \dots)$$

جبکہ ط، مفروضہ $\frac{1}{2}$ سے درمیان واقع ہو۔

۳۵ - سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ کی قوت $(1+n^2)$ جب $(1+n^2)$ کا مجموعہ معلوم کرو جہاں

$$1^{\text{ن}} = \frac{1}{3+n^2} - \frac{1}{1+n^2} - \frac{2}{1+n^2}$$

۳۶ - کسی شلت میں اگر ۱ حج ثابت کرو کہ

$$\text{جم } \frac{n}{b} = \frac{1}{c} \left\{ 1 + n \frac{1}{c} \text{ جم } b + \frac{n(n+1)}{2} \frac{1}{c} \text{ جم } \frac{1}{2} b \right\}$$

$$\left\{ \dots + \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \frac{1}{c} \text{ جم } \frac{1}{3} b + \dots \right\}$$

(319)

۳۷ - ثابت کرو کہ

$$(\text{مست } لا) = لا^2 - \frac{1}{1} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) + لا^2 \left(\frac{1}{3} + 1 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + 1 \right) + لا^2 \dots$$

$$\dots + \frac{(1-n)}{n} \left(\frac{1}{1-n^2} + \dots + \frac{1}{2} + 1 \right) + لا^2 \dots$$

جہاں لا ± ۱ کے درمیان واقع ہے۔

$$۳۸ - \text{اگر } ۶ = \text{لوک موس} \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = لا + لا^2 + لا^3 + لا^4 + \dots$$

$$\text{ثابت کرو کہ } لا = ۶ - لا^2 + لا^3 - لا^4 + لا^5 - \dots$$

$$۳۹ - \text{مس } \left\{ \text{خرج لوک } \frac{1}{1+x} - x \right\} \text{ کو منطبق بناؤ۔}$$

۴۰ - ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جم } لا}{(1-n)} + \frac{\text{جم } لا^2}{(1-n)^2} + \dots + \frac{\text{جم } لا^n}{(1-n)^n} =$$

$$\frac{1}{(1-n)^2} - \frac{(1-n)^{1-n}}{n^2} =$$

۴۱ - اگر n ایک مثبت صحیح عدد ہو اور

حسب ذیل قیمتوں کے جٹوں میں سے کسی سے پوری ہوتی ہیں :-

لا: ما: ی = جب $\frac{1}{p}$ (یہ - جب): جب $\frac{1}{p}$ (جہ - ع): جب $\frac{1}{p}$ (عہ - یہ):

یا = جب $\frac{1}{p}$ (بہ - جب): جم $\frac{1}{p}$ (یہ - ع): جم $\frac{1}{p}$ (نہ - یہ):

یا = جم $\frac{1}{p}$ (بہ - جب): جب $\frac{1}{p}$ (جہ - ع): جم $\frac{1}{p}$ (عہ - یہ):

یا = جم $\frac{1}{p}$ (یہ - جب): جم $\frac{1}{p}$ (جہ - ع): جب $\frac{1}{p}$ (عہ - یہ):

۴۷ - اگر طہ کی مختلف قیمتیں طہ^۱، طہ^۲، طہ^۳، طہ^۴ ہوں جو (320)
 ۱ جم ۲ طہ + ب جب ۲ طہ + ج جم طہ + ز جب طہ + ع =

کو پورا کرتی ہیں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{\text{جم س}} = \frac{\text{ب}}{\text{جب س}} = \frac{\text{ج}}{\text{جم (س-ط)}} = \frac{\text{د}}{\text{جب (س-ط)}} = \frac{\text{ع}}{\text{جم (ط-طہ-طہ-طہ-طہ)}}$$

جہاں ۲ س = ط^۱ + ط^۲ + ط^۳ + ط^۴

۴۸ - ثابت کرو کہ

(۱-) $\frac{1}{\text{مس ن}} = ۱ - \text{ن ق ط جم طہ} + \frac{\text{ن (ن-۱)}}{۲} \text{ق ط جم طہ} - \dots$ (ن جفت)

(۱-) $\frac{1}{\text{مس ن}} = \text{ن ق ط جم طہ} - \frac{\text{ن (ن-۱)}}{۲} \text{ق ط جم طہ} + \dots$ (ن طاق)

۴۹ - اگر جب^۱ لا = لا^۱ + لا^۲ + لا^۳ + ... تو ثابت کرو کہ سلسلہ

$$\text{لا}^۱ + \text{لا}^۲ + \text{لا}^۳ + \text{لا}^۴ + \text{لا}^۵ + \dots$$

کا مجموعہ $\frac{1}{p}$ {جم^۱ (لا^۱ + لا^۲ + لا^۳ + لا^۴ + لا^۵ + ...)} ہے۔

۵۰ - اگر مسادات لا^۱ + لا^۲ + لا^۳ + لا^۴ + لا^۵ + ... کی ان میں
 عہ، یہ، جہ، ... ہوں تو ثابت کرو کہ

۵۶۔ ثابت کرو کہ

$$\text{جب } ط^x \times \text{جب } ط - \frac{1}{4} \text{ جب } ط^2 \times \text{جب } ط + \frac{1}{16} \text{ جب } ط^3 \times \text{جب } ط - \dots$$

$$= \text{جم} (1 + \text{مم } ط + \text{مم}^2 ط)$$

(۳۳)

۵۷۔ ثابت کرو کہ

$$\text{لوگ } 1 + \text{مم} = \frac{1}{2} \text{ جب } ط^2 - \frac{1}{4} \text{ جب } ط^2 - \frac{1}{16} \text{ جب } ط^2 - \dots$$

۵۸۔ ثابت کرو کہ

$$\text{جم} (1 - ط) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{(2^n)} \times \frac{1}{(2^n)} + \dots$$

$$\{ \dots +$$

۵۹۔ ثابت کرو کہ سلسلہ

$$1 - \frac{1}{2} \text{ جم } ط + \frac{1}{4} \text{ جم } ط^2 - \frac{1}{8} \text{ جم } ط^3 + \frac{1}{16} \text{ جم } ط^4 - \dots$$

ہے جہاں ط = ± π کے درمیان واقع ہے۔

مثلاً ذیل کے لامتناہی سلسلوں کا مجموعہ معلوم کرو۔

$$1 - \text{جم } ط - \frac{1}{4} \text{ جم } ط^2 + \frac{1}{16} \text{ جم } ط^3 - \dots$$

$$1 - \frac{1}{2} \text{ جم } ط + \frac{1}{4} \text{ جم } ط^2 - \frac{1}{8} \text{ جم } ط^3 + \dots$$

$$1 - \text{جم } ط + \frac{1}{4} \text{ جم } ط^2 - \frac{1}{16} \text{ جم } ط^3 + \dots$$

$$1 - \text{جم } ط + \frac{1}{4} \text{ جم } ط^2 - \frac{1}{16} \text{ جم } ط^3 + \dots$$

$$+ \frac{1}{16} \text{ جم } ط^4 - \dots$$

$$۶۴- \text{جب ط} - \frac{۱}{۲} \text{جب ۳ ط} + \frac{۱}{۵} \text{جب ۵ ط} - \dots$$

$$۶۵- \frac{\text{جم ط}}{۳ \times ۲ \times ۱} + \frac{\text{جم ۲ ط}}{۲ \times ۳ \times ۲} + \frac{\text{جم ۳ ط}}{۵ \times ۲ \times ۳} - \dots$$

$$۶۶- \text{جم ع} + \frac{\text{جم (ع+۲)}}{۳} + \frac{\text{جم (ع+۴)}}{۵} - \dots$$

$$۶۷- \text{جم ط جم ذ} - \frac{۱}{۲} \text{جم ۲ ط جم ۲ ذ} + \frac{۱}{۳} \text{جم ۳ ط جم ۳ ذ} - \dots$$

$$۶۸- \text{مس ع جب ۲ لا} + \frac{\text{مس ع جب ۳ لا}}{۲} + \frac{\text{مس ع جب ۴ لا}}{۳} - \dots$$

$$۶۹- ۱ + \frac{\text{جم ط جم (جب ط)}}{۲} + \frac{\text{جم ۲ ط جم (۲ جب ط)}}{۲} + \frac{\text{جم ۳ ط جم (۳ جب ط)}}{۳} - \dots$$

$$۷۰- \text{جب ط} \times \text{جب ط} - \frac{۱}{۲} \text{جب ۱ ط} \times \text{جب ۲ ط} + \frac{۱}{۳} \text{جب ۲ ط} \times \text{جب ۳ ط} - \dots$$

$$\times \text{جب ۳ ط} - \dots$$

$$۷۱- \text{م جب ۱ ع} - \frac{۱}{۲} \text{م جب ۲ ع} + \frac{۱}{۳} \text{م جب ۳ ع} - \dots$$

$$۷۲- ۱ > ۱$$

سولہواں باب

زائدی تفاعلات

(322)

۲۵۸ — زائدی جیب التمام، جیب، ماس، ... کی تعریف پندرہواں باب میں مساواتوں

جزء = $\frac{1}{4}$ (قو + قو)، جزء = $\frac{1}{4}$ (قو - قو)، مسرع = جزء \ جزء

مزرع = ۱ \ مسرع، قطر = ۱ \ جزء، قمرع = ۱ \ جزء
کے ذریعہ ہو چکی ہے جہاں قوت نما قو، قو اپنی صدر قیمتیں رکھتے ہیں
یہ زائدی تفاعلات، خر کے دائری تفاعلوں کی رقوم میں حسب ذیل
مساواتوں کے ذریعہ بیان ہوتے ہیں :-

جزء = جم خر، جزء = - خر جب خر، مسرع = - خر مس خر،
مزرع = خر مم خر، قطر = خر خر، قمرع = خر قم خر

زائدی تفاعلوں کے درمیان رشتے

۲۵۹ — زائدی تفاعلوں کے درمیان حسب ذیل رشتے تعریفوں سے
فورا حاصل ہوتے ہیں :-

جزء = - جزء = ۱، (۱)

قطر a + منزع b = (۱) (۳)					
مربع b + قطر a = (۲) (۳)					
یہ رشتے دائری تفاعلوں کے درمیان حسب ذیل رشتوں					
جہ a + جب a = (۱) قطر a - منزع b = (۲) منزع b + قطر a = (۳)					
کے جواب میں ہیں اور انہیں ط = x رکھنے سے فوراً اندہ ہوتے ہیں					
رشتوں (۱)، (۲)، (۳) سے اور زائدی تفاعلوں کی قطعیتوں کی بدولت					
سے کسی بھی زائدی تفاعل کو کسی دوسرے زائدی تفاعل کی بدولت					
بیان کیا جاسکتا ہے۔ مثال حسب ذیل جدول میں دئے گئے ہیں۔					
(823)					
جزء = لا	منزع = لا	قطر = لا	مربع = لا	قطر = لا	منزع = لا
$\frac{b}{a+b}$	$\frac{b}{a-b}$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{a}{a-b}$	$\frac{1}{a+b}$	$\frac{1}{a-b}$
$\frac{a+b}{a}$	$\frac{a-b}{a}$	$\frac{1}{a+b}$	$\frac{1}{a-b}$	$\frac{1}{a+b}$	$\frac{1}{a-b}$
$\frac{a+b}{b}$	$\frac{a-b}{b}$	$\frac{1}{a+b}$	$\frac{1}{a-b}$	$\frac{1}{a+b}$	$\frac{1}{a-b}$
$\frac{a+b}{a}$	$\frac{a-b}{a}$	$\frac{1}{a+b}$	$\frac{1}{a-b}$	$\frac{1}{a+b}$	$\frac{1}{a-b}$
$\frac{a+b}{b}$	$\frac{a-b}{b}$	$\frac{1}{a+b}$	$\frac{1}{a-b}$	$\frac{1}{a+b}$	$\frac{1}{a-b}$
$\frac{a+b}{a}$	$\frac{a-b}{a}$	$\frac{1}{a+b}$	$\frac{1}{a-b}$	$\frac{1}{a+b}$	$\frac{1}{a-b}$
$\frac{a+b}{b}$	$\frac{a-b}{b}$	$\frac{1}{a+b}$	$\frac{1}{a-b}$	$\frac{1}{a+b}$	$\frac{1}{a-b}$

یہ ضابطے دو زائدی جیوب یا جیوب التمام کو جمع کرنے یا تفریق کرنے کے لیے ہیں

ضعفوں یا تحت ضعفوں کے ضابطے

۲۶۲۔ دائری تفاعلوں کے ضابطوں کے جواب میں ضعفوں یا تحت ضعفوں کے زائدی تفاعلوں کے درمیان مماثل رشتے، مثلاً (۵) اور (۶) سے اخذ کئے جاسکتے ہیں۔ چنانچہ

$$\text{جنر } ۲ = ۲ \text{ جنر } ۶ - \text{جنر } ۶$$

$$\text{جنر } ۶۲ = \text{جنر } ۶ + \text{جنر } ۶ = ۲ \text{ جنر } ۶ - ۱ = ۱ + ۲ \text{ جنر } ۶$$

$$\text{منر } ۶۲ = \frac{۲ \text{ منر } ۶}{۱ + \text{منر } ۶} \text{، جنر } ۶۳ = ۳ \text{ جنر } ۶ + ۴ \text{ جنر } ۶$$

$$\text{جنر } ۶۳ = ۲ \text{ جنر } ۶ - ۳ \text{ جنر } ۶$$

$$\text{منر } ۶۳ = \frac{۳ \text{ منر } ۶ + \text{منر } ۶}{۳ + ۱ \text{ منر } ۶} \text{، جنر } ۶۴ = \frac{۱ + \text{جنر } ۶}{۲}$$

$$\text{جنر } ۶۴ = \frac{۱ - \text{جنر } ۶}{۲} \text{، منر } ۶۴ = \frac{۱ - \text{جنر } ۶}{۱ + \text{جنر } ۶} = \frac{\text{جنر } ۶}{۱ + \text{جنر } ۶}$$

زائدی تفاعلوں کے سلسلے

۲۶۳۔ چونکہ $\text{قو} = \text{جنر } ۶ + \text{جنر } ۶$ ، $\text{قو} = \text{جنر } ۶ - \text{جنر } ۶$ اس لئے جنر ۶، جنر ۶ کے لئے سلسلے، قو کی قوتوں میں یہ ہیں

$$\text{جنر } ۶ = ۱ + \frac{۶}{۲} + \frac{۶}{۳} + \dots + \frac{۶}{۵} + \dots$$

دفعہ ۲۳۳ کے مطابق ہم دیکھتے ہیں کہ جنر ۶ = ۱ + ب، جنر ۶ = ۶ + ب

جہاں

$$|ب| > \frac{1}{4} |ا| \text{ تو } ' |س| > \frac{1}{4} |ا| \text{ تو } 'ا$$

(385)

نیز (جزء ± جزم) کی صدر قیمت ہمیشہ ہے

خواہ م کچھ ہی ہو، یہ دائری تفاعلوں کے لئے ڈیموآٹر کے مسئلہ کا جواب ہے۔ ہم اس مسئلہ کو بیان کر سکتے ہیں اس طرح

$$\text{جزم} = \frac{1}{4} \{ (\text{جزء} + \text{جزم}) + (\text{جزء} - \text{جزم}) \}$$

$$\text{جزم} = \frac{1}{4} \{ (\text{جزء} + \text{جزم}) - (\text{جزء} - \text{جزم}) \}$$

۲۶۴۔ ان آخری جملوں سے پھیلاؤ کے ذریعہ حاصل ہوتا ہے

$$\text{جزم} = \text{جزم}^2 + \frac{\text{جزم}^2 (1 - \text{جزم})}{3} + \text{جزم}^3 + \text{جزم}^4 + \dots$$

$$\text{جزم} = \text{جزم}^2 + \frac{\text{جزم}^2 (1 - \text{جزم})}{2} + \frac{\text{جزم}^2 (1 - \text{جزم}) (2 - \text{جزم})}{4} + \text{جزم}^3 + \dots$$

× جزم^۴ + ...
دائری تفاعلوں کی صورت کی مانند ان سلسلوں سے جزم ع،
جزم ع کے پھیلاؤ، جزم کی قوتوں میں حاصل کئے جاسکتے ہیں؛ لیکن
مختلف سردوں کو اکٹھا کر نیلے کام کو دہرانا غیر ضروری ہے کیونکہ ہم دفعہ
۲۱۴، چودھویں باب کے ضابطہ میں طہ کی بجائے جزء درج کر کے
نتیجہ کو فوراً حاصل کر سکتے ہیں۔ چنانچہ اس طرح حاصل ہوتا ہے

$$\text{جزم} = \text{جزم}^2 + \frac{\text{جزم}^2 (1 - \text{جزم})}{3} + \frac{\text{جزم}^2 (1 - \text{جزم}) (2 - \text{جزم})}{5} + \dots$$

جزء ۶ = $1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \dots$
 یہ سلسلے م کی تمام قیمتوں کے لئے درست ہیں بشرطیکہ وہ مستحق ہوں جو ہو
 اگر جزء ۶ ≥ 1 - اگر جزء ۶ = ۱ رکھا جائے تو

$$\times = \text{لوک (۲۷+۱)}$$

۲۶۵ - جزء ۶ کے سلسلے سے ۶ کے لئے ایک سلسلہ جزء کی
 قوتوں میں مانوڈ ہوتا ہے جیسا کہ دائرہ تفاعلوں کی صورت میں طے کیلئے
 اخذ کیا گیا تھا۔ چنانچہ م کی پہلی قوتوں کو مادی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$6 = \text{جزء} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \dots$$

یہ سلسلہ مستحق ہے اگر جزء ۶ ≥ 1 یا اگر ۶ $\geq \text{لوک (۲۷+۱)}$
 بالخصوص

$$\text{لوک (۲۷+۱)} = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \dots$$

زائدی تفاعلوں کی دوریت

(326)

۲۶۶ - تفاعلات جزء ۶، جزء ۶ خیالی دور ۲۲ خ رکھتے ہیں کیونکہ
 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

پس جزء ۶ = جزء (۶ + ۲ خ ۲ ک)

جزء ۶ = جزء (۶ + ۲ خ ۲ ک)

جہاں ک کوئی صحیح عدد ہے۔ چونکہ $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ - تو -

اس لئے جزء (۶ + ۲ خ ۲) = - جزء ۶

جزء (۶ + ۲ خ ۲) = - جزء ۶

اس لئے مسر (ع + خ π) = مسر
یا مسر کا دور خ π ہے جو جزو، جزو کے دور کا صرف
نصف ہے۔ دیکھو: $\frac{1}{4} \pi$ خ، $\frac{1}{2} \pi$ خ، $\frac{3}{4} \pi$ خ کے جواب میں
جزو، جزو، مسر کی حسب ذیل قیمتیں حاصل ہوتی ہیں:

	$\frac{1}{4} \pi$ خ	$\frac{1}{2} \pi$ خ	$\frac{3}{4} \pi$ خ	
جزو	۰	۰	۰	
جزو	۱	۰	۱	
مسر	۰	$\pi \times \infty$	۰	
جزو	∞	۰	∞	
قطر	۱	∞	۱	
مسر	∞	۰	∞	

جس طرح دائری تفاضل زائیدی کے سادہ ترین ایک دوری تفاضل ہیں
اسی طرح زائدی تفاضل قیالی دور کے سادہ ترین ایک دوری تفاضل
ہیں۔

قائم الزاویہ قطع زائد کے قطاع کا رقبہ

۲۶۷۔ زمرہ کر کے نیم قاع مجہول اور مرکز و کے ایک قائم الزاویہ زائد
پر کوئی نقطہ ہے اور فرض کرو کہ ق کا نصف ق ل ہے تب
قائم الزاویہ زائد کی خاصیت کی روت و ل = ق ل = و ل اب اگر ہم
فرض کریں و ل = ا جزو تو ق ل ق = ا جزو جہاں ا ہم کو مثبت
یا منفی لیتے ہیں ہو جب اس کے زمیں ل ا ق مثبت یا منفی طور پر ناپا
گیا ہو۔ اب ہم رقبہ ا ق پر غور کرتے ہیں جو و ل و ق اور صحنہ لی
توس ا ق سے محدود ہے۔ دائری قطاع کی صورت کے مطابق جو دفعہ
میں زیر بحث آچکی ہے ہم توس ا ق میں ایک کھٹا مستقیم الاضلاع

ان قیمتوں سے اور جب طہ ربا، جم طہ ربا کی متناظر قیمتوں سے ہمیں معلوم ہوتا ہے

$$\frac{\text{جب (طه - طه ر)} (\text{جب ر - طه ر})}{\text{جب ر (طه ر - طه ر)}} = \frac{\text{جب ر (طه ر - طه ر)}}{\text{جب ر (طه ر - طه ر)}}$$

اب و پ، ۱ = (جنم۲، عر۲ + جنم۲، عر۲) = ۱ جنم۲، عر۲

اور $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ جنرل ۲، ۱، ۱

اس لئے $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ (طرہ - طرہ)

$$= \frac{1}{2} (1 + \text{جینر}) (e_{1+} - e_{-})$$

پس اُس مستقیم الاضلاع کثیر الاضلاع کے رقبہ کا ناپ جو دوا' وق اور

اپ اپ... پ پ ق کے ضلعوں سے محدود ہے یہ ہے

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \text{ جنبر (عمر ۱-۶)}$$

جہاں ع۔ = ک۔ عن = ع۔ -

(328)

یہ ناپ دفعہ ۲۶۳ میں ثابت شدہ مسئلہ کی رو سے

$$\left\{ x^{p-1} + x^{p-2} (x - \frac{1}{x}) + (x - \frac{1}{x}) \right\}^{1-0} = \sum \frac{1}{x}$$

کے مساوی ہے جہاں اعداد اور سب کے سب $\frac{1}{p}$ سے کم ہیں۔
ضلع پیر پور کا طول ہے

$\{ (جمنع + ۱ - جمنع) + (جمنع + ۱ - جمنع) \}$

$$\{ (جمرعہ + جمرعہ) + (جمرعہ + جمرعہ) \}$$

جو $۲ = ۱$ جنم $(ع + ع + ۱)$ جنم $\frac{۱}{۲} (ع + ۱ - ع)$
نیز $ع + ۱ - ع > جنم (ع + ۱ - ع)$ اسلئے نسبت $(ع + ۱ - ع)$ پرب

$> \frac{۱}{۲} جنم (ع + ۱ - ع) > جنم (ع + ۱ - ع)$
اب چونکہ $(ع + ۱ - ع)$ پرب ایک مستقل عدد سے جو ر پر اور کسی مخصوص
کثیر الاضلاع پر منحصر نہیں ہے کم ہے اسلئے ہم دیکھتے ہیں کہ کثیر الاضلاعوں
کے کسی تو اتر کے ایک کثیر الاضلاع میں عددوں $ع + ۱ - ع$ میں سے
بڑے سے بڑا عدد صفر کی طرف مستقر ہوتا ہے جیسے کثیر الاضلاع کا
بڑے سے بڑا ضلع صفر کی طرف مستقر ہو۔ اسلئے کثیر الاضلاع میں ہم فرض
کر سکتے ہیں

$ع + ۱ - ع > کن$
ر کی تمام قیمتوں کے لئے، جہاں کن صفر کی طرف مستقر ہوتا ہے
جیسے ضلعوں کی تعداد غیر معین طور پر بڑھا دی جاتی ہے۔
اب ہم دیکھتے ہیں کہ مستقیم الاضلاع کثیر الاضلاع کے رقبہ کا ناپ

$$\frac{۱}{۲} (ع + ۱ - ع) = \frac{۱}{۲} (ع + ۱ - ع)$$

یا
سے استدر کم فرق رکھتا ہے جو

$$\frac{۱}{۱۲} (ع + ۱ - ع) = \frac{۱}{۱۲} (ع + ۱ - ع)$$

یا
 $\frac{۱}{۱۲} (ع + ۱ - ع) = \frac{۱}{۱۲} (ع + ۱ - ع)$

سے کم ہے اور یہ کن کے ساتھ صفر کی طرف مستقر ہوتا ہے پس

یہ ثابت ہو چکا کہ مقررہ شرط کے تحت کسی تو اتر کے مستقیم الاضلاع کثیر الاضلاعوں کے رقبوں کے ناپ کی یگانہ نہایتا $\frac{1}{2}$ راء ہے۔ اسلئے قطع و اق کار قبجودا،
 وق اور قائم الزاویہ زائد کی قوس اق سے محدود ہے $\frac{1}{2}$ راء ہے۔
 کسی قطع کار قبجہ جسکے سرے ع، ع سے تغیر ہوتے ہیں سر کیا $\frac{1}{2}$ (ع-ع) ہے۔
 یہ مشاہدہ طلب ہے کہ اس قائم الزاویہ کی دوسری شاخ پر گئے نقطوں کو تغیر کریں
 ع کو خ $\pi - 6$ میں بدلنا چاہئے کیونکہ

$$\text{جہز (خ - 6) = - جہز 6}$$

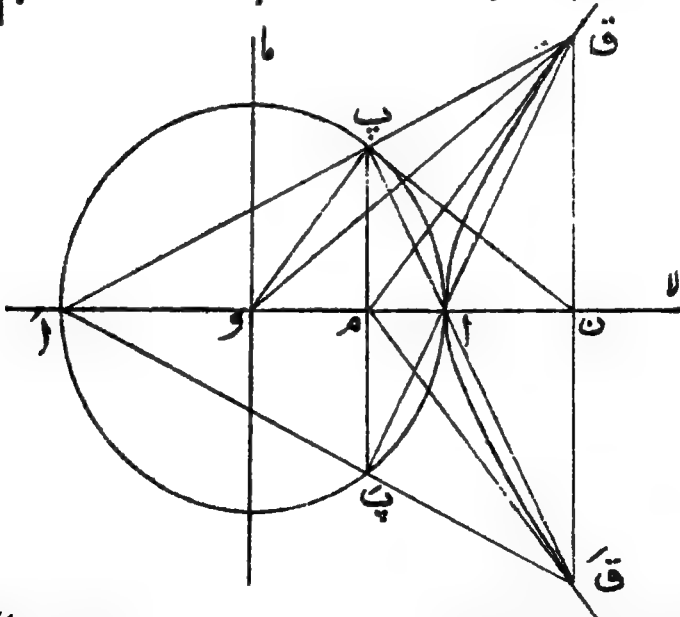
$$\text{اور جہز (خ - 6) = جہز 6}$$

۲۶۸۔ اگر ہم نصف قطر $OA = 1$ کا ایک دائرہ کھینچیں اور اس دائرہ پر کوئی نقطہ پ
 لیں جسکا ممیٹن م پ ہو تو زاویہ پ و ا کو ط سے تغیر کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{رقبہ و ا پ} = \frac{1}{2} \text{ و ا ط}$$

$$\text{فرض کرو کہ پ پر کا ماس پ ن ہے تب}$$

$$\text{وم} = \text{ارجم ط م پ} = \text{ارجب ط ن پ} = \text{امس ط م ا} = \text{ہم ط}$$



ن سے ن ق، و ا پر عمود اور ن پ کے مساوی یعنی \angle ن ق = \angle و ا، اس لئے ق کا طریق نیم محور کا ایک قائم الزاویہ قطع زائد ہے۔ اب قطع و ا ق کے رقبہ کو $\frac{1}{2}$ و ا ع سے تعبیر کرو تو حسب ثبوت دفعہ سابق ون = و اجزء، ن ق = و اجزء۔ پس ہم دیکھتے ہیں کہ جس طرح دائرہ پیر کے کسی نقطہ پ کے کامین اور فصل علی الترتیب و ا جب ط، و ا جم ط سے تعبیر ہوتے ہیں جہاں $\frac{1}{2}$ و ا ط، دائری قطع و ا پ کا رقبہ ہے عین اسی طرح قائم قطع زائد پیر کے نقطہ ق کامین اور فصل علی الترتیب و اجزء، و اجزء سے تعبیر ہوتے ہیں جہاں $\frac{1}{2}$ و ا ع، قطع و ا ق کا رقبہ ہے۔ اس طرح زائدی جیب اور جیب التمام قائم زائد کے حوالے سے ایسی خاصیت رکھتے ہیں جو دائرہ کے حوالے سے جیب اور جیب التمام کی خاصیت کے بالکل مماثل ہے۔ یہی وجہ ہے کہ قبل الذکر تفاعلوں کو زائدی تفاعل کہا جاتا ہے عین ایسے ہی جیسے کہ بعد الذکر تفاعلوں کو دائری تفاعل کہتے ہیں۔

۲۶۹۔ دفعہ سابق کی شکل میں جب ہم قائم زائد کے نقطہ ق پر غور کرتے ہیں جو دائرہ کے نقطہ پ کے متناظر ہے تو حاصل ہوتا ہے

و مس ط = ن ق = و اجزء، اور و ا ق ط = ون = و اجزء، اسلئے متناظر نقطوں کی دلیلیں ط، و، رشتوں مس ط = و اجزء، ق ط = و اجزء کو پورا کرتی ہیں۔ اب چونکہ

(830)

$$\text{مس } \frac{1}{2} = \frac{\text{و اجزء}}{1 + \text{و اجزء}}$$

$$\text{اسلئے} \quad \text{مس } \frac{1}{2} = \frac{\text{مس ط}}{1 + \text{ق ط}} = \frac{\text{جب ط}}{1 + \text{جم ط}} = \text{مس } \frac{1}{2} \text{ ط}$$

یا و ا ن س ط اور و، رشتہ مس $\frac{1}{2}$ = مس $\frac{1}{2}$ ط کو پورا کرتی ہیں۔

چونکہ و ق > قطع و ا ق > و ا ق

اسلئے

مسرع > ۶ > جسرع

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ مسرع ۶، جسرع ۶ کی انتہائیں جیکہ ۶ کو لائیتھا

گھٹا دیا جائے ہر ایک اکائی ہے کیونکہ $۱ = ۱$ ۔۲۷۰ - چونکہ $۶ = جسرع + جسرع$ $= قطط + مسط$

اسلئے

 $۶ = لوک (قطط + مسط)$ $= لوک (مس (۱/۱۱ + ۱/۱۲))$

دلیل طہ کو مختلف نام دیے جا چکے ہیں، چنانچہ کیلے (Cayley) اس کو

۶ کا گودرمنی (Gudermannian) تفاعل کہتا ہے اور اسے گڈ ۶ (gd u)

سے تعبیر کرتا ہے۔ اس طرح طہ = گڈ ۶ ۶۔ گڈ ۶ ۶ = لوک مس (۱/۱۱ + ۱/۱۲)۔ یہ نام گڈرمن

(Gudermann) کے اعزاز میں دیا گیا تھا جس نے اسکو ۶ کے

طول بلد (Longitude) سے موسوم کیا تھا۔ لبرٹ (Lambert)

نے طہ کو علوی (Transcendent) زادیہ کہا اور ہویل (Hovel)

نے ۶ کا زائدی حیثہ کہا اور لکھا حظر ۶ (amhu)۔ صفدر جے سے

۹۰ تک ۱/۱۱ کے وقفوں سے طہ کی قیمتوں کے لئے لوک مس (۱/۱۱ + ۱/۱۲)

۱۲ + ۱/۱۱ کے قیمتوں کی ایک جدول جس میں یہ قیمتیں اعشاریہ کے ۱۲

مقامات تک دی گئی ہیں لیجنڈر (Legendre) کی کتاب

(Théorie des fonctions Elliptiques, vol. II Table IV.)

میں ملے گی۔ اس باب کے آخر میں جو جدول ایک درجہ کے وقفوں سے

دی گئی ہے اسکو لیجنڈر کی جدول سے پروفیسر کیلے نے اخذ کیا تھا۔

(Crelle's journal, 1833.)

۱۔ دیکھو

(Théorie des fonctions complexes)

۲۔ دیکھو

(Quarterly journal, vol. xx.p.220)

۳۔ دیکھو

(331)

اس جدول سے ω کے زائدی تفاعلوں کی عددی قیمتیں رشتوں
 جہزء = مس طہ ، جہزء = قسطہ
 کے ذریعہ زاویوں کے طبعی ماسوں یا قاطعوں کی جدول استعمال کر کے
 معلوم کر سکتے ہیں۔

زائدی تفاعلوں اور انکے اطلاقات کے موضوع پر مزید معلومات کی
 خواہش ہو تو دیکھو لائے سانٹ (Laisant) کا "Essai sur les

Fonctions Hyperboliques" in the Memoires de la Societe
 des Sciences de Bordeaux, vol. x., اور نیز حسب ذیل مقالات

"Die hyperbolischen Functionen" by E. Heis,

"Die Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten
 Hyperbol-funktionen" by Gurtner.

ملف دلیلوں کے دائری تفاعلوں کیلئے جملے

۲۷۱۔ ملف دلیل کے دائری تفاعلوں کو زائدی تفاعلوں کی ترقیم
 استعمال کر کے آسانی کے ساتھ شکل ω + χ بہ میں بیان کیا جاسکتا ہے
 جہاں ω اور χ حقیقی مقداریں ہیں۔

چنانچہ جب $(\omega + \chi)$ = جب ω + χ = جب ω + χ = جب ω + χ =
 اسلئے جب $(\omega + \chi)$ = جب ω + χ = جب ω + χ = جب ω + χ =
 اسی طرح جب $(\omega + \chi)$ = جب ω + χ = جب ω + χ = جب ω + χ =
 نیز مس $(\omega + \chi)$ = جب $(\omega + \chi)$ = جب $(\omega + \chi)$ = جب $(\omega + \chi)$ =

اسلئے جب $(\omega + \chi)$ = جب $(\omega + \chi)$ = جب $(\omega + \chi)$ = جب $(\omega + \chi)$ =
 جب $(\omega + \chi)$ = جب $(\omega + \chi)$ = جب $(\omega + \chi)$ = جب $(\omega + \chi)$ =
 اسلئے مس $(\omega + \chi)$ = جب $(\omega + \chi)$ = جب $(\omega + \chi)$ = جب $(\omega + \chi)$ =
 جب $(\omega + \chi)$ = جب $(\omega + \chi)$ = جب $(\omega + \chi)$ = جب $(\omega + \chi)$ =

ملف ولیلوں کے مقلودا اری تفاعل

۲۷۲ — ہم اول تفاعل جب^۱ (لا + خ^۱ ما) پر غور کریں گے۔ فرض کرو
جب^۱ (لا + خ^۱ ما) = ع + خ^۱ بہ^۱ تب

لا + خ^۱ ما = جب (ع + خ^۱ بہ) = جب ع جز بہ + خ^۱ جم ع جز بہ
لا = جب ع جز بہ^۱ ما = جم ع جز بہ
اسلئے یہ کو معلوم کریں گی مساوات ہے

$$۱ = \frac{لا^۲}{جم جز بہ^۲} + \frac{ما^۲}{جم جز بہ^۲}$$

یا لا (جز بہ^۲ - ۱) + ما (جز بہ^۲ - ۱) = جم جز بہ^۲ (جز بہ^۲ - ۱)

(332)

اگر ہم جز بہ^۲ کی یہ دو درجی مساوات حل کریں تو

$$جز بہ^۲ = \frac{۱}{۲} (لا + ما + ۱) \pm \sqrt{\frac{۱}{۴} (لا + ما + ۱)^۲ - ۴ لا^۲}$$

$$اسلئے جز بہ^۲ = \frac{۱}{۲} (لا + ما + ۱) \pm \sqrt{\frac{۱}{۴} (لا + ما + ۱)^۲ - ۴ لا^۲}$$

اور چونکہ جز بہ مثبت ہے اسلئے

$$جز بہ^۲ = \frac{۱}{۲} (لا + ما + ۱) \pm \sqrt{\frac{۱}{۴} (لا + ما + ۱)^۲ - ۴ لا^۲}$$

اگر لا مثبت ہے۔ جز بہ کی اس قیمت کے جواب میں جب ع کی قیمت

$$لا \setminus جز بہ^۲ \text{ یا } \frac{۱}{۲} (لا + ما + ۱) \pm \sqrt{\frac{۱}{۴} (لا + ما + ۱)^۲ - ۴ لا^۲}$$

اب چونکہ جز بہ^۲ < ۱ جب ع اسلئے

$$جز بہ^۲ = \frac{۱}{۲} (لا + ما + ۱) \pm \sqrt{\frac{۱}{۴} (لا + ما + ۱)^۲ - ۴ لا^۲}$$

جب $e = \sqrt{\frac{1}{p}(1+l)^2 + m^2} - \sqrt{\frac{1}{p}(1-l)^2 + m^2}$ و
 پس جمر بہ 'جب ع' کی قیمتیں مندرجہ صدد میں خواہ لا مثبت ہو یا منفی۔
 دو درجہ جمر بہ = ع سے حاصل ہوتا ہے یہ \pm لوک $\{e + \sqrt{1-e^2}\}$
 اسلئے جب 'ا' $(l+x)$ = ک $\pi + (1-l)$ جب 'و' \pm خ لوک $\{e + \sqrt{1-e^2}\}$
 جہاں ک ایک صحیح عدد ہے اور جب 'و' ع کی مندر قیمت ہے
 جو اس شرط جب ع = و کو پورا کرتی ہے۔ بہم علامت کی تئیں کیلئے
 رکھو لا = . تو جب 'ا' $x = \pi \pm$ خ لوک $\{e + \sqrt{1-e^2}\}$ اسلئے
 $x = \pm$ جم ک π جب [خ لوک $\{e + \sqrt{1-e^2}\}$]

$$\pm (1-l) \frac{1}{x} = \left\{ -m - \sqrt{1+m^2} - \frac{1}{1+m^2} \right\} \pm (1-l) x$$

اسلئے بہم علامت وہی ہونی چاہئے ہو (1-l) کی ہے یا

جب 'ا' $(l+x)$ = ک $\pi + (1-l)$ جب 'و' \pm خ لوک $\{e + \sqrt{1-e^2}\}$... (۱۲)

$$e = \sqrt{\frac{1}{p}(1+l)^2 + m^2} + \sqrt{\frac{1}{p}(1-l)^2 + m^2}$$

جہاں

$$w = \sqrt{\frac{1}{p}(1+l)^2 + m^2} - \sqrt{\frac{1}{p}(1-l)^2 + m^2}$$

اور

اگر ہم جب 'و' + خ لوک $\{e + \sqrt{1-e^2}\}$ کو جب 'ا' $(l+x)$ کی قیمت

خیال کریں اور اسے جب 'ا' $(l+x)$ سے تعبیر کریں تو عام قیمت ہے

$$ک \pi + (1-l) \text{ جب 'ا' } (l+x)$$

جو وہی جملہ ہے جو حقیقی دلیلوں کے لئے حاصل ہوا تھا۔

ایک خاص صورت لا < ۱ ، $۱ = ۱$ کی ہے اس صورت میں
 $۱ = ۱$ اور جب لا کی صدر قیمت $\frac{1}{p} + \pi$ خر لوک $\{۱ + ۱ - ۱\}$ ہے۔
 ہم جانتے ہیں کہ جب لا کی کوئی حقیقی قیمت نہیں ہو سکتی جبکہ لا < ۱ ۔

۳۷۲ = ثانیاً فرض کرو کہ جم $(۱ + خ ما) = ع + خ ب$ تو پہلی صورت کی
 طرح حاصل ہوتا ہے

لا = جم ع ججزب، $۱ = ۱$ جب ع ججزب
 اور حسب سابق معلوم ہوتا ہے کہ

$$\text{ججزب} = \frac{1}{p} \sqrt{۱ + ۱} + \frac{1}{p} \sqrt{۱ - ۱} = ع$$

$$\text{جم ع} = \frac{1}{p} \sqrt{۱ + ۱} - \frac{1}{p} \sqrt{۱ - ۱} = و$$

اس لئے جم $(۱ + خ ما) = ۲ ک \pm \pi \pm \text{جم و} \pm \text{خر لوک} \{ع + ۱ - ۱\}$
 آخری رقم کی علامت کی تعیین کے لئے رکھو لا = ۰ تو

$$خ ما = \text{جم} \left[\pm \frac{1}{p} \pm \pi \pm \text{خر لوک} (۱ + ۱) \right] = \text{جب} \{ \pm \text{خر لوک} (۱ + ۱) \}$$

$$+ \{ ۱ + ۱ \} = (\pm خ ما)$$

پس ہم دیکھتے ہیں کہ دوسری مبہم علامت پہلی سے مختلف ہونی چاہئے یا

$$\text{جم} (۱ + خ ما) = ۲ ک \pm \pi \pm \text{جم و} - \text{خر لوک} (ع + ۱ - ۱) \dots (۱۳)$$

اگر جم و - خر لوک $(ع + ۱ - ۱)$ سے جم $(۱ + خ ما)$ کی صدر قیمت
 تعبیر ہو تو عام قیمت $۲ ک \pm \pi \pm \text{جم} (۱ + خ ما)$ ہے۔

۲۷۴ — فرض کرو کہ مسن (لا + خ م) = ع + خ م تب

$$\frac{\text{جب ۲ ع + خ چیز ۲ بہ}}{\text{جم ۲ ع + چیز ۲ بہ}} = \text{لا + خ م}$$

اسلئے $\frac{\text{لا}}{\text{جم ۲ ع + چیز ۲ بہ}} = \frac{\text{جب ۲ ع}}{\text{جم ۲ ع + چیز ۲ بہ}}$ یا $\frac{\text{لا}}{\text{جم ۲ ع + چیز ۲ بہ}} = \frac{\text{جب ۲ ع}}{\text{جم ۲ ع + چیز ۲ بہ}}$

اسلئے $\frac{\text{لا + م}}{\text{جم ۲ ع + چیز ۲ بہ}} = \frac{\text{جب ۲ ع + چیز ۲ بہ}}{\text{جم ۲ ع + چیز ۲ بہ}}$ یا $\frac{\text{لا + م}}{\text{جم ۲ ع + چیز ۲ بہ}} = \frac{\text{جم ۲ ع + چیز ۲ بہ}}{\text{جم ۲ ع + چیز ۲ بہ}}$

$$\frac{\text{جم ۲ ع - چیز ۲ بہ}}{\text{جم ۲ ع + چیز ۲ بہ}} =$$

یا $\frac{\text{جم ۲ ع}}{\text{جم ۲ ع + چیز ۲ بہ}} = \frac{\text{جم ۲ ع}}{\text{جم ۲ ع + چیز ۲ بہ}}$ یا $\frac{\text{جم ۲ ع}}{\text{جم ۲ ع + چیز ۲ بہ}} = \frac{\text{جم ۲ ع}}{\text{جم ۲ ع + چیز ۲ بہ}}$

اور $\frac{\text{لا + م}}{\text{جم ۲ ع + چیز ۲ بہ}} = \frac{\text{جم ۲ ع}}{\text{جم ۲ ع + چیز ۲ بہ}}$ یا $\frac{\text{لا + م}}{\text{جم ۲ ع + چیز ۲ بہ}} = \frac{\text{جم ۲ ع}}{\text{جم ۲ ع + چیز ۲ بہ}}$

اسلئے مس ۲ ع = $\frac{\text{لا}}{\text{لا - م + ۱}}$ اور مسن ۲ بہ = $\frac{\text{م}}{\text{لا + م + ۱}}$

اب چونکہ $\frac{\text{لا}}{\text{لا - م + ۱}} = \frac{\text{م}}{\text{لا + م + ۱}}$

اسلئے $\frac{\text{لا}^۲ + \text{م}^۲}{\text{لا}^۲ - \text{م}^۲} = \frac{\text{لا}^۲ + \text{م}^۲}{\text{لا}^۲ - \text{م}^۲}$ یا $\frac{\text{لا}^۲ + \text{م}^۲}{\text{لا}^۲ - \text{م}^۲} = \frac{\text{لا}^۲ + \text{م}^۲}{\text{لا}^۲ - \text{م}^۲}$

یا $\frac{1}{4} \text{ لوک } \left\{ \frac{\text{لا}^۲ + \text{م}^۲}{\text{لا}^۲ - \text{م}^۲} \right\}$

اسلئے مسن (لا + خ م) کی قیمتیں

$$\text{مسن}^1 (ا + خنا) = ک + \pi + \frac{1}{4} \text{مسن}^1 \frac{لا ۲}{۲لا - ۲لا - ۱}$$

$$+ \frac{1}{4} \text{خ کوک} \left\{ \frac{لا + (ا + ۱)}{۲(۱ - لا) + لا} \right\} \dots \dots (۱۳)$$

سے ملتی ہیں۔

مقلوب زائدی تفاعل

۲۷۵۔ اگر جنرے = ی تو عہ کو ی کی مقلوب زائدی جیب کہتے ہیں اور ا سے جنرے^۱ ی سے ظاہر کرتے ہیں۔ ایسی ہی تعریف جنرے^۱ ی اور مسنرے^۱ ی کے لئے ہے۔

(۳۳۴) اگر ی = جنرے =۔ خ جب خ عہ تو خ ی = جب خ عہ یاع =۔ چ جب خ ی (خ ی) تو عہ =۔ چ ا جم ی =۔ نیز اگر ی = مسرے

ا اسی طرح اگر ی = جنرے = جم خ عہ تو عہ =۔ چ ا جم ی =۔ نیز اگر ی = مسرے تو عہ =۔ چ ا مسن (خ ی)۔ پس مقلوب زائدی تفاعل مقلوب

دائرہ تفاعلوں کی رقوم میں ان مساواتوں

جنرے^۱ ی =۔ خ جب خ (خ ی)

جنرے^۱ ی =۔ خ جم ا (ی)

مسنرے^۱ ی =۔ خ مسن (خ ی)

سے بیان ہوتے ہیں۔

۲۷۶۔ ان جملوں کے ذریعہ جو ہم نے ملتف دلیل کے مقلوب دائرہ تفاعلوں کے لئے معلوم کئے ہیں مقلوب زائدی تفاعلوں کی قیمتیں معلوم ہو سکتی ہیں۔ لیکن ہم ان کو بلا واسطہ ہی معلوم کرینگے۔

(۱) اگر ی = جنرے تو عہ =۔ تو عہ = ی - اسکو تو عہ کی قیمت

معلوم کر نیکے لئے دو درجی کے طور پر حل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$قو^2 = ی \pm \sqrt{۱ + ی^2}$$

اس لئے $ع = ۲ \text{ خک} + \pi + لوک قو (۱ + ی + \sqrt{۱ + ی^2})$

یا $ع = ۲ \text{ خک} + \pi + لوک قو (۱ - ی + \sqrt{۱ + ی^2})$

ع کی یہ دونوں قیمتیں جملہ خک $\pi + (-۱) (۱ + ی + \sqrt{۱ + ی^2})$ میں

شامل ہیں۔

پس جنز'ا کی عام قیمت خک $\pi + (-۱) (۱ + ی + \sqrt{۱ + ی^2})$

ہے اور اسکی صدر قیمت لوک قو $(۱ + ی + \sqrt{۱ + ی^2})$ ہے۔ اس صدر

قیمت کو بالعموم جنز'ای سے تعبیر کرتے ہیں۔

(۲) اگر $ی = \text{سنز}ع$ تو $قو^2 = ۲ ی$ اسلئے

$قو^2 = ی \pm \sqrt{۱ - ی^2}$ اس طرح $ع = ۲ \text{ خک} \pm لوک قو (۱ + ی + \sqrt{۱ - ی^2})$

پس جنز'ای کی عام قیمت $۲ \text{ خک} \pm لوک قو (۱ + ی + \sqrt{۱ - ی^2})$ ہے اسکی

صدر قیمت جو بالعموم جنز'ای سے تعبیر کیجاتی ہے لوک قو $(۱ + ی + \sqrt{۱ - ی^2})$ ہر

(۳) اگر $ی = \text{سنز}ع$ تو $قو^2 = \frac{۱ - ی^2}{۱ + ی^2}$ یا $قو^2 = \frac{۱ + ی^2}{۱ - ی^2}$

اسلئے $ع = ۲ \text{ خک} + \frac{۱}{۲} لوک قو (\frac{۱ + ی}{۱ - ی})$ یہ سنز'ای کی عام قیمت

ہے اور اسکی صدر قیمت $\frac{۱}{۲} لوک قو (\frac{۱ + ی}{۱ - ی})$ ہے۔

(۴) اسی طرح ممزای، قظرای، قمرای کی صد قیمتوں کے لئے
علی الترتیب حملے حاصل ہوتے ہیں

$$\frac{1}{4} \text{ لوک } \left(\frac{1+y}{1-y} \right) \text{ لوک } \frac{1+y}{1-y} \text{ لوک } \frac{1+y}{1-y} \text{ لوک } \frac{1+y}{1-y}$$

کعبی مساواتوں کا حل

(335)

۲۷۷ — دفعہ ۱۱ میں یہ دکھایا جا چکا ہے کہ جب کعبی لا + ق لا
+ = ر۔ کی اصلیں سب کی سب حقیقی ہوں اور ق منفی ہو تو اصلیں

$$\sqrt{\frac{4}{3} \text{ ق} \times \text{جب ط}} - \sqrt{\frac{4}{3} \text{ ق} \times \text{جب (ط} + \frac{2}{3} \pi)} - \sqrt{\frac{4}{3} \text{ ق} \times \text{جب (ط} + \frac{4}{3} \pi)}$$

جہاں جب ۳ ط = $\left(-\frac{2}{3} \right) \left(\frac{2}{3} \right) - \frac{1}{3}$ ۔ اب ہم یہ دکھانگے کہ کعبی کو
اس صورت میں کس طرح حل کرنا چاہئے جبکہ اسکی دو اصلیں خیالی ہوں
اس صورت میں شرط
 $27 + 4 \text{ ق} < 0$

پوری ہوتی ہے۔

(۱) ق کو مثبت فرض کرو اور کعبی

۴ جیز ۶ + ۳ جیز ۶ = جیز ۶
پر غور کرو۔ فرض کرو لا = ۱ جیز ۶، تب لا اس مساوات

$$لا + \frac{3}{4} لا - لا - \frac{1}{4} لا = ۶ \text{ جیز } ۶ = 0$$

کو پورا کرتا ہے۔ یہ کعبی، کعبی لا + ق لا + ر = ۰ پر منطبق ہوگا اگر

$$ق = \frac{۳}{۴} ر = \frac{۱}{۴} ر \text{ جنز } ۳ \text{ یا جنز } ۳ = ۴ - \frac{۲۴}{۴۴} ر$$

اب کبھی ۴ جنز ۳ + ۳ جنز ۳ = جنز ۳ کی اصلیں ہیں

$$\text{جنز } ۳ \text{ جنز } (۳ + \frac{۲}{۴} ر) \text{ جنز } (۳ + \frac{۲}{۴} ر + ۳)$$

اسلئے کبھی لا + ق + لا + ر = کی اصلیں ہیں

$$\sqrt{\frac{۳}{۴} ق \text{ جنز } (۳ + \frac{۲}{۴} ر)} \sqrt{\frac{۳}{۴} ق \text{ جنز } (۳ + \frac{۲}{۴} ر + ۳)}$$

$$\text{یا } \sqrt{\frac{۳}{۴} ق \text{ جنز } (۳ + \frac{۲}{۴} ر)} (- \text{جنز } ۳ \pm ۳ ر \text{ جنز } ۳)$$

جہاں جنز ۳ = $\frac{۱}{۴} (۲۴ - \frac{۲۴}{۴۴} ر)$ - اگر ق اور ر کی عددی قیمتیں

دی گئی ہیں تو عدد ۳ کو زائدی جیوب کی جدول سے معلوم کیا جاتا ہے اور پھر انہی جدولوں سے جنز ۳ جنز ۳ معلوم کئے جاتے ہیں۔ پس اس طرح اصلوں کی عددی قیمتیں معلوم ہو جاتی ہیں۔

(۲) اگر ق منفی ہو تو مساوات

$$۴ \text{ جنز } ۳ - ۳ \text{ جنز } ۳ = ۴ \text{ جنز } ۳$$

پر غور کرو۔ سابقہ صورت کی طرح یہ معلوم ہو گا کہ اگر ق = $\frac{۳}{۴} ر$ ،

ر = $\frac{۱}{۴} ر$ جنز ۳ تو وہ کبھی جو ۳ جنز ۳ سے پورا ہوتا ہے لا + ق + لا + ر = ہے۔ اس لئے مطلوبہ اصلیں ہیں

$$\sqrt{\frac{۳}{۴} ق \text{ جنز } (۳ + \frac{۲}{۴} ر)} - \sqrt{\frac{۳}{۴} ق \text{ جنز } (۳ + \frac{۲}{۴} ر + ۳)}$$

$$+ \frac{۳}{۴} ر$$

یا $\frac{1}{3} \text{ ق جزء } ۱ - \frac{1}{3} \text{ ق } (- \text{جزء } ۳۷ \pm \text{جزء})$

جہاں $\frac{1}{3} = ۶۳$ $(\frac{1}{3} - ۲۷ \text{ ق})$ پس حسب صورت سابقہ ہم کمی کی اصلوں کی عددی قیمتیں معلوم کر کے لئے جبکہ ق اور ر دی گئے ہوں (336) زائدی تفاعلوں کی جدولیں استعمال کر سکتے ہیں۔

۲۷۸ - طہ کی دی ہوئی قیمتوں کے جواب میں ع کی قیمتوں کی جدول

طہ	ع = لو کہ مس $(\frac{1}{3} + ۱۱ \frac{1}{3} \text{ طہ})$	طہ	ع = لو کہ مس $(\frac{1}{3} + ۱۱ \frac{1}{3} \text{ طہ})$
۰	۰	۱۵	۵۲۶۳۸۴۳۲
۱	۰۰۱۷۵۳۳	۱۶	۵۲۸۲۹۵۴۵
۲	۰۰۳۴۹۰۶۶	۱۷	۵۳۰۱۱۵۷۷
۳	۰۰۵۲۳۵۹۹	۱۸	۵۳۱۹۴۵۸۳
۴	۰۰۶۹۸۱۳۲	۱۹	۵۳۳۷۷۱۲۶
۵	۰۰۸۷۲۶۶۵	۲۰	۵۳۵۶۰۳۷۹
۶	۰۰۱۰۴۷۱۱۷	۲۱	۵۳۷۴۳۵۹۱
۷	۰۰۱۲۲۱۷۳۰	۲۲	۵۳۹۲۷۷۱۰
۸	۰۰۱۳۹۶۲۳	۲۳	۵۴۱۱۲۷۲۶
۹	۰۰۱۵۷۰۷۹۶	۲۴	۵۴۲۹۷۷۴۰
۱۰	۰۰۱۷۴۵۳۲۹	۲۵	۵۴۴۸۲۷۵۳
۱۱	۰۰۱۹۱۹۸۶۲	۲۶	۵۴۶۶۷۷۶۷
۱۲	۰۰۲۰۹۴۳۹۵	۲۷	۵۴۸۵۲۷۸۱
۱۳	۰۰۲۲۶۸۹۲۸	۲۸	۵۵۰۳۷۷۹۴
۱۴	۰۰۲۴۴۳۴۶۱	۲۹	۵۵۲۲۲۸۰۷

ط	ط	ط	ط
ط = لوکوس (۱۰/۱۰ + ۱/۱۰)	ط	ط = لوکوس (۱۰/۱۰ + ۱/۱۰)	ط
۱۵۰۹۸۳۳۵	۵۳	۵۵۴۹۳۰۹۱	۳۰
۱۵۱۲۳۱۷۷۲	۵۴	۵۵۶۹۵۴۲۷	۳۱
۱۵۱۵۲۲۳۴۶	۵۵	۵۵۹۰۰۳۲۹	۳۲
۱۵۱۸۵۰۵۰۷	۵۶	۵۶۱۰۷۲۷۵	۳۳
۱۵۲۱۶۶۷۴۸	۵۷	۵۶۳۱۶۵۸۱	۳۴
۱۵۲۴۹۱۶۰۶	۵۸	۵۶۵۲۸۳۶۶	۳۵
۱۵۲۸۲۵۶۶۸	۵۹	۵۶۷۴۲۷۵۵	۳۶
۱۵۳۱۶۹۵۷۹	۶۰	۵۶۹۵۹۸۸۰	۳۷
۱۵۳۵۲۴۰۰۸	۶۱	۵۷۱۷۷۸۸۰	۳۸
۱۵۳۸۸۹۸۶۰	۶۲	۵۷۳۹۰۲۹۰۱	۳۹
۱۵۴۲۶۷۷۸۸۲	۶۳	۵۷۶۰۲۹۰۹۵	۴۰
۱۵۴۶۵۹۰۸۳	۶۴	۵۷۸۱۳۱۷۷	۴۱
۱۵۵۰۶۴۵۴۲	۶۵	۵۸۰۲۹۱۷۷۲	۴۲
۱۵۵۴۸۵۴۷۲	۶۶	۵۸۲۴۱۴۰۶	۴۳
۱۵۵۹۲۳۲۳۷	۶۷	۵۸۴۶۹۰۲۶	۴۴
۱۵۶۳۷۹۳۸۷	۶۸	۵۸۶۹۲۷۳۶	۴۵
۱۵۶۸۵۵۶۸۵	۶۹	۵۸۹۲۷۷۵۵	۴۶
۱۵۷۳۵۴۱۵۲	۷۰	۵۹۱۶۳۱۶۳	۴۷
۱۵۷۸۷۷۷۱۲۰	۷۱	۵۹۴۰۴۶۶۹	۴۸
۱۵۸۴۲۷۳۰۰	۷۲	۵۹۶۵۰۰۰۹	۴۹
۱۵۸۹۰۷۸۶۷	۷۳	۵۹۸۹۰۰۰۰	۵۰
۱۵۹۴۲۷۵۷۲	۷۴	۶۰۱۳۸۱۳۵	۵۱
۶۵۰۲۷۵۸۹۴	۷۵	۶۰۳۷۱۶۱۷	۵۲

طہ	ع = لوک مس (۱۲ + ۱۲)	طہ	ع = لوک مس (۱۲ + ۱۲)
۲۵۹۴۸۷۰۰۰۲	۱۵۴۶۶۰۷۶۶	۸۴	۲۵۰۹۷۳۲۴۰
۳۵۱۳۱۳۰۱۳	۱۵۴۸۳۵۲۹۹	۸۵	۲۵۱۷۲۱۲۱۸
۳۵۳۵۴۶۷۳۵	۱۵۵۰۹۸۳۲	۸۶	۲۵۲۵۲۸۰۴۷
۳۵۶۴۲۵۳۳۴	۱۵۵۱۸۴۳۶۴	۸۷	۲۵۳۳۰۴۰۰۷
۴۵۰۴۸۱۲۵۴	۱۵۵۳۵۸۸۹۷	۸۸	۲۵۴۳۶۲۳۶۰
۴۵۷۴۱۲۴۸۸	۱۵۵۵۳۳۴۳۰	۸۹	۲۵۵۴۲۰۹۰۴
۵۵	۱۵۵۷۰۷۹۶۳	۹۰	۲۵۶۴۰۳۰۶۱
			۲۵۷۴۲۱۹۰
			۱۵۷۴۸۶۲۳۳

سولہویں باب پر مثالیں

(337)

۱۔ ثابت کرو کہ

۸ جیزن لا جیز ۲ = ۲ جیز (ن + ۲) - لا ۴ جیزن لا ۲ جیز (ن - ۲) لا

۲۔ اگر جم (ع + خ بہ) = جم فہ + خ جب فہ تو ثابت کرو کہ جب فہ = \pm جب ع

= \pm جیز بہ

۳۔ اگر جم (طہ + خ فہ) جم (ع + خ بہ) = ۱ تو ثابت کرو کہ

منز فہ جیز بہ = جب ع اور منز بہ جیز فہ = جب طہ

۴۔ اگر مس ما = مس ع منز بہ مس ی = مم ع منز بہ

تو ثابت کرو کہ مس (ما + ی) = جیز بہ قمر ۲ ع

۵۔ جب (ع + خ بہ) کو شکل (۱) خ ب میں تحول کرو۔

۶۔ اگر لوک جب (طہ + خفہ) = طہ + خہ یہ

توثیبت کرو کہ ۲ جم ۲ ط = ۲ جیز ۲ فہ - ۴ نو

اور $\text{جم}(\text{ط} - \text{ب}) = \text{جم}(\text{ط} + \text{ب})$

۷۔ اگر $\frac{1}{x} = (a + \sqrt{a^2 - b^2})^n$ جب $(a + \sqrt{a^2 - b^2})^n = \frac{1}{x}$

توثبات کرو کہ مزد چیز ۱۱ = مم عجب ۱۱

۸- $\{ \text{جم}(\text{ط} + \text{خ}ن) + \text{خ}ج\text{ب}(\text{ط} - \text{خ}ن) \}$ کو شکل

۱۔ خب میں بیان کرو۔

۹۔ ثابت کرو کہ

$$\text{مستأ} (\text{مس} ٢ ط - \text{مسنة} ٢ قه) + \text{مستأ} (\text{مس} ط - \text{مسنة} قه) = \text{مستأ} (\text{مط ط مخفوذ})$$

۱۔ اگر $\frac{1}{5} \text{ جم} + \frac{1}{3} \text{ جم} - 2 \text{ جم} = 6 \dots\dots$

و ۳ جب ۷ - ۱ جب ۴ + ۱ جب ۵ + ۱ جب ۵ ... ۶

تو ثابت کرو کہ $\pi \frac{1}{p} = e$ جبکہ $\pi \frac{1}{p} > e$ اور $\pi \frac{1}{p} = 2$ قطعہ

۱۱۔ ثابت کرو کہ لامتناہی سلسلہ

$$\dots + \frac{12^m}{12} + \frac{8^m}{8} + \frac{4^m}{4} + 1$$

۱۲۔ غنائت کرو کہ

$$\frac{\infty = \frac{1}{0}}{\frac{1}{\infty} = 0} \quad \text{جب } (1 + \frac{1}{n})^n \text{ ط}$$

$$= \sum_{p=1}^{\infty} \{ \text{جم (جم پ طه) (جب پ طه) } + \text{جم عم} \}$$

لا ایک حقیقی عدد ہو مستدق نہیں ہوتا اگر $f \geq 1$ ، لیکن مستدق ہوتا ہے
اگر $f < 1$ ۔ کیونکہ $\frac{1}{n}$ متع ہے جبکہ $f \geq 1$ اور مستدق ہے
جبکہ $f < 1$ ۔

مائل ضرب $(1 + \frac{1}{n})(1 + \frac{1}{n}) \dots (1 + \frac{1}{n})$ یعنی متع ہے

اگر y کا حقیقی حصہ مثبت ہو، اور یہ مائل ضرب مستدق نہیں ہوتا اگر y کا
حقیقی حصہ صفر ہو۔ جب y کا حقیقی حصہ منفی ہو تو حاصل ضرب منفی کی
طرف مستدق ہوتا ہے اور اسلئے غیر مستدق خیال کیا جاتا ہے۔ کیونکہ

لوگ $(1 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + (1 + \frac{1}{n})$ جہاں $\frac{1}{2n^2}$ ان کی کافی طور پر

بڑی تمام قیمتوں کے لئے ایک مستقل عدد سے کم ہے، اسلئے $\frac{1}{n}$ لوگ $(1 + \frac{1}{n})$
کا حقیقی حصہ ∞ کی طرف متع ہوتا ہے جبکہ y کا حقیقی حصہ منفی ہو، پس

اوپر کا نتیجہ برآمد ہوتا ہے۔ یہ ان واقعات پر مبنی ہے کہ $\frac{1}{n}$ متع ہے

اور $\frac{1}{n}$ مستدق۔

(348)

جیب اور جیب التمام کو لا متناہی حاصل ضربوں کے طور پر بیان کرنا

۲۸۲۔ اب ہم وہ جملے معلوم کریں گے جو جیب اور جیب التمام کو لا متناہی
حاصل ضربوں کے طور پر بیان کرتے ہیں جبکہ زاویہ کا دائری ناپ
لا ہو۔ ہم اول لا کو حقیقی اور مثبت لیتے۔
اب

$$\text{جب } \frac{\pi}{2} = 2 \text{ جب } \frac{\pi}{2} \text{ جب } \frac{\pi}{2}$$

$$= 2 \text{ جب } \frac{\pi}{2} \text{ جب } \frac{\pi}{2} \text{ جب } \frac{\pi}{2} \text{ جب } \frac{\pi}{2}$$

متع ہے۔ یہ دکھایا جائیگا کہ لامتناہی حاصل ضرب $\Pi (1 + x^n)$ مستحق نہیں ہے۔ اسس کو ثابت کرنے کے لئے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$1 + x^n = (1 + x^{1/n})^{1/n}$$

جہاں $x^n = 1 + x^{1/n}$

اور $x^n = 1 + x^{1/n}$ میں اوپر کی مثبت علامت لینی چاہئے اگر بین مثبت ہے اور منفی علامت لینی چاہئے اگر x^n منفی ہے۔ اگر ضد اختیار طور پر نتیجہ ایک مثبت عدد ایک سے کم ہو تو نئی تمام کالی طور پر بڑی قیمتوں کے لئے $x^n < (1 + x^{1/n})^{1/n}$ اور اس لئے

x^n مستحق نہیں ہو سکتا۔ پس یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ $\Pi (1 + x^n)$ مستحق نہیں ہو سکتا اگرچہ $\Pi (1 + x^{1/n})^{1/n}$ مستحق ہوگا اگر سلسلہ x^n مستحق ہو۔ اس مسئلہ کے جواز کے لئے یہ صریحاً کافی ہے کہ تمام عدد بین سوائے ایک محدود جٹ کے ہم علامت ہونے چاہئیں اگر x^n طے عدد $1 + x^n$ ہو اور عدد $1 + x^n$...

سب مثبت ہوں اور ایسے ہوں کہ x^n متع ہے تو حاصل ضرب $\Pi (1 + x^n)$ یقیناً متع ہے اگر x^n کا حقیقی حصہ مثبت ہو۔ کیونکہ x^n کے مقیاسوں کا حاصل ضرب $\Pi (1 + x^n)$ حاصل ضرب $\Pi (1 + x^n)$ کے برابر ہے اور یہ ثانی الذکر حاصل ضرب متع ہے جبکہ لامتناہی ہو۔

مائل ضرب $(1 + \frac{1}{p_1}) (1 + \frac{1}{p_2}) \dots (1 + \frac{1}{p_n}) \dots$ جبکہ

اگر یہ سلسلہ مستدق ہے تو لائتناہی حاصل ضرب سفر سے مختلف ایک معین آہٹا کی طرف مستدق ہوتا ہے، اسکا عکس بھی درست ہے۔ اگر یہ لائتناہی حاصل ضرب سفر کی طرف مستدق ہو تو سلسلہ بالا۔۔۔ کی طرف متنع ہوتا ہے اور اس لئے ہم اس صورت کو حسب سابق خارج کرتے ہیں۔

اب یہ ثابت کرنے کے لئے کہ لائتناہی سلسلہ کا استدقاق لائتناہی حاصل ضرب کے استدقاق کے مائل ہے ہم دیکھتے ہیں کہ سلسلہ کے استدقاق کے لئے ضروری اور کافی شرط یہ ہے کہ ہر صد کے جواب میں n منتخب ہو سکے ایسا کہ $n = 1, 2, 3, \dots$ کے لئے

لوک (ی) $1 + n$ ی \dots ی $n + 1$ یا | لوک (۱ + غن) $n + 1$ ۔۔۔

اگر یہ شرط پوری ہو تو دفعہ ۲۳۰ (۱) میں ثابت کردہ مسئلہ

ف۱۔ $1 > 1 + 1 + \frac{1}{p}$ یا $1 + 1 + \frac{1}{p}$ کو استعمال کرنے سے حاصل

ہوتا ہے | غن، $n + 1 + \frac{1}{p}$ صد (۱ + $\frac{1}{p}$ صد)۔ اب اگر ضہ انتیاری طور پر منتخبہ کوئی مثبت عدد ہو تو صد منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ

صد (۱ + $\frac{1}{p}$ صد) $> ضہ$ اور اسلئے n منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ

$n = 1, 2, 3, \dots$ کے لئے | غن، $n + 1 + \frac{1}{p}$ یا $1 + 1 + \frac{1}{p}$ ی \dots ی $n + 1$ ۔۔۔

ضہ، اس لئے لائتناہی حاصل ضرب مستدق ہے۔ اس کے بالعکس

مان لو کہ $n = 1, 2, 3, \dots$ کے لئے n منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ

| غن، $n + 1 + \frac{1}{p}$ صد۔ دفعہ ۲۴۹ (۱) میں یہ ثابت کیا جا چکا ہے کہ اگر

نیز

$$\frac{1}{(1-6)(2-6)\dots(n-6)} < (1+6)(2+6)\dots(n+6)$$

پس اگر 6 متع ہو تو حاصل ضرب $(1-6)(2-6)\dots(n-6)$ صفر کی طرف مستحق ہوتا ہے اور اسلئے نیز مستحق خیال کیا جاتا ہے۔
پھر اگر 6 مستحق ہو تو فرض کرو کہ صہ اختیار کی طور پر نتیجہ ایک مثبت عدد ہے جو ایک سے کم ہے تو ن منتخب ہو سکتا ہے
ایسا کہ $r = 1, 2, 3, \dots$ کے لئے

$$1+6 + 2+6 + \dots + n+6 > 6$$

پس حسب دفعہ ۲۲۶

$$(1+6-1)(2+6-1)\dots(n+6-1)$$

$$< 1-6 + 2+6 + \dots + n+6 < 1-6$$

$$\text{اور اسلئے } |(1+6-1)(2+6-1)\dots(n+6-1)| > 6$$

اور اس طرح وہ شرط جو لائقناہی حاصل ضرب $(1-6)(2-6)\dots(n-6)$ کے استحقاق کے لئے دفعہ ۲۴۹ میں حاصل ہوئی تھی پوری ہوتی ہے۔

نیز

$$(1+6+1)(2+6+1)\dots(n+6+1)$$

$$> \frac{1}{(1-6-1)(2-6-1)\dots(n-6-1)}$$

ای | > | تو

$$| \text{لوک} (1+y) | > | \text{ای} | \left(1 + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{1-y} \right)$$

$$\text{اس لئے } | \text{لوک} (1+y) | > \text{صہ} \left(1 + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{1-y} \right)$$

$$\text{یا } | \text{لوک} (1+y) | > \text{صہ} \left(1 + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{1-y} \right) \quad (340)$$

بشرطیکہ $\text{صہ} \left(1 + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{1-y} \right) > \text{صہ}$ اور اگر صہ مقررہ ہے تو
 صہ متعین ہو سکتا ہے ایسا کہ یہ شرط پوری ہو پس سلسلہ کے استقامت

کی شرط پوری ہو چکی۔
 ۲۸۰۔ فرض کرو کہ حقیقی مثبت عددوں کا ایک تو e_1, e_2, e_3, \dots
 ہے جنہیں سے ہر عدد ایک سے کم ہے۔ یہ دکھایا جائیگا کہ لا متناہی
 حاصل ضرب

$$(1+e_1)(1+e_2)\dots(1+e_n)\dots$$

$$\text{اور } (1-e_1)(1-e_2)\dots(1-e_n)\dots$$

دونوں مستحق ہوتے ہیں اگر سلسلہ $e_1 + e_2 + \dots + e_n + \dots$ مستحق
 ہو اور مستحق نہیں ہوتے اگر یہ سلسلہ متعین ہو۔
 چونکہ

$$(1+e_1)(1+e_2)\dots(1+e_n) < 1 + e_1 + e_2 + \dots + e_n$$

اس لئے واضح ہے کہ حاصل ضرب $(1+e_1)(1+e_2)\dots$ متعین ہوتا ہے اگر سلسلہ

$$e_1 + e_2 + \dots + e_n + \dots$$

نیز

$$\frac{1}{(1-ع)(1-ع_2) \dots (1-ع_n)} < (1+ع)(1+ع_2) \dots (1+ع_n)$$

پس اگر $ع$ متع ہو تو حاصل ضرب $(1-ع)(1-ع_2) \dots (1-ع_n)$ صفر کی طرف مستحق ہوتا ہے اور اسلئے نیز مستحق خیال کیا جاتا ہے۔
پھر اگر $ع$ مستحق ہو تو فرض کر دو کہ صہ اختیار کا طور پر منتخب
ایک مثبت عدد ہے جو ایک سے کم ہے تو ن منتخب ہو سکتا ہے
ایسا کہ $ر = ۳۰۲۱$ کے لئے

$$ع_n + 1 + ع_n + 2 + \dots + ع_n + ر > صہ$$

پس حسب دفعہ ۲۲۶

$$(1-ع_n+1)(1-ع_n+2) \dots (1-ع_n+ر)$$

$$< 1 - (ع_n + 1 + ع_n + 2 + \dots + ع_n + ر) < 1 - صہ$$

$$اور اسلئے | (1-ع_n+1)(1-ع_n+2) \dots (1-ع_n+ر) - 1 | > صہ$$

اور اس طرح وہ شرط جو لاتناہی حاصل ضرب $(1-ع)(1-ع_2) \dots (1-ع_n)$ کے استقائ کے لئے دفعہ ۲۷۹ میں حاصل ہوئی تھی پوری ہوتی ہے۔

نیز

$$(1+ع_n+1)(1+ع_n+2) \dots (1+ع_n+ر)$$

$$> \frac{1}{(1-ع_n+1)(1-ع_n+2) \dots (1-ع_n+ر)} > \frac{1}{1-صہ}$$

(341)

اور اسلئے $(1+n)(1+n+1) \dots (1+n+r-1) > \frac{1}{1-n}$ پس اگر ضد اختیارى طور پد نقبہ ہو تو ہم ضد کو متعین کر سکتے ہیں ایسا کہ $\frac{1}{1-n} > 1$ ضد اور اسلئے n متعین ہو سکتا ہے ایسا کہ $r = 1, 2, 3, \dots$ کے لئے

$(1+n)(1+n+1) \dots (1+n+r-1) > 1$ ضد اس لئے حاصل ضرب $(1+n)$ مستحق ہے۔ یہ واضح ہے کہ اس شرط کی بجائے کہ $1, 2, 3, \dots, n$ سب کے سب ایک سے کم ہوں یہ وسیع شرط رکھی جا سکتی ہے کہ ان عددوں کے ایک محدود جٹ کے سوا باقی سب عدد ایک سے کم ہوں۔ کیونکہ ہم $(1+n)$ یا $(1-n)$ سے اجزائے ضربی کی ایک محدود تعداد اس کے استنتاج کو متاثر کئے بغیر علیحدہ کر سکتے ہیں۔

۲۸۱۔ اب لا متناہی حاصل ضرب

$(1+n)(1+n+1) \dots (1+n+r-1)$ پر غور کرو جہاں $1, 2, 3, \dots, n$ ملحق عدد ہیں۔ ہم یہ دکھائینگے کہ $1, 2, 3, \dots, n$ کے مقیاسوں کا سلسلہ

$1, 2, 3, \dots, n$ مستحق ہو تو اوپر کا لا متناہی حاصل ضرب بھی مستحق ہے۔ اس صورت میں لا متناہی حاصل ضرب کو مطلقاً مستحق کہتے ہیں۔ ہم دیکھتے ہیں کہ

$$(1+n)(1+n+1) \dots (1+n+r-1) > 1$$

$$\geq (1+n)(1+n+1) \dots (1+n+r-1)$$

وہ ضروری اور کافی شرط کہ لامتناہی حاصل ضرب ی، ی، ی، ...
ایک معین انتہا (صفر سے مختلف) کی طرف مستقر ہو یہ ہے کہ
اختیار کی طور پر منتخب ہر مثبت عدد ص کے جواب میں ایک صحیح عدد
ن منتخب ہو سکے ایسا کہ ر کی تمام قیمتوں ۱، ۲، ۳، ... کے لئے
 $|n+1| + |n+2| + \dots + |n+r| > \epsilon$ - یہ ثابت کرنیکے لئے
کہ یہ شرط ضروری ہے مان لو کہ ض، ض کی طرف مستقر ہوتا
ہے جو صفر سے مختلف ایک عدد ہے۔ تب عددوں ض، ض، ض، ...
... ض، ... کے ایک محدود جٹ کے سوا باقی سب عدد
ض، ض سے بڑے ہیں جہاں ض اختیاری طور پر منتخب ایک
مثبت عدد ہے ایسا کہ ض، ض - ض < ۰ - نیز ان عددوں میں سے
کوئی عدد معدوم نہیں ہوتا، اس لئے ایک مثبت عدد ک موجود
ہے جو سب عددوں ض، ض، ض، ... ض، ... سے
چھوٹا ہے۔ اب چونکہ ض، ایک معین انتہا کی طرف مستقر ہوتا
ہے ص کے جواب میں ن منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ ض، ض، ض، ...

جہاں عہ دائری ناپ کی اکائی ہے۔

۱۳۔ یو لکرا مسئلہ جب $\frac{لا}{لا} = \frac{1}{2}$ حجم $\frac{1}{4}$ لا حجم $\frac{1}{8}$ لا حجم $\frac{1}{8}$ لا
سے اخذ کرو

$$(۱) \quad \frac{1}{\frac{لا}{لا} + 1} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{لا}{لا} + 1} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{1 - لا} = \frac{1}{لا}$$

$$+ \dots + \frac{1}{\frac{لا}{لا} + 1} \times \frac{1}{8}$$

$$(۲) \quad \frac{1}{لا} = \frac{1}{2} قطر^۲ لا + \frac{1}{4} قطر^۲ لا + \frac{1}{8} قطر^۲ لا + \dots$$

$$+ \frac{1}{8} قطر^۲ لا + \dots$$

$$= (+)$$

سترہواں باب

لامتناہی حاصل ضرب

لامتناہی حاصل ضربوں کا استدقاق

۲۷۹۔ فرض کرو کہ حقیقی یا ملتف عددوں کا ایک تواریخ y_1, y_2, \dots, y_n ہے جو کسی مقررہ قانون کی بموجب بتا ہے۔ ان عددوں میں سے پہلے n عددوں کے حاصل ضرب $z_n = y_1 y_2 \dots y_n$ پر غور کرو۔

اگر z_n صفر سے مختلف ایک معین انتہا z کی طرف مستقر ہو جبکہ n کو لا انتہا بڑھا دیا جائے تو ہم کہتے ہیں کہ z لامتناہی حاصل ضرب $y_1 y_2 \dots y_n$ کی انتہائی قیمت ہے اور یہ لامتناہی حاصل ضرب مستقر ہے۔
مستقر لامتناہی حاصل ضربوں کی جماعت سے ان حاصل ضربوں کو خارج کر دینا سہولت بخش ہے جنکے لئے z_n صفر کی طرف مستقر ہو۔

اگر $z_n = z_1 (z_2 + z_3 + \dots + z_n)$ جہاں z_1, z_2, \dots, z_n کے

$$\text{جہاں } \left(1 - \frac{\text{جبا}^2 \frac{\lambda}{n}}{\pi^2 \frac{\lambda}{n}}\right) \dots \left(1 - \frac{\text{جبا}^2 \frac{\lambda}{n}}{\pi^2 (1+m)^2 \frac{\lambda}{n}}\right) = \text{ب}$$

اب n کو $\lambda \setminus \pi$ سے بڑا لیکر m کو منتخب کیا جاسکتا ہے ایسا (۳۴) کہ
 $\pi(1+m) > \pi$ تب 'ب' مثبت ہے اور ایک سے کم - نیز دفعہ ۲۲۶ کے مطابق

$$\text{ب} < 1 - \text{جبا}^2 \frac{\lambda}{n} \left\{ \frac{\pi^2}{n} + \dots + \frac{\pi^2 (1+m)^2}{n} \right\} \text{قم}$$

اب ہم دفعہ ۹۶ مثال (۱) میں یہ دکھانے کے ہیں کہ اگر $\pi > \frac{\pi}{4}$ تو

$$\frac{\text{جبا}^2}{\pi} < \frac{\text{جبا}^2}{\pi \frac{1}{4}}$$

$$\text{پس اگر } \frac{n}{2} > \frac{n}{2} \text{ تو } \frac{\pi^2}{n} > \frac{\pi^2}{n} \text{ نیز } \frac{n}{2} > \frac{n}{2} \text{ نیز } \frac{n}{2} > \frac{n}{2}$$

$$\text{اسلئے } \text{ب} < 1 - \frac{\lambda}{n} \left\{ \frac{1}{r} + \dots + \frac{1}{r(2+m)} + \frac{1}{r(1+m)} \right\}$$

$$< 1 - \frac{\lambda}{n} \left\{ \frac{1}{r} + \dots + \frac{1}{(2+m)(1+m)} + \frac{1}{(1+m)} \right\}$$

$$< 1 - \frac{\lambda}{n} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{m} \right) < 1 - \frac{\lambda}{n}$$

چونکہ 'ب' ایک اور $1 - \frac{\lambda}{n}$ کے درمیان ہے اسلئے ہم کہہ سکتے ہیں

ب = ۱ - $\frac{ط^۲ لا}{م}$ جہاں ط، صفر اور ایک کے درمیان ہے تب

$$جب لا = ن جب لا = ن جم لا = ن (۱ - \frac{جب^۲ لا}{ن}) (۱ - \frac{جب^۲ لا}{ن}) \dots$$

$$\dots (۱ - \frac{ط^۲ لا}{م}) (۱ - \frac{جب^۲ لا}{ن}) \dots$$

جہاں م، پ، ن سے کم کوئی عدد ہے ایسا کہ $لا > (م + ن) - ۱$ ۔
اب فرض کر دو کہ ن لا انتہا بڑا ہو جاتا ہے لیکن م ثابت رہتا ہے
تو چونکہ حاصل ضرب میں کی ہر جیب کی بجائے متناظر دائری ناپ رکھا
جاسکتا ہے اور چونکہ جم $\frac{لا}{ن}$ کی انتہا ایک ہے اسلئے

$$جب لا = لا (۱ - \frac{لا}{ن}) (۱ - \frac{لا}{ن}) \dots (۱ - \frac{لا}{ن}) (۱ - \frac{لا}{ن}) \dots$$

جہاں ط، ط، ط کی انتہائی قیمت ہے جبکہ ن کو لا انتہا بڑا لیا جاتا ہے
اور اسلئے ط، ط، ط ایسا ہے کہ $ط \geq ۱$ ۔

اب م کو کافی طور پر بڑا لینے سے ہم جزو ضربی ۱ - $\frac{ط^۲ لا}{م}$ کو ایک کے

انتہا قریب لاسکتے ہیں جتنا ہم چاہیں اسلئے جب لا کے لئے لاستناجی
حاصل ضرب کے طور پر جملہ حاصل ہوتا ہے ط

$$جب لا = لا (۱ - \frac{لا}{ن}) (۱ - \frac{لا}{ن}) \dots (۱ - \frac{لا}{ن}) \dots (۱)$$

یہ اس دفعہ کی تحقیق "Schlömlich" سے منسوب ہے دیکھو اسکی

یہ قید کہ لا مثبت ہونا چاہئے سرکجا اٹھالی جاسکتی ہے۔
۲۸۳ — اگر n جفت ہو تو دفعہ ۸۶ کے ضابطہ (۱۷)

$$\text{جم لا} = \left(1 - \frac{\text{جب}^2 \frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\frac{\text{ن}}{\pi}}\right) \left(1 - \frac{\text{جب}^2 \frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\frac{\text{ن}}{\pi}}\right) \dots \left(1 - \frac{\text{جب}^2 \frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\frac{\text{ن}}{\pi}}\right) \left(1 - \frac{\text{جب}^2 \frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\frac{\text{ن}}{\pi}}\right)$$

سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\text{جم لا} = \left(1 - \frac{\text{لا}^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{\text{لا}^2}{\pi^2}\right) \dots \left(1 - \frac{\text{لا}^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{\text{لا}^2}{\pi^2}\right)$$

جہاں m کوئی محدود عدد ہے ایسا کہ $\pi(1+m^2) > \text{لا}^2$ اور طرہ صفر اور ایک کے درمیان ہے۔ پس جم لا کے لئے لا متناہی حامل ضرب کے طور پر ضابطہ حامل ہوتا ہے

$$\text{جم لا} = \left(1 - \frac{\text{لا}^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{\text{لا}^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{\text{لا}^2}{\pi^2}\right) \dots (2)$$

۲۸۴ — ضابطہ (۱) اور (۲) کی اہمیت کے مد نظر ہم ان کا دوسرا ثبوت دینے جو سیلٹ کی ٹرگنومیٹری سے لیا گیا ہے۔ ضابطوں

$$\text{جب لا} = \text{ن جب} \frac{\text{لا}}{\text{ن}} \text{ جم} \frac{\text{لا}}{\text{ن}} = \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\text{جب}^2 \frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\frac{\text{ن}}{\pi}}\right)$$

$$\text{جم لا} = \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\text{جب}^2 \frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\frac{\text{ن}}{\pi}}\right)$$

(346) کو جو n کی جفت قیمتوں کے لئے درست ہیں لیکر ہم ان کو ضابطہ
۱۔ $\frac{\text{جب}^2 \text{ع}}{\text{جب}^2 \text{ب}} = \text{جم}^2 \text{ع} = \left(1 - \frac{\text{مس}^2 \text{ع}}{\text{مس}^2 \text{ب}}\right)$ کے ذریعہ حسب ذیل شکلوں میں

اور جم لا کے دو جملوں سے معلوم ہوتا ہے کہ

$$\pm \text{جم لا} > \prod_{r=1}^n \left(1 - \frac{\text{لا}^2}{r^2} \right)$$

$$\text{اور } \pm \text{جم لا} < \prod_{r=1}^n \left(1 + \frac{\text{جم}^2}{r^2} \right)$$

اب ہم جانتے ہیں کہ $\frac{\text{جم}}{\text{لا}} = 1 - \text{صن}$ جہاں صن ایک عدد ہے جو صفر کی طرف مستقر ہوتا ہے جبکہ ن کو لا انتہا بڑا دیا جاتا ہے۔ اسلئے

$$\text{جب لا} = \text{لا} \left(1 - \frac{\text{لا}^2}{r^2} \right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{\text{لا}^2}{n^2} \right) (1 - \text{طن})$$

$$\text{جم لا} = \left(1 - \frac{\text{لا}^2}{r^2} \right) \left(1 - \frac{\text{لا}^2}{r^2} \right) \dots \left(1 - \frac{\text{لا}^2}{r^2} \right) (1 - \text{طن})$$

جہاں صن، طن صفر کی طرف مستقر ہوتے ہیں جبکہ ن کو لا انتہا بڑا دیا جاتا ہے، پس اس طرح ضابطے (۱) اور (۲) حاصل ہوتے ہیں اگر ہم ضابطوں

$$\text{جب لا} = \text{لا} \prod_{r=1}^n \left(1 - \frac{\text{لا}^2}{r^2} \right) \quad \text{جب لا} = \text{لا} \prod_{r=1}^n \left(1 + \frac{\text{جم}^2}{r^2} \right)$$

$$\text{جم لا} = \text{جم} \prod_{r=1}^n \left(1 + \frac{\text{جم}^2}{r^2} \right) \quad \text{جب لا} = \text{لا} \prod_{r=1}^n \left(1 - \frac{\text{لا}^2}{r^2} \right)$$

کو جو ن کی طاق قیمت کے لئے درست ہیں استعمال کرتے اور ان سے ضابطہ

$$\text{جب لا} = \text{جم} \frac{\text{لا}}{\text{ن}} \text{مس} \frac{\text{لا}}{\text{ن}} = \prod_{r=1}^{\frac{1}{p}(1-n)} \left(1 - \frac{\text{مس}^2 \frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\frac{\pi^2}{\text{ن}}} \right)$$

$$\text{جم لا} = \text{جم} \frac{\text{لا}}{\text{ن}} = \prod_{r=1}^{\frac{1}{p}(1-n)} \left(1 - \frac{\text{مس}^2 \frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\frac{\pi^2 (1-r^2)}{\text{ن}^2}} \right)$$

حاصل کرتے تو استدلال بالا سے وہی نتیجہ حاصل ہوتے۔
۲۸۵۔ اب ہم ملحق عدد ی = لا + خ یا کسی صورت پر غور کریں گے
دفعہ ۲۸۲ کے مطابق ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ

$$\text{جب ی} = \text{ن جب ی} \frac{\text{جم ی}}{\text{ن}} \left(1 - \frac{\text{جس}^2 \frac{\text{ی}}{\text{ن}}}{\frac{\pi^2}{\text{ن}}} \right) \left(1 - \frac{\text{جس}^2 \frac{\text{ی}}{\text{ن}}}{\frac{\pi^2}{\text{ن}}} \right) \dots \left(1 - \frac{\text{جس}^2 \frac{\text{ی}}{\text{ن}}}{\frac{\pi^2}{\text{ن}}} \right) \text{ب}$$

$$\text{جہاں ب} = \left(1 - \frac{\text{جس}^2 \frac{\text{ی}}{\text{ن}}}{\frac{\pi^2 (1+m)^2}{\text{ن}}} \right) \dots \dots \dots \left(1 - \frac{\text{جس}^2 \frac{\text{ی}}{\text{ن}}}{\frac{\pi^2}{\text{ن}}} \right)$$

جہاں ن ایک جفت عدد ہے اور $r = \frac{1}{p}(1-n) - 2$ ۔ ہمیں ب کی قیمت کے لئے حدود متعین کرنا ہے۔ فرض کرو کہ جب $\frac{\text{ی}}{\text{ن}}$ کا مقياس غ سے تغیر ہوتا ہے تب دفعہ ۲۸۱ کے مطابق چونکہ کسی عددوں کے مجموعہ کا مقياس انکے مقیاسوں کے مجموعہ سے کم ہوتا ہے ہم دیکھتے ہیں کہ (ب-۱) کا مقياس جملہ

$$1 - \left(\frac{\text{غ}^2}{\frac{\pi^2}{\text{ن}}} + 1 \right) \dots \dots \dots \left(\frac{\text{غ}^2}{\frac{\pi^2 (1+m)^2}{\text{ن}}} + 1 \right)$$

سے کم ہے۔ اب ہم جانتے ہیں کہ $\frac{1}{m} < 1 + \frac{1}{m}$ اگر کوئی مثبت (348) عدد ہو، اسلئے

$$(ب-۱) \text{ کا مقیاس } > \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \dots + \frac{1}{m} \right) = 1 - \frac{1}{m}$$

$$\text{اور یہ } > \frac{1}{m} \left\{ \frac{1}{m} + \dots + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} \right\} = 1 - \frac{1}{m}$$

$$\text{یا } > \frac{1}{m} \left\{ \frac{1}{m} - \frac{1}{m} + \frac{1}{m} - \frac{1}{m} + \frac{1}{m} - \frac{1}{m} \right\} = 1 - \frac{1}{m}$$

$$\text{اسلئے (ب-۱) کا مقیاس } > \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m} \right) = 1 - \frac{1}{m}$$

$$\text{یا } > \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m} \right) = 1 - \frac{1}{m}$$

پس (ب-۱) کا مقیاس صفر اور $\frac{1}{m}$ کے درمیان واقع ہے۔
اب

$\frac{1}{m} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \dots + \frac{1}{m}$ جب $\frac{1}{m} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m}$ اسلئے $\frac{1}{m}$ کی انتہائی قیمت لا + ما ہے اور اسلئے (ب-۱) کے مقیاس کی انتہا جبکہ $\frac{1}{m}$ کو لا انتہا بڑھا دیا جاتا ہے صفر اور $\frac{1}{m}$ کے درمیان واقع ہوتی ہے، اور چونکہ $\frac{1}{m} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m}$ کو کم کے کافی بڑا لینے سے ایک کے اتنا قریب لایا جاسکتا ہے جتنا ہم چاہیں اسلئے $\frac{1}{m}$ کو کافی بڑا لینے سے (ب-۱) کے مقیاس کو جتنا چاہیں اتنا چھوٹا بنا سکتے ہیں۔ جب $\frac{1}{m}$ کو لا انتہا بڑھا دیا جاتا ہے تو جب $\frac{1}{m}$ کے جملہ

ہر جیب آخر لامر اپنی دلیل کے مساوی ہو جاتی ہے، اسلئے
جب $y = y_1 (1 - \frac{y_1}{\pi}) (1 - \frac{y_2}{\pi}) (1 - \frac{y_3}{\pi}) \dots$
اسی طرح ضابطہ

جم $y = (1 - \frac{y_1}{\pi}) (1 - \frac{y_2}{\pi}) (1 - \frac{y_3}{\pi}) \dots$
کو ثابت کیا جاسکتا ہے۔

۲۸۶ — ضابطے (۱) اور (۲) مطلق استدقاق کی اس شرط کو
جو دفعہ ۲۸۱ میں بیان ہوئی ہے پورا کرتے ہیں کیونکہ یہ دو سلسلے

$\frac{1}{\pi} \geq \frac{1}{2\pi}$ اور $\frac{1}{\pi} \geq \frac{1}{2\pi}$ مستحق ہیں۔ ان
ضابطوں میں سے کسی حاصل ضرب کا ہر دو درجہ جزو ضربی دو خطی
اجزائے ضربی میں تحلیل کیا جاسکتا ہے، چنانچہ

(349)

جب $\lambda = \lambda_1 (1 + \frac{\lambda_1}{\pi}) (1 - \frac{\lambda_1}{\pi}) (1 + \frac{\lambda_2}{\pi}) (1 - \frac{\lambda_2}{\pi}) \dots$

جم $\lambda = (1 + \frac{\lambda_1}{\pi}) (1 - \frac{\lambda_1}{\pi}) (1 + \frac{\lambda_2}{\pi}) (1 - \frac{\lambda_2}{\pi}) \dots$
جنگو شکلوں

جب $\lambda = \lambda_1 (1 + \frac{\lambda_1}{\pi}) (1 + \frac{\lambda_2}{\pi}) \dots$ (۳)

جم $\lambda = \lambda_1 (1 + \frac{\lambda_1}{\pi(1-r)}) (1 + \frac{\lambda_2}{\pi(1-r)}) \dots$ (۴)

میں لکھا جاسکتا ہے۔

ان آخری شکلوں میں حاصل ضرب نیم مستحق ہیں کیونکہ
صوب ذیل حاصل ضرب

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda^2}{n^2}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{n^2}\right)$$

متبع ہیں اسوجہ سے کہ سلسلے $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ متبع ہیں۔
 کسی نیم مستدق حاصل ضرب میں نیم مستدق سلسلہ کی خاصیت کے ماٹل یہ خاصیت پائی جاتی ہے کہ اجزائے ضربی کی ترتیب کو بدلہ لینے سے حاصل ضرب کی قیمت بدلتا رہتا ہے، ہم ضابطوں (۳) اور (۴) کو صحیح خیال کر سکتے ہیں صرف اسوقت جبکہ یہ فرض کر لیا گیا ہو کہ رکی مثبت قیمتوں کی تعداد اسکی منفی قیمتوں کی تعداد کے مساوی لگائی ہے، اس طرح (۳) اور (۴) کو ان شکلوں

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda^2}{n^2}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{n^2}\right)$$

کا اختصار سمجھنا چاہئے۔
 ۲۸۷ — ویرسٹراس (Weierstrass) نے یہ ثابت کیا ہے کہ متبع حاصل ضرب

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda^2}{n^2}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{n^2}\right) \dots$$

مستدق بنایا جاسکتا ہے اگر اس کے ہر جزو ضربی کو ایک قوت ناجز ضربی سے ضرب دیا جائے۔ چنانچہ حاصل ضرب

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda^2}{n^2}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{n^2}\right) \dots$$

مطلقاً مستحق ہے۔

چونکہ حسب دفعہ ۲۳۰ (۱)

(850)

$$\frac{Y}{\pi N} - 1 = \frac{Y}{\pi N} + \frac{Y}{\pi N} - 1 = \frac{Y}{\pi N} (1 + 1)$$

جہاں $اعن$ صفر کی طرف مستحق ہوتا ہے جبکہ $ن$ کو لا انتہا بڑا دیا جاتا ہے، اسلئے اگر صہ اختیاری طور پر نتیجہ کوئی مثبت عدد ہو تو $اعن > صہ$ کی تمام قیمتوں کے لئے جو صہ پر منحصر کسی خاص قیمت سے بڑی ہوں۔ اب

$$\left\{ \frac{Y}{\pi N} + \frac{Y}{\pi N} - 1 \right\} \left(\frac{Y}{\pi N} + 1 \right) = \frac{Y}{\pi N} (1 + 1)$$

$$= \frac{Y}{\pi N} + \frac{Y}{\pi N} - 1 = \frac{Y}{\pi N} (1 + 1) - 1$$

وہ سلسلہ جسکی عام رقم

$$\left\{ \frac{Y}{\pi N} - 1 - 1 \right\} \frac{Y}{\pi N}$$

ہے مطلقاً مستحق ہے کیونکہ $ن$ کی کافی طور پر بڑی سب قیمتوں کے لئے

سلسلے $\frac{1}{N} \geq \frac{1}{N}$ مستحق ہیں اور $اعن > صہ$ میں ثابت ہو چکا ہے۔ اسلئے بموجب اس مسئلے کے جو دفعہ ۲۸۱ میں ثابت ہو چکا

ہے وہ لاستناہی حاصل ضرب جسکی عام رقم

محدود عدد ۰.۵۷۷۷۷۷۷۷... ہے جسکو یوں لکھا جاتا ہے کہ اس کے لئے س - س م کی انتہائی قیمت جبکہ م اور ن لامتناہی ہوں تو کم م کے انتہائی قیمت ہے۔ پس

$$\text{نسبہ (م)} = \frac{1}{n} \times \text{جب م}$$

جہاں ک = نسبت اور نسبتہ (م) کی قیمت = جب م صرف

اموقت جبکہ م اور ن مساوی ہوتے ہوئے لامتناہی ہو جائیں۔
۲۸۸ - جم لا کے ضابطہ (۲) کو (۱) یا (۳) سے ضابطہ
جم لا = جب ۲ لا ۲ جب ۱ کے ضابطہ اندک کیا جاسکتا ہے۔ چنانچہ

$$\frac{\text{جب ۲ لا}}{\text{جب ۱ لا}} = \frac{2}{1} \times \frac{\infty}{\infty} \left(\frac{2}{1} + 1 \right) \left(\frac{2}{1} + 1 \right) \left(\frac{2}{1} + 1 \right) \dots$$

تاکر اندہ کے وہ اجزاء ضربی جنکے لئے ر حقت ہے نسب نام کے
اجزاء ضربی کے ساتھ کٹ جاتے ہیں، اس لئے اگر ہم شمار کنندہ
کے حاصل ضرب کو $\frac{2}{1} \times \left(\frac{2}{1} + 1 \right) \times \dots$ کی انہا اور نسب نام کے حاصل ضرب

کو $\frac{2}{1} \times \left(\frac{2}{1} + 1 \right) \times \dots$ کی انتہائی کریں جبکہ ن لامتناہی ہو تو ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{جم لا} = \frac{2}{1} \times \left(\frac{2}{1} + 1 \right) \times \dots$$

جو (۲) یا (۳) کے مثل ہے۔ حاصل ضربوں کے استدقاق کی شرط
سے یہ واضح ہے کہ ایک حاصل ضرب میں ن کی بجائے ۲ ن
لینے سے اس حاصل ضرب کی انتہائی قیمت پر کوئی اثر نہیں پڑتا جبکہ
ن کو لامتناہی کر دیا جاتا ہے۔

۲۸۹ — ضابطوں جب لا = جم $(\frac{1}{r} - \pi - \frac{1}{r})$ جم لا = جب $(\frac{1}{r} - \pi - \frac{1}{r})$ کی مدد سے جب لا کے لئے حاصل ضربی ضابطہ جم لا کے ضابطہ سے اخذ کیا جاسکتا ہے یا اس کے بالعکس۔ ضابطہ (۲) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{جب لا} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\pi^2 - r^2}{\pi^2(1-r^2)}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi^2 - r^2}{\pi^2(1-r^2)}\right)$$

$$= \left(\frac{\pi}{r} - 1\right) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{r^2}{1-r^2} =$$

جہاں جزو ضربی لا، $r =$ کے جواب میں ہے۔ لا، کیلئے جب لا کی نہتہ

لینے سے ہم دیکھتے ہیں کہ لازماً $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{r^2}{1-r^2} = 1$ پس

$$\text{جب لا} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{r} - 1\right)$$

(352) ۲۹۰ — جب لا اور جم لا کے حاصل ضربی ضابطوں کو ہم ایسی شکل میں رکھ سکتے ہیں کہ اس سے ان کے دوری (Periodic) ہونیکی خاصیت ظاہر ہو جو تقاطعوں جب لا اور جم لا میں پائی جاتی ہے۔

$$\text{فرض کرو } f(\pi) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\pi}{r}\right)$$

تو

$$f(\pi) = (\pi + \frac{\pi}{r}) \left(1 + \frac{\pi}{r}\right) \left(1 + \frac{\pi}{r}\right) \dots$$

$$\left(1 + \frac{\pi}{r}\right) \left(1 + \frac{\pi}{r}\right) \dots \left(1 + \frac{\pi}{r}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{\pi}{r}\right) \left(1 + \frac{\pi}{r}\right) \dots \left(1 + \frac{\pi}{r}\right) \left(1 + \frac{\pi}{r}\right)$$

$$\frac{1+n}{n} \left(\frac{l}{\pi(1-n)} - 1 \right) \dots\dots$$

$$= \frac{\pi(1+n) + l}{n - \pi} \text{ ف (لا) }'$$

اب جبکہ n کو لا انتہا بڑھا دیا جاتا ہے تو نہاں $(\pi + l) =$ نہاں $(لا)$ جو مساوات جب $(\pi + l) =$ جب لا ہے۔ اسی طرح ضابطہ (۴) کو ایسی شکل میں رکھا جاسکتا ہے کہ اس سے خاصیت $\text{جم} (لا + \pi) = \text{جم} لا$

کا اظہار ہو۔

تفاعل جب لا معدوم ہوتا ہے جبکہ لا $= \pi \pm \pi \pm \dots\dots$

اور یہ قیثیں ضابطہ (۳) کے اجزائے ضربی لا $\pm \frac{l}{\pi}$ ، $\pm \frac{l}{\pi^2}$ ، $\dots\dots$ کے

جواب میں ہیں، نیز دفعہ ۲۳۵ میں یہ ثابت ہو چکا ہے کہ لا کی کسی خیالی قیمت کے لئے جب لا معدوم نہیں ہوتا، اسی طرح اگر یہ مان لیا جائے کہ جب لا کو لامتناہی حاصل ضرب

$$1 \text{ (لا - ل) (لا - ب) (لا - ج) } \dots\dots$$

کی شکل میں بیان کیا جاسکتا ہے تو $\frac{1}{\pi} \text{ ب ج} \dots\dots$ کی قیثیں لازماً صفر π ، $\pi - \pi^2$ ، $\pi^2 - \dots\dots$ ہونی چاہئیں۔ پھر $\frac{1}{\pi}$ کی قیمت لا = رکھ کر

حاصل کیجاتی ہے اور مسئلہ نہاں جب لا $=$ کو استعمال کر کے ضابطہ (۱)

یا (۳) حاصل کیا جاتا ہے۔ لیکن اس ضابطہ کے اس ثبوت کی دراصل کوئی قدر و قیمت نہیں کیونکہ بغیر ثبوت کے ہمیں یہ ماننے کا کوئی حق نہیں ہے کہ جب لا مطلوبہ شکل میں بیان ہو سکتا ہے۔

۲۹۱ — ضابطہ (۱) اور (۲) خیالی دلیل خما کی صورت میں

جو شکلیں اختیار کرتے ہیں ان پر غور کرنا ضروری ہے۔ اس صورت میں
جیزما کے لئے لا متناہی حاصل ضرب ملتے ہیں

$$\text{جیزما} = \left(\frac{r_1}{r_2 r_3} + 1\right) \left(\frac{r_1}{r_2 r_4} + 1\right) \left(\frac{r_1}{r_2 r_5} + 1\right) \dots \quad (5)$$

$$\text{جیزما} = \left(\frac{r_1}{r_2 r_5} + 1\right) \left(\frac{r_1}{r_2 r_6} + 1\right) \left(\frac{r_1}{r_2 r_7} + 1\right) \dots \quad (6)$$

(358)

یولر نے ضابطوں (۱)، (۲)، (۵)، (۶) کو اس متاثرہ

$$\left\{ \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 - \frac{1}{n}} \right\}^{n-1} = \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 - \frac{1}{n}} \quad \text{جہاں } m = 2, 3, 4, \dots$$

کی مدد سے سب سے اول حاصل کیا تھا۔ رکھو $1 + \frac{1}{m}$ تو یہ متاثرہ ہو جاتی ہے

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right) - \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} = \frac{n-m}{mn}$$

$$\left\{ \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 - \frac{1}{n}} \right\}^{n-1} = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{n-1}$$

اب اگر m کو لا انتہا بڑا کر دیا جائے تو یہ متاثرہ مساوات ہو جاتی ہے

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \quad \text{تو } \frac{1}{m} = \frac{2}{n}$$

جو ضابطہ (۵) ہے۔
انتہائی اس تخمین کے لئے دفعہ ۲۸۵ کی طرح، ٹھیک تحقیقات کی
ضرورت ہے۔

ضابطہ (۱)، لا کو خلائیں تبدیل کر کے اخذ کیا گیا تھا، اور اسی طرح

ضابطہ (۲) اور (۶) کی $1 + \frac{1}{m}$ کے ان جملوں سے حاصل کئے گئے تھے جو اجزائے ضرب

میں ہیں۔

مثالیں

۲۹۲۔ (۱) π کے لئے ویالیس (Wallis) کے جملہ کی تحقیق کرو۔جب لا کے اجزائے ضربی والے جملہ میں لا $\frac{1}{\pi}$ رکھو تو یہ تقریبی ضابطہ

$$\left(\frac{1}{2} - 1\right) \left(\frac{1}{4} - 1\right) \left(\frac{1}{6} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{2n} - 1\right) = \frac{1}{\pi}$$

مائل ہوتا ہے جبکہ n بڑا ہو۔ اس کو لکھا جاسکتا ہے۔

$$\frac{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n}{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)} = \sqrt{\frac{1}{\pi} (1 + \frac{1}{2n})}$$

اور یہ ویالیس کا ضابطہ ہے۔

(۲)۔ جنرما۔ جم عہ، جم لا۔ جم عہ کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرو۔

جنرما۔ جم عہ = ۲ جب $\frac{1}{\pi}$ (عہ + خا) جب $\frac{1}{\pi}$ (عہ - خا)

$$\left\{ \frac{(عہ + خا)^2}{2\pi^2 n^2} - 1 \right\} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} (عہ + خا)^2 \right) =$$

$$\left\{ \frac{(عہ - خا)^2}{2\pi^2 n^2} - 1 \right\} \times$$

اور ما = . رکھنے سے

$$1 - جم عہ = \frac{1}{\pi} (عہ)^2 \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} (عہ)^2 - 1 \right)$$

پس

$$\frac{جم عہ - جنرما}{جم عہ} = \left(\frac{1}{\pi} (عہ)^2 + 1 \right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} (عہ)^2 + 1 \right) \left(\frac{1}{\pi} (عہ)^2 - 1 \right)$$

$$\times \left(\frac{1}{\pi} (عہ)^2 - 1 \right) \left(\frac{1}{\pi} (عہ)^2 + 1 \right)$$

اس لئے

$$\left\{ \frac{1}{\pi(2) + \pi(2)} + 1 \right\}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi(2)} + 1 \right) = 2 \text{ جب } \frac{1}{\pi} = 1$$

$$\left\{ \frac{1}{\pi(2) - \pi(2)} + 1 \right\} =$$

(854)

اس میں ماکہ بھانے خ لا رکھنے ہے

$$\left\{ \frac{1}{\pi(2) + \pi(2)} - 1 \right\}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi(2)} - 1 \right) = 2 \text{ جب } \frac{1}{\pi} = 1$$

$$\left\{ \frac{1}{\pi(2) - \pi(2)} - 1 \right\} =$$

(۳) ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} + \dots$$

$$= \frac{1}{\pi} - \pi \left(\frac{1}{\pi} \right) = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} = 0$$

$$\left\{ \frac{1}{\pi(2) + \pi(2)} - 1 \right\}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi(2)} - 1 \right) = 2 \text{ جب } \frac{1}{\pi} = 1$$

اس لئے نوکارتھ لینے سے یہ مساوات ہو جاتی ہے

لوک (جب لا جنرماہ خرم لا جنرما) = لوک (لا + خما)

$$\left\{ \frac{1}{\pi(2) + \pi(2)} - 1 \right\}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi(2)} - 1 \right) = 2 \text{ جب } \frac{1}{\pi} = 1$$

اس مساوات کی طرفین کے خیالی حصوں کو مساوی رکھنے سے

$$\frac{1}{\pi} - \pi \left(\frac{1}{\pi} \right) = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} = 0$$

$$\frac{1}{\pi} = 1 = \frac{1}{\pi}$$

فرض کرو

$$\text{نو } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{6} \pi^2 - \frac{1}{6} (\zeta(2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}})$$

قوت نہ متفاعل کو لامتناہی حاصل ضرب کے طور پر بیان کرنا

۲۹۲ (b)۔ اس صورت میں ہمیں ای | > ا قوت خافقاعل نو لا کو میا ہوز
(Mathews) نے مطلوبہ شکل میں بیان کیا ہے۔

فرض کرو کہ y ایک مستند سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty} k_n$ کی لوک (۱ + y) کا

انتہائی مجموعہ پر تب ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ $a_1 = 1$ اور $n > 1$ کیلئے

$$= \frac{(1 - \alpha)}{\alpha} \beta + \alpha$$

جہاں ضہ، ان کا کوئی مناسب صحیح حدودی جزو ضروری ہے اور ضہ = ^{۱۱}ضہ،
ضہ کی ہر ایسی قیمت کے جواب میں ایک رقم ملتی ہے۔ اس سے یہ نتیجہ
نکلتا ہے کہ

نک = $z(1 - z)$ نک = $z(1 - z)$ نک = $z(1 - z)$

اور تمام عددوں کی ان قیمتوں کو مساواتوں کے اس جٹ سے معلوم کرنا ہوگا جنکا نمونہ یہ مساوات ہے۔ اب استقراء سے یہ دکھایا جاسکتا ہے

(۱) اگر $n = \frac{1}{2}$ تو $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

(۲) اگر 'ن'، 'م' مختلف طاق مفرد عددوں کا مائل ضرب

فان... فمرو

$$T_n = (1 - \frac{1}{n}) T_{n-1}$$

(۳۵۵)

(۳) اگر $n = 2^k \cdot f$... فیر تو $k = (1 - 2^{-k}) \cdot n$

(۴) اگر n کا ایک جزو ضربی طاق عدد کا مربع ہو تو $k = 0$ ۔
اب یہ واقعہ کہ k کی ان قیمتوں کے ساتھ جو حسب استخراج
بالا حاصل ہوتی ہیں سلسلہ

۳ ک لوک $(1 + 2^k)$

ای $| > 1$ کے لئے مستحق ہوتا ہے آسانی کے ساتھ دیکھا جاسکتا ہے۔
پس 1 کی سب قیمتوں کے لئے ایسی کہ $| > 1$ ا قوت ثا تفاعل
فوجا اس لا متناہی حاصل ضرب

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + 2^{-k}) = (1 + 2^{-1})(1 + 2^{-2})(1 + 2^{-3}) \dots$$

یے تبصیر ہوتا ہے، یا چونکہ $1 = (1 - 2^{-1})(1 + 2^{-1})(1 + 2^{-2}) \dots$ اسلئے عمل
تقسیم سے حاصل ہوتا ہے

$$f = \left(\frac{1 + 2^{-1}}{1 - 2^{-1}} \right) \prod_{k=2}^{\infty} (1 + 2^{-k})$$

جہاں f ، مہ غیر مساوی طاق مفردوں کا حاصل ضرب ہے اور f کی
سب قیمتیں جو اس شکل کی ہیں لگی ہیں۔

ماس، ماس التمام، قاطع، اور قاطع التمام کے لئے سلسلہ

$$293 - \text{چونکہ جب } y = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{2^{-k}}{2})$$

اس لئے اگر y ، π کا ضعف نہیں ہے تو

$$\text{لوک } \omega \text{ جب } \gamma = \text{لوک } \omega + \frac{\infty}{2} \text{ لوک } \omega (1 - \frac{\gamma}{\pi n})$$

فرض کرو کہ ω ایک مثبت حقیقی عدد ہے۔ تب γ کو $\gamma + \omega$ میں تبدیل کرنے سے اور پھر ان دو جملوں کو تفریق کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{لوک } \omega \text{ جب } (\gamma + \omega) = \text{لوک } \omega (1 + \frac{\omega}{\gamma}) + \frac{\infty}{2} \{ \text{لوک } \omega (1 + \frac{\omega}{\gamma}) \}$$

$$+ \text{لوک } \omega (1 + \frac{\omega}{\gamma})$$

اب دفعہ ۲۴۹ (۱) کا مسئلہ استعمال کرنے سے

$$\text{لوک } \omega (1 + \frac{\omega}{\gamma}) = \frac{\gamma}{\omega} - \frac{1}{\gamma} \frac{\omega^2}{\gamma^2} (1 + \frac{\omega}{\gamma})$$

$$\text{لوک } \omega (1 + \frac{\omega}{\gamma}) = \frac{\gamma}{\omega} - \frac{1}{\gamma} \frac{\omega^2}{(\pi n - \gamma)^2} (1 + \frac{\omega}{\gamma})$$

$$\text{لوک } \omega (1 + \frac{\omega}{\gamma}) = \frac{\gamma}{\omega} - \frac{1}{\gamma} \frac{\omega^2}{(\pi n + \gamma)^2} (1 + \frac{\omega}{\gamma})$$

جہاں ω ، γ ، πn سب کے سب صفر کی طرف مستحق ہوتے ہیں (356)

جبکہ ω کو لا انتہا گھٹا دیا جاتا ہے۔ مزید براں اگر γ کی کوئی ثابت قیمت ہو جو صفر نہیں ہے یا π کا مثبت یا منفی صحیح عددی ضعیف تو ω کی کافی طور پر چھوٹی سب قیمتوں کے لئے عدد $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100$ سب کے سب کسی اختیاری طور پر منتخب مثبت عدد ω سے کم ہیں کیونکہ γ ، πn ، $\gamma + \omega$ کے مقیاس کسی ثابت عدد سے جو n پر منحصر نہیں ہے بڑے ہیں۔

پس اب

$$\frac{1}{h} \text{ لوگ کو جب } (y + \infty)$$

$$= \left[\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} \right] + \left[\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} \right] + \dots + \left[\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} \right] = \frac{1}{y} - \frac{1}{y+n} = \frac{1}{y} - \frac{1}{\pi n + y}$$

$$\left[\frac{1}{y} - \frac{1}{y+n} \right] = \frac{1}{y} - \frac{1}{\pi n + y}$$

جہاں بائیں جانب کا سلسلہ مستحق ہوتا ہے جبکہ 'ی' کا ضعف نہ ہو
فرض کر دو کہ 'ی' ہے ایسا کہ $(-1) > \pi > |y| > \pi$ جہاں
ر کوئی مثبت صحیح عدد ہے، تب اگر 'ی' π $\pi = \pi$ $\pi > \pi$ کی
سب قیمتوں کے لئے جو ر سے بڑی یا اسکے مساوی ہوں

$$|y| > \pi \geq \pi - y$$

$$\frac{1}{\pi - y} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi(\pi - y)} \geq \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2}$$

بشرطیکہ $n \leq r$ ، پس چونکہ وہ سلسلہ جسکی عام رقم 'ن' ہے مستحق

ہے اسلئے وہ سلسلہ جسکی عام رقم $\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2}$ ہے مطلقاً مستحق ہے۔

اب چونکہ وہ دو سلسلے جسکی عام رقمیں ہیں

$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2} \text{ اور } \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\pi^2} = \frac{1}{\pi}$$

دونوں مستحق ہیں اسلئے وہ سلسلہ بھی جسکی عام رقم ہے

چونکہ جب $(ی + م) = \frac{م}{ی}$ جم $م + جب م مم ی = ۱ + م مم ی (۱ + ضا)$

جہاں اضا $م$ کے ساتھ صفر کی طرف مستقر ہوتا ہے اسلئے

$$\frac{۱}{م} \text{ لوک } \frac{جب (ی + م)}{جب ی} = \frac{۱}{م} \text{ لوک } \{ ۱ + م مم ی (۱ + ضا) \}$$

$$= مم ی (۱ + ضا) (۱ + ضا)$$

جہاں اضا $م$ کے ساتھ صفر کی طرف مستقر ہوتا ہے۔ پس

$$نہیں۔۔۔ \frac{۱}{م} \text{ لوک } \frac{جب (ی + م)}{جب ی} = مم ی$$

اب یہ دکھایا جا چکا ہے کہ جب $ی$ کوئی حقیقی یا ملحق عدد ہو جو π کا صحیح عددی ضعف نہیں ہے تو مم $ی$ اس مستقر سلسلہ

$$\frac{۱}{ی} + \frac{۱}{\pi + ی} + \frac{۱}{\pi - ی} + \frac{۱}{\pi + ی} + \frac{۱}{\pi - ی} + \dots (۷)$$

$$\text{کا } ۱ + \frac{۱}{ی} + \frac{۱}{ی^۲} + \frac{۱}{ی^۳} + \dots (۸)$$

کا مجموعہ ہے۔

شکل (۷) میں سلسلہ بالانیم مستقر ہے اور شکل (۸) میں

وہ مطلقاً مستقر ہے، بجری $\pi \pm ۱, \pi \pm ۲, \dots$ کے اور ان قیمتوں کے لئے یہ سلسلہ متع ہے۔

مندرجہ مذکور تحقیق کی ضرورت جتانے کے لئے یہ بتانا کافی ہے کہ

اگر $(ی)$ مستقر سلسلہ $۱, (ی), ۴, (ی), ۹, (ی), ۱۶, (ی), ۲۵, (ی), ۳۶, (ی), ۴۹, (ی), ۶۴, (ی), ۸۱, (ی), ۱۰۰, (ی), ۱۲۱, (ی), ۱۴۴, (ی), ۱۶۹, (ی), ۱۹۶, (ی), ۲۲۵, (ی), ۲۵۶, (ی), ۲۸۹, (ی), ۳۲۴, (ی), ۳۶۱, (ی), ۴۰۰, (ی), ۴۴۱, (ی), ۴۸۴, (ی), ۵۲۹, (ی), ۵۷۶, (ی), ۶۲۵, (ی), ۶۷۶, (ی), ۷۲۹, (ی), ۷۸۴, (ی), ۸۴۱, (ی), ۹۰۰, (ی), ۹۶۱, (ی), ۱۰۲۴, (ی), ۱۰۸۹, (ی), ۱۱۵۶, (ی), ۱۲۲۵, (ی), ۱۲۹۶, (ی), ۱۳۶۹, (ی), ۱۴۴۴, (ی), ۱۵۲۱, (ی), ۱۶۰۰, (ی), ۱۶۸۱, (ی), ۱۷۶۴, (ی), ۱۸۴۹, (ی), ۱۹۳۶, (ی), ۲۰۲۵, (ی), ۲۱۱۶, (ی), ۲۲۰۹, (ی), ۲۳۰۴, (ی), ۲۴۰۱, (ی), ۲۵۰۰, (ی), ۲۶۰۱, (ی), ۲۷۰۴, (ی), ۲۸۰۹, (ی), ۲۹۱۶, (ی), ۳۰۲۵, (ی), ۳۱۳۶, (ی), ۳۲۴۹, (ی), ۳۳۶۴, (ی), ۳۴۸۱, (ی), ۳۶۰۰, (ی), ۳۷۲۱, (ی), ۳۸۴۴, (ی), ۳۹۶۹, (ی), ۴۰۹۶, (ی), ۴۲۲۵, (ی), ۴۳۵۶, (ی), ۴۴۸۹, (ی), ۴۶۲۴, (ی), ۴۷۶۱, (ی), ۴۹۰۰, (ی), ۵۰۴۱, (ی), ۵۱۸۴, (ی), ۵۳۲۹, (ی), ۵۴۷۶, (ی), ۵۶۲۵, (ی), ۵۷۷۶, (ی), ۵۹۲۹, (ی), ۶۰۸۴, (ی), ۶۲۴۱, (ی), ۶۴۰۰, (ی), ۶۵۶۱, (ی), ۶۷۲۴, (ی), ۶۸۸۹, (ی), ۷۰۵۶, (ی), ۷۲۲۵, (ی), ۷۳۹۶, (ی), ۷۵۶۹, (ی), ۷۷۴۴, (ی), ۷۹۲۱, (ی), ۸۱۰۰, (ی), ۸۲۸۱, (ی), ۸۴۶۴, (ی), ۸۶۴۹, (ی), ۸۸۳۶, (ی), ۹۰۲۵, (ی), ۹۲۱۶, (ی), ۹۴۰۹, (ی), ۹۶۰۴, (ی), ۹۸۰۱, (ی), ۱۰۰۰۰, (ی), ۱۰۲۰۱, (ی), ۱۰۴۰۴, (ی), ۱۰۶۱۱, (ی), ۱۰۸۲۴, (ی), ۱۱۰۴۱, (ی), ۱۱۲۶۴, (ی), ۱۱۴۹۱, (ی), ۱۱۷۲۴, (ی), ۱۱۹۶۱, (ی), ۱۲۲۰۰, (ی), ۱۲۴۴۱, (ی), ۱۲۶۸۴, (ی), ۱۲۹۳۱, (ی), ۱۳۱۸۴, (ی), ۱۳۴۴۱, (ی), ۱۳۷۰۰, (ی), ۱۳۹۶۱, (ی), ۱۴۲۲۴, (ی), ۱۴۴۹۱, (ی), ۱۴۷۶۴, (ی), ۱۵۰۴۱, (ی), ۱۵۳۲۴, (ی), ۱۵۶۰۱, (ی), ۱۵۸۸۴, (ی), ۱۶۱۶۱, (ی), ۱۶۴۴۴, (ی), ۱۶۷۲۱, (ی), ۱۷۰۰۰, (ی), ۱۷۲۸۱, (ی), ۱۷۵۶۴, (ی), ۱۷۸۴۱, (ی), ۱۸۱۲۴, (ی), ۱۸۴۰۱, (ی), ۱۸۶۸۴, (ی), ۱۸۹۶۱, (ی), ۱۹۲۴۴, (ی), ۱۹۵۲۱, (ی), ۱۹۸۰۰, (ی), ۲۰۰۸۱, (ی), ۲۰۳۶۴, (ی), ۲۰۶۴۱, (ی), ۲۰۹۲۴, (ی), ۲۱۲۰۱, (ی), ۲۱۴۸۴, (ی), ۲۱۷۶۱, (ی), ۲۲۰۴۴, (ی), ۲۲۳۲۱, (ی), ۲۲۶۰۰, (ی), ۲۲۸۸۱, (ی), ۲۳۱۶۴, (ی), ۲۳۴۴۱, (ی), ۲۳۷۲۴, (ی), ۲۴۰۰۱, (ی), ۲۴۲۸۴, (ی), ۲۴۵۶۱, (ی), ۲۴۸۴۴, (ی), ۲۵۱۲۱, (ی), ۲۵۴۰۰, (ی), ۲۵۶۸۱, (ی), ۲۵۹۶۴, (ی), ۲۶۲۴۱, (ی), ۲۶۵۲۴, (ی), ۲۶۸۰۱, (ی), ۲۷۰۸۴, (ی), ۲۷۳۶۱, (ی), ۲۷۶۴۴, (ی), ۲۷۹۲۱, (ی), ۲۸۲۰۰, (ی), ۲۸۴۸۱, (ی), ۲۸۷۶۴, (ی), ۲۹۰۴۱, (ی), ۲۹۳۲۴, (ی), ۲۹۶۰۱, (ی), ۲۹۸۸۴, (ی), ۳۰۱۶۱, (ی), ۳۰۴۴۴, (ی), ۳۰۷۲۱, (ی), ۳۱۰۰۰, (ی), ۳۱۲۸۱, (ی), ۳۱۵۶۴, (ی), ۳۱۸۴۱, (ی), ۳۲۱۲۴, (ی), ۳۲۴۰۱, (ی), ۳۲۶۸۴, (ی), ۳۲۹۶۱, (ی), ۳۳۲۴۴, (ی), ۳۳۵۲۱, (ی), ۳۳۸۰۰, (ی), ۳۴۰۸۱, (ی), ۳۴۳۶۴, (ی), ۳۴۶۴۱, (ی), ۳۴۹۲۴, (ی), ۳۵۲۰۱, (ی), ۳۵۴۸۴, (ی), ۳۵۷۶۱, (ی), ۳۶۰۴۴, (ی), ۳۶۳۲۱, (ی), ۳۶۶۰۰, (ی), ۳۶۸۸۱, (ی), ۳۷۱۶۴, (ی), ۳۷۴۴۱, (ی), ۳۷۷۲۴, (ی), ۳۸۰۰۱, (ی), ۳۸۲۸۴, (ی), ۳۸۵۶۱, (ی), ۳۸۸۴۴, (ی), ۳۹۱۲۱, (ی), ۳۹۴۰۰, (ی), ۳۹۶۸۱, (ی), ۳۹۹۶۴, (ی), ۴۰۲۴۱, (ی), ۴۰۵۲۴, (ی), ۴۰۸۰۱, (ی), ۴۱۰۸۴, (ی), ۴۱۳۶۱, (ی), ۴۱۶۴۴, (ی), ۴۱۹۲۱, (ی), ۴۲۲۰۰, (ی), ۴۲۴۸۱, (ی), ۴۲۷۶۴, (ی), ۴۳۰۴۱, (ی), ۴۳۳۲۴, (ی), ۴۳۶۰۱, (ی), ۴۳۸۸۴, (ی), ۴۴۱۶۱, (ی), ۴۴۴۴۴, (ی), ۴۴۷۲۱, (ی), ۴۵۰۰۰, (ی), ۴۵۲۸۱, (ی), ۴۵۵۶۴, (ی), ۴۵۸۴۱, (ی), ۴۶۱۲۴, (ی), ۴۶۴۰۱, (ی), ۴۶۶۸۴, (ی), ۴۶۹۶۱, (ی), ۴۷۲۴۴, (ی), ۴۷۵۲۱, (ی), ۴۷۸۰۰, (ی), ۴۸۰۸۱, (ی), ۴۸۳۶۴, (ی), ۴۸۶۴۱, (ی), ۴۸۹۲۴, (ی), ۴۹۲۰۱, (ی), ۴۹۴۸۴, (ی), ۴۹۷۶۱, (ی), ۵۰۰۴۴, (ی), ۵۰۳۲۱, (ی), ۵۰۶۰۰, (ی), ۵۰۸۸۱, (ی), ۵۱۱۶۴, (ی), ۵۱۴۴۱, (ی), ۵۱۷۲۴, (ی), ۵۲۰۰۱, (ی), ۵۲۲۸۴, (ی), ۵۲۵۶۱, (ی), ۵۲۸۴۴, (ی), ۵۳۱۲۱, (ی), ۵۳۴۰۰, (ی), ۵۳۶۸۱, (ی), ۵۳۹۶۴, (ی), ۵۴۲۴۱, (ی), ۵۴۵۲۴, (ی), ۵۴۸۰۱, (ی), ۵۵۰۸۴, (ی), ۵۵۳۶۱, (ی), ۵۵۶۴۴, (ی), ۵۵۹۲۱, (ی), ۵۶۲۰۰, (ی), ۵۶۴۸۱, (ی), ۵۶۷۶۴, (ی), ۵۷۰۴۱, (ی), ۵۷۳۲۴, (ی), ۵۷۶۰۱, (ی), ۵۷۸۸۴, (ی), ۵۸۱۶۱, (ی), ۵۸۴۴۴, (ی), ۵۸۷۲۱, (ی), ۵۹۰۰۰, (ی), ۵۹۲۸۱, (ی), ۵۹۵۶۴, (ی), ۵۹۸۴۱, (ی), ۶۰۱۲۴, (ی), ۶۰۴۰۱, (ی), ۶۰۶۸۴, (ی), ۶۰۹۶۱, (ی), ۶۱۲۴۴, (ی), ۶۱۵۲۱, (ی), ۶۱۸۰۰, (ی), ۶۲۰۸۱, (ی), ۶۲۳۶۴, (ی), ۶۲۶۴۱, (ی), ۶۲۹۲۴, (ی), ۶۳۲۰۱, (ی), ۶۳۴۸۴, (ی), ۶۳۷۶۱, (ی), ۶۴۰۴۴, (ی), ۶۴۳۲۱, (ی), ۶۴۶۰۰, (ی), ۶۴۸۸۱, (ی), ۶۵۱۶۴, (ی), ۶۵۴۴۱, (ی), ۶۵۷۲۴, (ی), ۶۶۰۰۱, (ی), ۶۶۲۸۴, (ی), ۶۶۵۶۱, (ی), ۶۶۸۴۴, (ی), ۶۷۱۲۱, (ی), ۶۷۴۰۰, (ی), ۶۷۶۸۱, (ی), ۶۷۹۶۴, (ی), ۶۸۲۴۱, (ی), ۶۸۵۲۴, (ی), ۶۸۸۰۱, (ی), ۶۹۰۸۴, (ی), ۶۹۳۶۱, (ی), ۶۹۶۴۴, (ی), ۶۹۹۲۱, (ی), ۷۰۲۰۰, (ی), ۷۰۴۸۱, (ی), ۷۰۷۶۴, (ی), ۷۱۰۴۱, (ی), ۷۱۳۲۴, (ی), ۷۱۶۰۱, (ی), ۷۱۸۸۴, (ی), ۷۲۱۶۱, (ی), ۷۲۴۴۴, (ی), ۷۲۷۲۱, (ی), ۷۳۰۰۰, (ی), ۷۳۲۸۱, (ی), ۷۳۵۶۴, (ی), ۷۳۸۴۱, (ی), ۷۴۱۲۴, (ی), ۷۴۴۰۱, (ی), ۷۴۶۸۴, (ی), ۷۴۹۶۱, (ی), ۷۵۲۴۴, (ی), ۷۵۵۲۱, (ی), ۷۵۸۰۰, (ی), ۷۶۰۸۱, (ی), ۷۶۳۶۴, (ی), ۷۶۶۴۱, (ی), ۷۶۹۲۴, (ی), ۷۷۲۰۱, (ی), ۷۷۴۸۴, (ی), ۷۷۷۶۱, (ی), ۷۸۰۴۴, (ی), ۷۸۳۲۱, (ی), ۷۸۶۰۰, (ی), ۷۸۸۸۱, (ی), ۷۹۱۶۴, (ی), ۷۹۴۴۱, (ی), ۷۹۷۲۴, (ی), ۸۰۰۰۱, (ی), ۸۰۲۸۴, (ی), ۸۰۵۶۱, (ی), ۸۰۸۴۴, (ی), ۸۱۱۲۱, (ی), ۸۱۴۰۰, (ی), ۸۱۶۸۱, (ی), ۸۱۹۶۴, (ی), ۸۲۲۴۱, (ی), ۸۲۵۲۴, (ی), ۸۲۸۰۱, (ی), ۸۳۰۸۴, (ی), ۸۳۳۶۱, (ی), ۸۳۶۴۴, (ی), ۸۳۹۲۱, (ی), ۸۴۲۰۰, (ی), ۸۴۴۸۱, (ی), ۸۴۷۶۴, (ی), ۸۵۰۴۱, (ی), ۸۵۳۲۴, (ی), ۸۵۶۰۱, (ی), ۸۵۸۸۴, (ی), ۸۶۱۶۱, (ی), ۸۶۴۴۴, (ی), ۸۶۷۲۱, (ی), ۸۷۰۰۰, (ی), ۸۷۲۸۱, (ی), ۸۷۵۶۴, (ی), ۸۷۸۴۱, (ی), ۸۸۱۲۴, (ی), ۸۸۴۰۱, (ی), ۸۸۶۸۴, (ی), ۸۸۹۶۱, (ی), ۸۹۲۴۴, (ی), ۸۹۵۲۱, (ی), ۸۹۸۰۰, (ی), ۹۰۰۸۱, (ی), ۹۰۳۶۴, (ی), ۹۰۶۴۱, (ی), ۹۰۹۲۴, (ی), ۹۱۲۰۱, (ی), ۹۱۴۸۴, (ی), ۹۱۷۶۱, (ی), ۹۲۰۴۴, (ی), ۹۲۳۲۱, (ی), ۹۲۶۰۰, (ی), ۹۲۸۸۱, (ی), ۹۳۱۶۴, (ی), ۹۳۴۴۱, (ی), ۹۳۷۲۴, (ی), ۹۴۰۰۱, (ی), ۹۴۲۸۴, (ی), ۹۴۵۶۱, (ی), ۹۴۸۴۴, (ی), ۹۵۱۲۱, (ی), ۹۵۴۰۰, (ی), ۹۵۶۸۱, (ی), ۹۵۹۶۴, (ی), ۹۶۲۴۱, (ی), ۹۶۵۲۴, (ی), ۹۶۸۰۱, (ی), ۹۷۰۸۴, (ی), ۹۷۳۶۱, (ی), ۹۷۶۴۴, (ی), ۹۷۹۲۱, (ی), ۹۸۲۰۰, (ی), ۹۸۴۸۱, (ی), ۹۸۷۶۴, (ی), ۹۹۰۴۱, (ی), ۹۹۳۲۴, (ی), ۹۹۶۰۱, (ی), ۹۹۸۸۴, (ی), ۱۰۰۱۶۱, (ی), ۱۰۰۴۴۴, (ی), ۱۰۰۷۲۱, (ی), ۱۰۱۰۰۰, (ی), ۱۰۱۲۸۱, (ی), ۱۰۱۵۶۴, (ی), ۱۰۱۸۴۱, (ی), ۱۰۲۱۲۴, (ی), ۱۰۲۴۰۱, (ی), ۱۰۲۶۸۴, (ی), ۱۰۲۹۶۱, (ی), ۱۰۳۲۴۴, (ی), ۱۰۳۵۲۱, (ی), ۱۰۳۸۰۰, (ی), ۱۰۴۰۸۱, (ی), ۱۰۴۳۶۴, (ی), ۱۰۴۶۴۱, (ی), ۱۰۴۹۲۴, (ی), ۱۰۵۲۰۱, (ی), ۱۰۵۴۸۴, (ی), ۱۰۵۷۶۱, (ی), ۱۰۶۰۴۴, (ی), ۱۰۶۳۲۱, (ی), ۱۰۶۶۰۰, (ی), ۱۰۶۸۸۱, (ی), ۱۰۷۱۶۴, (ی), ۱۰۷۴۴۱, (ی), ۱۰۷۷۲۴, (ی), ۱۰۸۰۰۱, (ی), ۱۰۸۲۸۴, (ی), ۱۰۸۵۶۱, (ی), ۱۰۸۸۴۴, (ی), ۱۰۹۱۲۱, (ی), ۱۰۹۴۰۰, (ی), ۱۰۹۶۸۱, (ی), ۱۰۹۹۶۴, (ی), ۱۱۰۲۴۱, (ی), ۱۱۰۵۲۴, (ی), ۱۱۰۸۰۱, (ی), ۱۱۱۰۸۴, (ی), ۱۱۱۳۶۱, (ی), ۱۱۱۶۴۴, (ی), ۱۱۱۹۲۱, (ی), ۱۱۲۲۰۰, (ی), ۱۱۲۴۸۱, (ی), ۱۱۲۷۶۴, (ی), ۱۱۳۰۴۱, (ی), ۱۱۳۳۲۴, (ی), ۱۱۳۶۰۱, (ی), ۱۱۳۸۸۴, (ی), ۱۱۴۱۶۱, (ی), ۱۱۴۴۴۴, (ی), ۱۱۴۷۲۱, (ی), ۱۱۵۰۰۰, (ی), ۱۱۵۲۸۱, (ی), ۱۱۵۵۶۴, (ی), ۱۱۵۸۴۱, (ی), ۱۱۶۱۲۴, (ی), ۱۱۶۴۰۱, (ی), ۱۱۶۶۸۴, (ی), ۱۱۶۹۶۱, (ی), ۱۱۷۲۴۴, (ی), ۱۱۷۵۲۱, (ی), ۱۱۷۸۰۰, (ی), ۱۱۸۰۸۱, (ی), ۱۱۸۳۶۴, (ی), ۱۱۸۶۴۱, (ی), ۱۱۸۹۲۴, (ی), ۱۱۹۲۰۱, (ی), ۱۱۹۴۸۴, (ی), ۱۱۹۷۶۱, (ی), ۱۲۰۰۴۴, (ی), ۱۲۰۳۲۱, (ی), ۱۲۰۶۰۰, (ی), ۱۲۰۸۸۱, (ی), ۱۲۱۱۶۴, (ی), ۱۲۱۴۴۱, (ی), ۱۲۱۷۲۴, (ی), ۱۲۲۰۰۱, (ی), ۱۲۲۲۸۴, (ی), ۱۲۲۵۶۱, (ی), ۱۲۲۸۴۴, (ی), ۱۲۳۱۲۱, (ی), ۱۲۳۴۰۰, (ی), ۱۲۳۶۸۱, (ی), ۱۲۳۹۶۴, (ی), ۱۲۴۲۴۱, (ی), ۱۲۴۵۲۴, (ی), ۱۲۴۸۰۱, (ی), ۱۲۵۰۸۴, (ی), ۱۲۵۳۶۱, (ی), ۱۲۵۶۴۴, (ی), ۱۲۵۹۲۱, (ی), ۱۲۶۲۰۰, (ی), ۱۲۶۴۸۱, (ی), ۱۲۶۷۶۴, (ی), ۱۲۷۰۴۱, (ی), ۱۲۷۳۲۴, (ی), ۱۲۷۶۰۱, (ی), ۱۲۷۸۸۴, (ی), ۱۲۸۱۶۱, (ی), ۱۲۸۴۴۴, (ی), ۱۲۸۷۲۱, (ی), ۱۲۹۰۰۰, (ی), ۱۲۹۲۸۱, (ی), ۱۲۹۵۶۴, (ی), ۱۲۹۸۴۱, (ی), ۱۳۰۱۲۴, (ی), ۱۳۰۴۰۱, (ی), ۱۳۰۶۸۴, (ی), ۱۳۰۹۶۱, (ی), ۱۳۱۲۴۴, (ی), ۱۳۱۵۲۱, (ی), ۱۳۱۸۰۰, (ی), ۱۳۲۰۸۱, (ی), ۱۳۲۳۶۴, (ی), ۱۳۲۶۴۱, (ی), ۱۳۲۹۲۴, (ی), ۱۳۳۲۰۱, (ی), ۱۳۳۴۸۴, (ی), ۱۳۳۷۶۱, (ی), ۱۳۴۰۴۴, (ی), ۱۳۴۳۲۱, (ی), ۱۳۴۶۰۰, (ی), ۱۳۴۸۸۱, (ی), ۱۳۵۱۶۴, (ی), ۱۳۵۴۴۱, (ی), ۱۳۵۷۲۴, (ی), ۱۳۶۰۰۱, (ی), ۱۳۶۲۸۴, (ی), ۱۳۶۵۶۱, (ی), ۱۳۶۸۴۴, (ی), ۱۳۷۱۲۱, (ی), ۱۳۷۴۰۰, (ی), ۱۳۷۶۸۱, (ی), ۱۳۷۹۶۴, (ی), ۱۳۸۲۴۱, (ی), ۱۳۸۵۲۴, (ی), ۱۳۸۸۰۱, (ی), ۱۳۹۰۸۴, (ی), ۱۳۹۳۶۱, (ی), ۱۳۹۶۴۴, (ی), ۱۳۹۹۲۱, (ی), ۱۴۰۲۰۰, (ی), ۱۴۰۴۸۱, (ی), ۱۴۰۷۶۴, (ی), ۱۴۱۰۴۱, (ی), ۱۴۱۳۲۴, (ی), ۱۴۱۶۰۱, (ی), ۱۴۱۸۸۴, (ی), ۱۴۲۱۶۱, (ی), ۱۴۲۴۴۴, (ی), ۱۴۲۷۲۱, (ی), ۱۴۳۰۰۰, (ی), ۱۴۳۲۸۱, (ی), ۱۴۳۵۶۴, (ی), ۱۴۳۸۴۱, (ی), ۱۴۴۱۲۴, (ی), ۱۴۴۴۰۱, (ی), ۱۴۴۶۸۴, (ی), ۱۴۴۹۶۱, (ی), ۱۴۵۲۴۴, (ی), ۱۴۵۵۲۱, (ی), ۱۴۵۸۰۰, (ی), ۱۴۶۰۸۱, (ی), ۱۴۶۳۶۴, (ی), ۱۴۶۶۴۱, (ی), ۱۴۶۹۲۴, (ی), ۱۴۷۲۰۱, (ی), ۱۴۷۴۸۴, (ی), ۱۴۷۷۶۱, (ی), ۱۴۸۰۴۴, (ی), ۱۴۸۳۲۱, (ی), ۱۴۸۶۰۰, (ی), ۱۴۸۸۸۱, (ی), ۱۴۹۱۶۴, (ی), ۱۴۹۴۴۱, (ی), ۱۴۹۷۲۴, (ی), ۱۵۰۰۰۱, (ی), ۱۵۰۲۸۴, (ی), ۱۵۰۵۶۱, (ی), ۱۵۰۸۴۴, (ی), ۱۵۱۱۲۱, (ی), ۱۵۱۴۰۰, (ی), ۱۵۱۶۸۱, (ی), ۱۵۱۹۶۴, (ی), ۱۵۲۲۴۱, (ی), ۱۵۲۵۲۴, (ی), ۱۵۲۸۰۱, (ی), ۱۵۳۰۸۴, (ی), ۱۵۳۳۶۱, (ی), ۱۵۳۶۴۴, (ی), ۱۵۳۹۲۱, (ی), ۱۵۴۲۰۰, (ی), ۱۵۴۴۸۱, (ی), ۱۵۴۷۶۴, (ی), ۱۵۵۰۴۱, (ی), ۱۵۵۳۲۴, (ی), ۱۵۵۶۰۱, (ی), ۱۵۵۸۸۴, (ی), ۱۵۶۱۶۱, (ی), ۱۵۶۴۴۴, (ی), ۱۵۶۷۲۱, (ی), ۱۵۷۰۰۰, (ی), ۱۵۷۲۸۱, (ی), ۱۵۷۵۶۴, (ی), ۱۵۷۸۴۱, (ی), ۱۵۸۱۲۴, (ی), ۱۵۸۴۰۱, (ی), ۱۵۸۶۸۴, (ی), ۱۵۸۹۶۱, (ی), ۱۵۹۲۴۴, (ی), ۱۵۹۵۲۱, (ی), ۱۵۹۸۰۰, (ی), ۱۶۰۰۸۱, (ی), ۱۶۰۳۶۴, (ی), ۱۶۰۶۴۱, (ی), ۱۶۰۹۲۴, (ی), ۱۶۱۲۰۱, (ی), ۱۶۱۴۸۴, (ی), ۱۶۱۷۶۱, (ی), ۱۶۲۰۴۴, (ی), ۱۶۲۳۲۱, (ی), ۱۶۲۶۰۰, (ی), ۱۶۲۸۸۱, (ی), ۱۶۳۱۶۴, (ی), ۱۶۳۴۴۱, (ی), ۱۶۳۷۲۴, (ی), ۱۶۴۰۰۱, (ی), ۱۶۴۲۸۴, (ی), ۱۶۴۵۶۱, (ی), ۱۶۴۸۴۴, (ی), ۱۶۵۱۲۱, (ی), ۱۶۵۴۰۰, (ی), ۱۶۵۶۸۱, (ی), ۱۶۵۹۶۴, (ی), ۱۶۶۲۴۱, (ی), ۱۶۶۵۲۴, (ی), ۱۶۶۸۰۱, (ی), ۱۶۷۰۸۴, (ی), ۱۶۷۳۶۱, (ی), ۱۶۷۶۴۴, (ی), ۱۶۷۹۲۱, (ی), ۱۶۸۲۰۰, (ی), ۱۶۸۴۸۱, (ی), ۱۶۸۷۶۴, (ی), ۱۶۹۰۴۱, (ی), ۱۶۹۳۲۴, (ی), ۱۶۹۶۰۱, (ی), ۱۶۹۸۸۴, (ی), ۱۷۰۱۶۱, (ی), ۱۷۰۴۴۴, (ی), ۱۷۰۷۲۱, (ی), ۱۷۱۰۰۰, (ی), ۱۷۱۲۸۱, (ی), ۱۷۱۵۶۴, (ی), ۱۷۱۸۴۱, (ی), ۱۷۲۱۲۴, (ی), ۱۷۲۴۰۱, (ی), ۱۷۲۶۸۴, (ی), ۱۷۲۹۶۱, (ی), ۱۷۳۲۴۴, (ی), ۱۷۳۵۲۱, (ی), ۱۷۳۸۰۰, (ی), ۱۷۴۰۸۱, (ی), ۱۷۴۳۶۴, (ی), ۱۷۴۶۴۱, (ی), ۱۷۴۹۲۴, (ی), ۱۷۵۲۰۱, (ی), ۱۷۵۴۸۴, (ی), ۱۷۵۷۶۱, (ی), ۱۷۶۰۴۴, (ی), ۱۷۶۳۲۱, (ی), ۱۷۶۶۰۰, (ی), ۱۷۶۸۸۱, (ی), ۱۷۷۱۶۴, (ی), ۱۷۷۴۴۱, (ی), ۱۷۷۷۲۴, (ی), ۱۷۸۰۰۱, (ی), ۱۷۸۲۸۴, (ی), ۱۷۸۵۶۱, (ی), ۱۷۸۸۴۴, (ی), ۱۷۹۱۲۱, (ی), ۱۷۹۴۰۰, (ی), ۱۷۹۶۸۱, (ی), ۱۷۹۹۶۴, (ی), ۱۸۰۲۴۱, (ی), ۱۸۰۵۲۴, (ی), ۱۸۰۸۰۱, (ی), ۱۸۱۰۸۴, (ی), ۱۸۱۳۶۱, (ی), ۱۸۱۶۴۴, (ی), ۱۸۱۹۲۱, (ی), ۱۸۲۲۰۰, (ی), ۱۸۲۴۸۱, (ی), ۱۸۲۷۶۴, (ی), ۱۸۳۰۴۱, (ی), ۱۸۳۳۲۴, (ی), ۱۸۳۶۰۱, (ی), ۱۸۳۸۸۴, (ی), ۱۸۴۱۶۱, (ی), ۱۸۴۴۴۴, (ی), ۱۸۴۷۲۱, (ی), ۱۸۵$

(358)

فرض کرو کہ اس سلسلہ کا باقی م رقموں کے بعد بام (ی) ہے تو

$$ف(ی) = (ی) + (ی) + (ی) + \dots + (ی) + (ی) + (ی) + (ی)$$

$$ف(ی + م) = (ی + م) + (ی + م) + (ی + م) + \dots + (ی + م) + (ی + م) + (ی + م) + (ی + م)$$

$$\text{اسلئے نہی} = \frac{ف(ی + م) - ف(ی)}{م} = \frac{(ی + م) - (ی)}{م} = \frac{م}{م} = ۱ \text{ نہی}$$

$$+ \frac{بام(ی + م) - بام(ی)}{م} = \frac{بام(ی + م) - بام(ی)}{م}$$

اب چونکہ دیا ہوا سلسلہ مستحق ہے بام (ی) بام (ی + م) لا انتہا چھوٹے ہو جاتے ہیں جبکہ م کو لا انتہا بڑھا دیا جاتا ہے، لیکن یہ نتیجہ نقصان ضروری نہیں کہ نہی = $\frac{بام(ی + م) - بام(ی)}{م}$ بھی لا انتہا چھوٹا ہوتا ہے۔

صرف اس وقت جبکہ یہ انتہا یعنی نہی = $\frac{بام(ی + م) - بام(ی)}{م}$ لا انتہا چھوٹی ہو مشق سلسلہ کو ف (ی) کے مشق تفاعل کے طور پر استعمال کیا جاسکتا ہے۔ مثلاً اگر بام (ی) کی شکل $\frac{۱}{م}$ جب م ی ہوتی تو ہم دیکھتے کہ

$$\text{نہی} = \frac{بام(ی + م) - بام(ی)}{م} = ۱ \text{ جم م ی}$$

جو صفر کی طرف مستحق نہیں ہوتا جبکہ م کو لا انتہا بڑھا دیا جاتا ہے، لیکن قیمتوں ± ۱ کے درمیان امتزاج کرتا ہے۔

۲۹۴ - جلد

$$\text{جم ی} = (۱ - \frac{۱}{۲\pi}) (\frac{۱}{۲\pi} - ۱) (\frac{۱}{۲\pi} - ۱) \dots$$

سے دفعہ ماسبق کے مائل طریقہ استعمال کر کے ہم لاستناہی سلسلہ

$$- \text{مس ی} = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}} - \text{ی}} + \frac{1}{\pi^{\frac{3}{4}} + \text{ی}} + \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}} - \text{ی}} + \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}} + \text{ی}} + \dots$$

$$+ \dots + \frac{1}{\pi(1-m^2)^{\frac{1}{4}} - \text{ی}} + \frac{1}{\pi(1-m^2)^{\frac{1}{4}} + \text{ی}} + \dots \quad (9)$$

$$\text{یا مس ی} = \text{ی}^8 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - 2\pi^2(1-m^2)^{\frac{1}{4}} - \text{ی}^2} \quad (10)$$

حاصل کرتے ہیں۔ سلسلہ (9) نیم مستحق ہے لیکن سلسلہ (10) مطلقاً مستحق

ہے ی کی سب قیمتوں کے لئے بحر $\pm \pi^{\frac{1}{4}} \pm \pi^{\frac{3}{4}} \pm \pi^{\frac{5}{4}} \dots$ کے۔

۲۹۵ — ضابطوں قم ی = مم $\frac{1}{4}$ ی - مم ی کیا قم ی = $\frac{1}{4}$ مم $\frac{1}{4}$ ی

+ $\frac{1}{4}$ مس $\frac{1}{4}$ ی کے ذریعہ قم ی کے لئے سلسلہ معلوم کیا جاسکتا ہے۔

پہلے ضابطہ کو لیکر اس میں مماس التماموں کی بجائے ان کے سلسلے درج

کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{قم ی} = \left[\frac{2}{\pi^{\frac{1}{2}} - \text{ی}} + \frac{2}{\pi^{\frac{1}{2}} + \text{ی}} + \frac{2}{\pi^{\frac{1}{2}} - \text{ی}} + \frac{2}{\pi^{\frac{1}{2}} + \text{ی}} + \frac{2}{\pi^{\frac{1}{2}} - \text{ی}} + \dots \right]$$

$$- \left[\frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}} - \text{ی}} + \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}} + \text{ی}} + \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}} - \text{ی}} + \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}} + \text{ی}} + \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}} - \text{ی}} + \dots \right]$$

پس قم ی

$$= \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}} - \text{ی}} - \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}} + \text{ی}} - \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}} - \text{ی}} + \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}} + \text{ی}} + \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}} - \text{ی}} - \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}} + \text{ی}} - \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}} - \text{ی}} + \dots$$

(11) \dots\dots\dots

$$(۱۲) \dots\dots\dots \text{یا} \quad \text{قم ی} = \frac{1}{ی} + \frac{۱}{۲} = \frac{۱(۱-۲) ی}{(۲ ی - ۲ ی^۲)}$$

ضابطہ (۱۱) میں ی کو ی + $\frac{۱}{۲}$ میں تبدیل کر دو تو

$$\text{قط ی} = \left(\frac{1}{ی + \frac{۱}{۲}} - \frac{1}{ی - \frac{۱}{۲}} \right) - \left(\frac{1}{ی + \frac{۱}{۲}} - \frac{1}{ی - \frac{۱}{۲}} \right)$$

$$(۱۳) \dots\dots\dots +$$

$$(۱۴) \dots\dots\dots \text{یا قط ی} = \frac{۱(۱-۲) ی}{۲ ی - ۲ ی^۲}$$

اس سلسلہ کی عام رقم جبکہ بڑا ہوقیمت $\frac{۱(۱-۲)}{۱-۲}$ کے قریب آتی ہے

اس لئے یہ سلسلہ صرف نیم مستحق ہے۔

ماس التامی اور ماسی سلسلے حسب ذیل طریقہ پر بھی حاصل کئے جاسکتے ہیں

جب (ی + ۱) اور جب ی کے لئے لاستناہی حاصل ضربوں کے جو جملے ہیں انکو استعمال کر دو تو غل تقسیم سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{جب (ی + ۱)} = \frac{۱(۱-۲) ی}{۲ ی - ۲ ی^۲} \quad \text{جب ی} = \frac{۱(۱-۲) ی}{۲ ی - ۲ ی^۲}$$

اب اگر ہم مان لیں کہ بائیں جانب کا حاصل ضرب عمل ضرب کی تکمیل سے ۱ کی قوتوں میں پھیلا یا جاسکتا ہے اور اگر ہم دائیں جانب کو شکل جم ۱ + جب ۱ میں رکھیں تو ۱ کی قوتوں میں پھیلانے اور مساوات کی طرفین میں ۱ کے سروں کو مساوی رکھنے سے معلوم ہوتا ہے کہ

$$(۸) \dots\dots\dots \text{م ی} = \frac{1}{ی} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} = \frac{۱(۱-۲) ی}{۲ ی - ۲ ی^۲}$$

ہم نے یہ جو مان لیا ہے کہ وہ لاستناہی حاصل ضرب جسکے یہ معمولی عمل ضرب حاصل شدہ لاستناہی سلسلے ہیں ۱ کی معودی قوتوں کے ایک سلسلہ ہیں

ترتیب دیا جاسکتا ہے اسکو واجبیت کے لئے ان شرطوں کی تحقیق کرنی ہوگی کہ ایسے غل سے صحیح نتیجہ پیدا ہو، لیکن اس کے لئے بعض عام سلسلوں کی ضرورت پڑے گی جنکو بیان کرنے کی یہاں گنجائش نہیں ہے۔
 ماسی سلسلہ بھی اسی طرح لا متناہی حاصل ضرب

$$\left(\frac{8 - 2 - 2 - 2}{2 - 2 - 2} \right) \left(\frac{8 - 2 - 2 - 2}{2 - 2 - 2} \right) = \frac{(4 + 4)}{2}$$

چھوٹا بنایا جاسکتا ہے جس قدر ہم چاہیں۔ اب اگر می کا مقیاس π سے کم ہو تو

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} + \dots + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} + \dots$$

پس اگر ہم یہ فرض کریں کہ می کا مقیاس π سے کم ہے تو کمروں $\frac{1}{\pi}$ میں سے ہر ایک کو اس طریقہ پر بھیل سکتے ہیں اور چونکہ ان میں سے ہر سلسلہ مطلقاً مستحق ہے ہم نتیجہ کو می کی قوتوں میں ترتیب دے سکتے ہیں اس طرح ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} \text{م م} &= \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} + \dots - \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} + \dots + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} + \dots \right) \\ &\dots - \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} - \dots \end{aligned}$$

فرض کرو کہ صہن سے مستحق سلسلہ

$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} + \dots + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} + \dots$$

کا مجموعہ تبصیر ہوتا ہے تب صہن = $\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} + \dots + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} + \dots$
+ صہن جہاں صہن ایک عدد ہے جو م کو کافی بڑا لینے سے
استقدر چھوٹا بنایا جاسکتا ہے جس قدر ہم چاہیں۔

$$\text{تب م م} = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} + \dots - \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} - \dots$$

$$+ \dots + \frac{1-2^n}{2^n} \frac{y^2}{\pi} + \dots + \frac{y^2}{2^n} \frac{y^2}{\pi} + \dots + \frac{y^2}{2^n} \frac{y^2}{\pi} + \dots$$

ہم دیکھتے ہیں کہ $\frac{y^2}{2^n} \frac{y^2}{\pi} < \frac{y^2}{2^{n+1}} \frac{y^2}{\pi} < \dots$ ۔ پس

$$\dots + \frac{y^2}{2^n} \frac{y^2}{\pi} + \frac{y^2}{2^{n+1}} \frac{y^2}{\pi} + \dots$$

$$\text{کا مقیاس } > \left(\frac{1}{2^n} \frac{y^2}{\pi} + \frac{1}{2^{n+1}} \frac{y^2}{\pi} + \dots \right)$$

خطوط و حدانی کے اندر کا سلسلہ مستحق ہے کیونکہ $\frac{y^2}{2^n} \frac{y^2}{\pi} > \frac{y^2}{2^{n+1}} \frac{y^2}{\pi}$ اسلئے م کو کافی بڑا لینے سے $\frac{1-2^n}{2^n} \frac{y^2}{\pi} > \frac{y^2}{2^{n+1}} \frac{y^2}{\pi}$ کہتا ہے اس کو اتنا چھوڑنا (861) بنایا جاسکتا ہے جتنا ہم چاہیں۔ پس م ی کے لئے یہ لاستنا ہی سلسلہ ملتا ہے

$$\text{م م ی} = \frac{1}{y} - \frac{y^2}{2^n} \frac{y^2}{\pi} - \frac{y^2}{2^{n+1}} \frac{y^2}{\pi} - \dots - \frac{y^2}{2^{n+1}} \frac{y^2}{\pi} \dots (15)$$

جو ی کی سب قیمتوں کے لئے درست ہے ایسی کہ $\frac{y^2}{2^n} \frac{y^2}{\pi} > \frac{y^2}{2^{n+1}} \frac{y^2}{\pi}$ اور بالخصوص $\frac{y^2}{2^n} \frac{y^2}{\pi} \pm \frac{y^2}{2^{n+1}} \frac{y^2}{\pi}$ کے درمیان ی کی تمام حقیقی قیمتوں کے لئے سلسلہ

$$\text{مس ی} = \frac{1}{y} - \frac{y^2}{2^n} \frac{y^2}{\pi} - \frac{y^2}{2^{n+1}} \frac{y^2}{\pi} - \dots - \frac{y^2}{2^{n+1}} \frac{y^2}{\pi} + \dots$$

سے اسی طریقہ پر مس ی کے لئے سلسلہ ی کی صعودی قوتوں میں حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اس سلسلہ کو تھانہ مس ی = م ی - م ی کے ذریعہ بھی (15) سے اخذ کر سکتے ہیں۔ اس طرح ہمیں معلوم ہوتا ہے

$$\text{مس ی} = \frac{1}{y} - \frac{y^2}{2^n} \frac{y^2}{\pi} - \frac{y^2}{2^{n+1}} \frac{y^2}{\pi} - \dots - \frac{y^2}{2^{n+1}} \frac{y^2}{\pi} + \dots (16)$$

جو درست ہے اگر ی کا مقیاس $\frac{1}{\pi}$ سے کم ہو، اور بالخصوص $\pm \frac{1}{\pi}$ کے درمیان ی کی تمام حقیقی قیمتوں کے لئے۔

ضابطہ قم ی = مم $\frac{1}{\pi}$ ی - مم ی میں مم $\frac{1}{\pi}$ ی، مم ی کی بجائے انکی قیمتیں (۱۵) سے لیکر درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{قم ی} = \frac{1}{\pi} (1-2) + \frac{1}{\pi} \times \frac{1-2}{2} + \frac{1}{\pi} \times \frac{1-2}{4} + \frac{1}{\pi} \times \frac{1-2}{8} + \dots + (14)$$

جو درست رہتا ہے اگر مم ی $> \pi$ ۔
۲۹۷ - ی کی قوتوں میں قط ی کے لئے سلسلہ حاصل کرنیکے لئے ضابطہ

$$\text{قط ی} = \pi^2 \left(\frac{1}{\pi^2 - 2} - \frac{3}{\pi^2 - 4} + \frac{5}{\pi^2 - 6} - \dots \right)$$

$$+ \left(\frac{(1-2)^2}{\pi^2 - 4} + \frac{(1-2)^4}{\pi^2 - 8} + \dots \right) + \text{بم}$$

استعمال کیا جاتا ہے جبکہ یہ فرض کر لیا گیا ہو کہ ی کا مقیاس $\frac{1}{\pi}$ سے کم ہے۔ ہر کسر کو پھیلا نے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{قط ی} = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right\} + \left\{ \frac{(1-2)^2}{1-\pi^2} + \frac{(1-2)^4}{1-\pi^4} + \dots \right\} + \frac{1}{\pi^2}$$

$$+ \left\{ \frac{1}{1+\pi^2} - \frac{1}{1+\pi^4} + \dots \right\} + \frac{1}{\pi^2} \left\{ \frac{1}{1+\pi^2} + \frac{1}{1+\pi^4} + \dots \right\} + \dots +$$

$$\dots + \left\{ \frac{(1-2)^2}{1+\pi^2} + \frac{(1-2)^4}{1+\pi^4} + \dots \right\} + \text{بم}$$

(382)

اب فرض کرو کہ ص سے لامتناہی سلسلہ

$$\dots\dots\dots \frac{1}{1+52} + \frac{1}{1+52} - \frac{1}{1+52}$$

کا مجموعہ تعبیر ہوتا ہے، اور فرض کرو پہلی م رقموں کے بعد رکائیاتی ص ہے، تب

$$\text{قطی} = \frac{1}{11} \text{ ص} + \frac{1}{11} \text{ ص} + \dots + \frac{1}{11} \text{ ص} + \dots + \frac{1}{11} \text{ ص}$$

$$+ \text{بگم} + \frac{1}{11} \text{ ص} + \frac{1}{11} \text{ ص} + \dots + \dots + \dots$$

فرض کرو کہ عددوں ص، ص، ص، ... میں سے بڑے سے بڑا عدد ص

ہے تو $\frac{1}{11} \text{ ص} + \frac{1}{11} \text{ ص} + \dots + \dots$ کا مقیاس، سلسلہ

$$\frac{1}{11} + \frac{1}{11} + \frac{1}{11} + \dots + \dots + \dots$$

کے مجموعے کے صہ گنا سے کم ہے، یہ آخری سلسلہ مستند ہے

کیونکہ ص کا مقیاس بموجب فرض $\frac{1}{11}$ سے کم ہے۔

پس یہ ثابت ہو چکا کہ اس سلسلہ کا باقی جو ہم نے قطی

کے لئے حاصل کیا ہے ایک عدد ہے جس کا مقیاس لامتناہی گھٹتا ہے

جیسے م بڑھتا ہے اس لئے قطی کے لئے لامتناہی سلسلہ

متناہی

$$\text{قطی} = \frac{1}{11} \text{ ص} + \frac{1}{11} \text{ ص} + \frac{1}{11} \text{ ص} + \dots + \dots + \dots (18)$$

جو درست ہے اگر $\frac{1}{p} > \frac{1}{q}$ —

۲۹۸ — جبر و مقابلہ کا یہ ایک مشہور مسئلہ ہے کہ تفاعل $\frac{1}{p}$ کو

جہاں $\frac{1}{q}$ اپنی مدد قیمت رکھتا ہے شکل

$$1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^3} + \dots + \frac{1}{p^{n-1}} - \frac{1}{p^n} + \dots$$

کے ایک سلسلہ میں پھیلا یا جاسکتا ہے جہاں $\frac{1}{p}$ ، $\frac{1}{p^2}$ ، $\frac{1}{p^3}$ ، ... کے عدد کہتے ہیں (Bernoulli)

اور نیز یہ کہ یہ پھیلاؤ $\frac{1}{p}$ کی ان تمام قیمتوں کے لئے درست ہے جبکہ $\frac{1}{p}$ سلسلہ مستند ہوتا ہے۔

اگر ہم اس کو $\frac{1}{p}$ سے ضرب دیں تو

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} - \frac{1}{p^4} + \dots + \frac{1}{p^{n-1}} - \frac{1}{p^n} + \dots$$

$$= \left\{ \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} - \frac{1}{p^4} + \dots + \frac{1}{p^{n-1}} - \frac{1}{p^n} + \dots \right\}$$

جہاں $\frac{1}{p}$ کو اتنا چھوٹا لیا گیا ہے کہ بائیں جانب کے دونوں سلسلے

مطلقاً مستند ہیں۔ ان سلسلوں کو باہم ضرب دیکر حاصل ضرب کو $\frac{1}{p}$ کی قوتوں کے ایک سلسلہ میں ترتیب دے سکتے ہیں۔ یہ محصلہ سلسلہ مطلقاً مستند ہوگا اسلئے $\frac{1}{p}$ کی پہلی قوت سے اعلیٰ تر قوتوں کے

سروں کو صفر کے مساوی رکھنے سے مساواتوں کا ایک سلسلہ ملتا ہے

نیز قمی = مم $\frac{1}{4}$ ی - مم ی، اسلئے

$$\dots + \frac{1}{5} = \text{مجموع} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

$$(20) \dots + \frac{(1-2^2)^2}{22} +$$

نیز چونکہ $س ی = م ی - ۲ م ی$ ، اسلئے

$$س ی = \frac{(1 - \frac{1}{2})^2}{2} + \frac{(1 - \frac{1}{2})^2}{2} + \dots$$

$$+ \frac{(1-x^2)^{n-1} (1-x^{2n})}{2n} + \dots + (2n-1) \dots + 1 - x^{2n}$$

یہ ثابت کیا جا چکا ہے کہ سلسلے (۱۹) اور (۲۰) مستحق ہیں

اگر $\pi > \pi$ اور سلسلہ (۲۱) مستحق ہے اگر $\pi > \pi$ ۔

سلسلے (۱۹)، (۲۰)، (۲۱) علی الترتیب سلسلوں (۱۵)، (۱۶)، (۱۷)

کے مماثل ہونے چاہئیں، پس (۱۹) کے سروں کو (۱۵) کے سروں کے مساوی رکھنے سے

$$\frac{2}{\pi} \text{ م} = \frac{2}{\pi} \text{ ب} \quad \frac{2}{\pi} \text{ م} = \frac{2}{\pi} \text{ ب} \quad \dots \quad \frac{2}{\pi} \text{ م} = \frac{2}{\pi} \text{ ب}$$

$$= \frac{2}{2n} \text{ بن }'$$

اس لئے دفعہ ۲۹۸ میں دی ہوئی 'ب' ب' کی قیمتوں کو استعمال کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\dots \frac{\pi}{9\pi\phi} = \infty \quad \frac{\pi}{9\pi\phi} = \infty \quad \frac{\pi}{9\pi\phi} = \infty \quad \frac{\pi}{9\pi\phi} = \infty$$

$$\text{مسن} = \frac{2 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{22} \text{ جین}$$

اس طرح مسن ان ذابطوں کی مدد سے محسوب کیا جاسکتا ہے جن سے جین ملتا ہے۔ کسی زاوے کے ہاں یا اس انعام کو محسوب کرنے میں راست استعمال کئے جاسکتے ہیں، ان سلسلوں کی پہلی چند قیمتیں ہیں

$$\text{م} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{45} - \frac{1}{945} - \dots$$

$$\text{مس} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{105} + \frac{1}{315} + \dots$$

مس $(\frac{1}{90} \times \text{م})$ م $(\frac{1}{90} \times \text{مس})$ کو محسوب کر نیا عمل حسب طریقہ ذیل

انجام پا سکتا ہے :-

$$\text{مس} (\text{م} \setminus \text{ن} \times 90) =$$

$$54344194423445 \times (\text{م}^2 - \text{ن}^2)$$

$$+ 52945544820594 \times \text{م} \setminus \text{ن}$$

$$+ 50184889502443 \times \text{م}^3 \setminus \text{ن}^2$$

$$+ 50018424452032 \times \text{م}^5 \setminus \text{ن}^4$$

$$+ 50001945800412 \times \text{م}^7 \setminus \text{ن}^6$$

$$+ 50000219444225 \times \text{م}^9 \setminus \text{ن}^8$$

$$+ 50000022011340 \times \text{م}^{11} \setminus \text{ن}^{10}$$

$$+ 50000002662132 \times \text{م}^{13} \setminus \text{ن}^{12}$$

$$+ 50000000295862 \times \text{م}^{15} \setminus \text{ن}^{14}$$

$$+ 50000000032844 \times \text{م}^{17} \setminus \text{ن}^{16}$$

$$5 \dots \dots \dots 3451 \times 19 \mid 19 +$$

$$s \dots \dots \dots r \cdot 5x \frac{r}{u} \setminus \frac{r}{m} +$$

$$s \dots \dots \dots 25 \times 10^3 \sqrt{2} +$$

$$S = \dots \dots \dots x^{\frac{r_0}{\alpha}} / y^{\frac{r_0}{\beta}} +$$

$$= \text{مم} (\text{م} \setminus \text{ن} \times \text{ق}) =$$

5444419<<234<011 x / 0

53183.98841834x(7-6M) up r-

52-52^4449M1P5XU\p-

5-04551-624882X50\3-

3 - - 435.292552x0\9-

5-...2.241-4.x⁶\j-

5. . . . 123456789 \ 9 -

5.....<77909x"0\" -

$$s \dots p < 0.9 < x \overset{13}{\cup} \setminus \overset{13}{\cap} -$$

..... 2949x¹⁰ / 10 -

..... 100x 10¹⁰ / 10¹⁰ -

$$s \dots \dots \dots 11 \times \frac{19}{2} \sqrt{\frac{19}{2}} -$$

ان جملوں میں رقموں $\frac{1}{2} \frac{y^2}{y^2 - \pi^2} - \frac{1}{4} \frac{y^2}{y^2 - \pi^2}$ کو جو ضابطوں (۱۰)

اور (۸) میں واقع ہوتی ہیں الگ الگ اول محسوب کر لیا جاتا ہے، تب ان رقموں کے بعد یہ سلسلے زیادہ سرعت کے ساتھ مستحق ہوتے ہیں۔

یہ سلسلے یوکر کی Analysis of the Infinite سے لئے گئے ہیں جس میں انکوائش نے اعشاریہ کے بیس مقامات تک معلوم کیا ہے۔

لوکارمی جیب اور جیب التمام کیلئے جملے

(365)

۳۰۰۔ دقتہ ۲۸۵ میں ہم یہ دکھا چکے ہیں کہ

$$\text{جب } y = 1 \quad \left(1 - \frac{y^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{4\pi^2}\right) \dots \left(1 - \frac{y^2}{m^2\pi^2}\right) \dots (1 - \text{طم})$$

$$\text{جم } y = 1 \quad \left(1 - \frac{y^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{4\pi^2}\right) \dots \left(1 - \frac{y^2}{m^2\pi^2}\right) \dots (1 - \text{طم})$$

جہاں طم، طم ایسے عدد ہیں جنکے مقیاس م کو کافی بڑا لینے سے اتنے چھوٹے بنائے جاسکتے ہیں جتنا ہم چاہیں۔ اب لوکار تمہ لینے سے

$$\text{لوک جب } y = 1 \quad \text{لوک } y + \text{لوک } \left(1 - \frac{y^2}{\pi^2}\right) + \text{لوک } \left(1 - \frac{y^2}{4\pi^2}\right) + \dots$$

$$+ \text{لوک } \left(1 - \frac{y^2}{m^2\pi^2}\right) + \text{لوک } (1 - \text{طم})$$

$$\text{لوک جم } y = 1 \quad \text{لوک } \left(1 - \frac{y^2}{\pi^2}\right) + \text{لوک } \left(1 - \frac{y^2}{4\pi^2}\right) + \dots$$

$$+ \text{لوک } \left(1 - \frac{y^2}{m^2\pi^2}\right) + \text{لوک } (1 - \text{طم})$$

پہلی صورت میں مان لوکہ ای | $\pi > \pi$ اور دوسری صورت میں $\pi > \pi$ تاکہ یہ لوکارم ی کی قوتوں میں مطلقاً مستحق سلسلوں میں پھیلائے جاسکیں تب ان لوکارمٹوں کو پھیلانے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{لوک جب ی} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{1} = 1$$

لوک (۱- طہ م)

$$\text{لوک جم ی} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{1} = 1$$

لوک (۱- طہ م)

اب

$$\dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} = \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} \right) \frac{1}{n^2} + \left(\dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} \right) =$$

اس لئے

$$\frac{1 - \frac{1}{n^2}}{n^2} = \dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}$$

اس لئے ہمیں حاصل ہوتا ہے

(366)

$$\text{لوک جب ی} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{لوک جم ی} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{1} = 1$$

جہاں سلسلوں

$$\dots + \frac{1}{\omega_{23}} + \frac{1}{\omega_{21}} + \dots + \frac{1}{\omega_{22}} + \frac{1}{\omega_{21}}$$

کی م رقموں کے بعد کے باقی صفر، صفر ہیں۔

$$\frac{1}{\omega_{21}} \approx \frac{1}{\omega_{21}} \text{ کا مقیاس } \frac{1}{\omega_{21}} \text{ سے کم ہے اور}$$

$$\frac{1}{\omega_{21}} \approx \frac{1}{\omega_{21}} \text{ کا مقیاس } \frac{1}{\omega_{21}} \text{ سے کم ہے جہاں}$$

صفر، صفر علی الترتیب صفر، صفر کی بڑی سے بڑی قیمتیں ہیں۔ پس

$$\text{لوک جب ی} = \frac{1}{\omega_{21}} \approx \frac{1}{\omega_{21}}$$

$$\text{لوک جم ی} = \frac{1}{\omega_{21}} \approx \frac{1}{\omega_{21}}$$

$$\text{اب چونکہ } \frac{1}{\omega_{21}} = \frac{1}{\omega_{21}} \text{ بن اسلئے لوک جب ی}$$

لوک جم ی کے لئے حسب ذیل لامتناہی سلسلے حاصل ہوتے ہیں

$$\text{لوک جب ی} = \frac{1}{\omega_{21}} - \frac{1}{\omega_{21}} + \frac{1}{\omega_{21}} - \frac{1}{\omega_{21}} + \dots$$

$$\dots - \frac{1}{\omega_{21}} + \frac{1}{\omega_{21}} - \frac{1}{\omega_{21}} + \dots (۳۳)$$

جہاں $\pi > \gamma$

$$\text{لوک جم ی} = \frac{2}{1} \frac{\text{ب ی}}{(1-2)^2} - \frac{2}{2} \frac{\text{ب ی}}{(1-2)^3} \dots$$

$$\dots - \frac{2}{n} \frac{\text{ب ی}}{(1-2)^{n+1}} \dots (23)$$

جہاں $\pi > \frac{1}{2}$

سلسلوں (۲۲) (۲۳) کی پہلی چند رقمیں ہیں

$$\text{لوک جب ی} = \frac{1}{6} - \frac{1}{180} - \frac{1}{2835} \dots$$

$$\text{لوک جم ی} = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} - \frac{1}{45} \dots$$

اسلے نینز

$$\text{لوک مس ی} = \text{لوک ی} + \frac{1}{3} + \frac{1}{30} + \frac{1}{2835} \dots$$

سلسلوں (۲۲) (۲۳) کو لوکارتمی جیوب اور جیوب التمام کی جدولیں تیار کرنے میں استعمال کیا جاسکتا ہے، سب سے بہتر یہ ہے کہ لوکارتمی

(367)

لوک $(1 - \frac{1}{2})$ ، لوک $(1 - \frac{1}{3})$ کے پہلے لوکارتم الگ الگ محسوب کر لئے جائیں کیونکہ اس طرح یہ سلسلے (۲۲) (۲۳) کی بہ نسبت تیز تر مستند شکل میں حاصل ہوتے ہیں۔

$$\text{لوک جب} \frac{\pi}{2} = \text{لوک} \pi + \text{لوک} \frac{\pi}{2} + \text{لوک} (1 - \frac{\pi}{2})$$

$$= \left\{ \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} \right\} \frac{\pi}{2}$$

ل جم (م \ ن \ ۹۰ x) =
لوک (ن - م) + لوک (ن + م) - ۲ لوک ن

۱ - ۵ - +

۱ - م \ ن \ ۱۰۱۴۹۲۸۵۹۳۴۱۸۹۲ x

۱ - م \ ن \ ۱۰۰۳۱۸۷۲۹۲ - ۶۵۲۵۱ x

۱ - م \ ن \ ۱۰۰۰۲۰۹۲۸۵۸ ۱ x

۱ - م \ ن \ ۱۰۰۰۰۱۶۸۲۸۳۴۸۵۹۷ x

۱ - م \ ن \ ۱۰۰۰۰۰۱۴۸۰۱۹۳۹۸۶ x

۱ - م \ ن \ ۱۰۰۰۰۰۰۱۳۶۵۰۲۲۷۲ x

۱ - م \ ن \ ۱۰۰۰۰۰۰۰۱۲۹۸۱۷۱۵ x

۱ - م \ ن \ ۱۰۰۰۰۰۰۰۰۱۲۶۱۴۷۱ x

۱ - م \ ن \ ۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱۲۴۵۶۷ x

۱ - م \ ن \ ۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱۲۴۵۶۷ x

۱ - م \ ن \ ۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱۲۵۸ x

۱ - م \ ن \ ۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱۲۸ x

۱ - م \ ن \ ۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱۳ x

ان سلسلوں کو یوں لے کر اعداد کے میں مقامات تک حاصل کیا تھا۔

مثالیں

$$۳۰۱ - (۱) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

کی قیمتیں معلوم کرو۔

$$\text{چونکہ } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$-\frac{1}{n^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} =$$

$$\text{اور نیز } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots \right)$$

$$-\dots - \left(\frac{1}{4} \right) \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{4} \right) =$$

(368) اسلئے لوک $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ کے ان دو جملوں میں $\frac{1}{4}$ کے سروں کو مساوی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\text{پھر چونکہ } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 - \left\{ \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots \right\}$$

$$-\dots - \frac{1}{n^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} =$$

$$\text{اور نیز } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots \right)$$

$$-\dots - \left(\frac{1}{4} \right) \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{4} \right) =$$

اس لئے لا^۲ اور لا^۳ کے سروں کو مساوی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$${}^2\pi \frac{1}{96} = {}^2(1-n^2) \leq {}^2\pi \frac{1}{8} = {}^2(1-n^2) \leq$$

(۲) لا متناہی سلسلہ $\frac{1}{2+2\lambda} + \frac{1}{2+2\lambda} + \frac{1}{2+2\lambda} + \dots$ کو جمع کرو۔

مسئلہ (۱۰) میں رکھو $y = x \lambda \pi$ ، اس طرح اس سلسلہ کا مجموعہ حاصل ہوگا

$$\frac{\pi}{2\lambda} \text{ منہر } \frac{1}{\pi} \lambda$$

یہ مجموعہ 'جزر π لا کے اجزائے ضربی والے جملہ سے لوکار تم لینے اور تفرق کرنے سے بھی راست حاصل کیا جاسکتا تھا۔

(۳) ثابت کرو کہ ان تمام عددوں کے مرکافیوں کے مربعوں کا مجموعہ $\frac{15}{\pi}$ ہے

جو کسی مفرد عدد کے مربع سے تقسیم پذیر نہیں ہیں۔

فرض کرو کہ مفرد عددوں $1^2, 3^2, 5^2, \dots$ کو e^2, b^2, d^2, \dots سے تعبیر کیا گیا ہے، تب مطلوبہ مجموعہ اس لا متناہی حاصل ضرب

$$\dots \left(1 + \frac{1}{e^2}\right) \left(1 + \frac{1}{b^2}\right) \left(1 + \frac{1}{d^2}\right) \dots$$

کے مساوی ہے۔ یہ حاصل ضرب

$$\frac{\dots \left(1 - \frac{1}{e^2}\right) \left(1 - \frac{1}{b^2}\right) \left(1 - \frac{1}{d^2}\right) \dots}{\dots \left(1 - \frac{1}{e^2}\right) \left(1 - \frac{1}{b^2}\right) \left(1 - \frac{1}{d^2}\right) \dots} =$$

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^4} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{b^4} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{d^2} + \frac{1}{d^4} + \dots\right)}{\left(1 - \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^4} - \dots\right) \left(1 - \frac{1}{b^2} + \frac{1}{b^4} - \dots\right) \left(1 - \frac{1}{d^2} + \frac{1}{d^4} - \dots\right)} =$$

$$\frac{\dots + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} + 1}{\dots + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} + 1} =$$

$$\frac{15}{2\pi} = \frac{2\pi \frac{1}{4}}{2\pi \frac{1}{9}} =$$

(۲) ایک لا متناہی خط مستقیم کو نقطوں کی ایک لا متناہی تعداد متعدد حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے جنہیں سے ہر ایک کا طول ۱ ہے۔ اگر ایک نقطہ لیا جائے ایسا کہ اس کا فاصلہ خط مستقیم سے ما ہو اور کسی ایک نقطہ تقسیم سے اس کے فاصلہ کا ظل خط مستقیم پر لا ہو تو ثابت کر دو کہ تمام نقاط تقسیم سے اس نقطہ کے فاصلوں کے منکافیوں کے مربعوں کا مجموعہ ہے

$$\frac{6\pi^2}{1} \text{ جینر}$$

$$\frac{\pi}{1} - \frac{6\pi^2}{1} \text{ جینر} - \frac{6\pi^2}{1} \text{ جینر}$$

(369) جس سلسلہ کو جمع کرنا ہے وہ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + (n+1)^2}$ ہے جو

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2 + (n+1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2 + (n+2)^2} \right)$$

کے حاصل ہے۔ اس لئے اس سلسلہ کا مجموعہ ہے

$$\left\{ \frac{\pi}{(n+1)^2} - \frac{\pi}{n^2} \right\} = \frac{\pi}{n^2} - \frac{\pi}{(n+1)^2}$$

$$\frac{6\pi^2}{1} \text{ جب}$$

$$\frac{\pi}{(n+1)^2} - \frac{\pi}{n^2} = \frac{\pi}{n^2} - \frac{\pi}{(n+1)^2}$$

اور یہ معلو بہ نتیجہ میں تحویل ہو جاتا ہے۔

سترہویں باب پر مثالیں

۱۔ ثابت کرو کہ

$$\text{جم } \left(\frac{1}{\pi} \text{ جب } \pi \right) = \frac{1}{\pi} \text{ جم } \pi \text{ ط } \left(\frac{1}{\pi} \text{ جب } \pi \right) + 1 \left(\frac{1}{\pi} \text{ جب } \pi \right) + \dots$$

۲۔ ثابت کرو کہ

$$+ \text{ جب } \pi = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{\pi} \text{ جب } \pi \right) + 1 \left(\frac{1}{\pi} \text{ جب } \pi \right) + \dots$$

۳۔ ثابت کرو کہ

$$\pi = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(n+m+1)}$$

جہاں م، ن تمام صحیح عددی قیمتیں اختیار کرتے ہیں اور لا صحیح عدد نہیں ہے۔

۴۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{1 + \frac{1}{\pi}}{1 - \frac{1}{\pi}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{\pi}\right) \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{\pi}\right) \left(\frac{1}{25} + \frac{1}{\pi}\right) \dots}{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi}\right) \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{\pi}\right) \left(\frac{1}{36} + \frac{1}{\pi}\right) \dots}$$

۵۔ ثابت کرو کہ

$$\begin{aligned} & \dots + \frac{\pi^2}{\pi^2 + \pi^3} + \frac{\pi^2}{\pi^2 + \pi^2} + \frac{\pi^2}{\pi^2 + 1} + 1 \\ & \dots \left(\frac{\pi^2}{\pi^2 + 1} + 1 \right) \left(\frac{\pi^2}{\pi^2 + 1} + 1 \right) \left(\frac{\pi^2}{\pi^2 + 1} + 1 \right) \dots \\ & \dots \left(\frac{\pi^2}{\pi^2 + 1} + 1 \right) \left(\frac{\pi^2}{\pi^2 + 1} + 1 \right) (\pi^2 + 1) \dots \end{aligned}$$

۶ - ثابت کرو کہ

$$\left(\frac{2}{12} - 1\right) \frac{2}{49} = \dots + \frac{1}{49} + \frac{6}{42} + \frac{3}{45} + \frac{1}{43}$$

اگر

$$\left\{ \left(\frac{2}{12} \times \frac{2}{1-42} \right) - 1 \right\} \frac{2}{49} = (لا) \quad \left\{ \left(\frac{2}{12} \right) - 1 \right\} \frac{2}{49} = (لا)$$

تو لہ (لا) + $\frac{1}{4}$ کو مہ (لا) کی رقوم میں اور مہ (لا) + $\frac{1}{4}$ کو لہ (لا) کی رقوم میں
بیان کرو اور پھر $\frac{(1-2) \dots 5 \times 3 \times 1}{2}$ کی انتہا معلوم کرو
جبکہ م لاستناہی ہو۔

۸ - اگر ضرب سے وہ حاصل ضرب تعبیر ہوں جو $\frac{1}{4} \frac{1}{4} \frac{1}{4} \dots$

(370)

میں سے $\frac{1}{4}$ رقوموں کو لیکر ضرب دینے سے بنتے ہیں تو ثابت کرو کہ

$$\dots + \frac{2-42}{49} \frac{2}{49} + \frac{2-42}{49} \frac{2}{49} + \frac{2-42}{49} \frac{2}{49} = \frac{2}{49}$$

$$\dots + \frac{2}{49} \frac{2}{49} + \dots$$

۹ - ثابت کرو کہ

$$\frac{2}{12} = \dots - \frac{5 \times 3 \times 1}{4 \times 2 \times 2} - \frac{3 \times 1}{2 \times 2} - \frac{1}{2} - 1$$

۱۰ - جمع کرو سلسلہ

$$\dots + \frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{5 \times 3} + \frac{1}{3 \times 1}$$

۱۱۔ ثابت کرو کہ مثبت صحیح عددوں کے ہر جوڑے کے متکافینوں کی

چوتھی قوتوں کے حاصل ضربوں کا مجموعہ $\frac{\pi^2}{9} \frac{3^8}{5}$ ہے۔

۱۲۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{\pi^2}{8} = \left(\dots + \frac{1}{25+2} + \frac{1}{3+2} + \frac{1}{1+2} \right) \left(\dots + \frac{2}{23+1} + \frac{2}{12+1} + \frac{2}{1+1} + 1 \right)$$

۱۳۔ ثابت کرو کہ

$$\dots + \left(\frac{1}{5 \times 4 \times 3} \right) + \left(\frac{1}{4 \times 3 \times 2} \right) + \left(\frac{1}{3 \times 2 \times 1} \right)$$

کا مجموعہ $\frac{39}{16} - \frac{\pi^2}{16}$ ہے۔

۱۴۔ ثابت کرو کہ

$$(1-m) = \frac{(1-m^2) \dots (1-m^2) (1-m^2)}{\{ (1-m) - m^2 \} \dots \{ (1-m) - m^2 \} \{ (1-m) - m^2 \} \dots} \quad \text{نیا}$$

۱۵۔ ثابت کرو کہ

$$\dots - \frac{5}{24+25} + \frac{3}{24+23} - \frac{1}{24+21}$$

کا مجموعہ $\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{4}$ ہے۔

۱۶۔ ثابت کرو کہ

$$\text{سن } 1 - \text{سن } \frac{1}{4} + \text{سن } \frac{1}{9} - \dots = \text{سن } \frac{1}{16}$$

۱۷۔ ثابت کرو کہ

$$\dots + \frac{1}{24} + \dots + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2} = \pi$$

لوک ۱۲ - لوک ۲ = π

= (جنزیرہ ۲۱ + جم ۲۱ - ۲۱ جم ۲۱ + جنزیرہ ۲۱ + جم ۲۱ - ۲۱ جم ۲۱ + جنزیرہ ۲۱) =
جہاں ن، تمام صحیح عددی قیمتیں مثبت اور منفی اختیار کرتا ہے بجز صفر کے۔
۲۲ - ثابت کرو کہ

$$\dots + \frac{1}{12 \times 11 \times 10 \times 9} + \frac{1}{8 \times 7 \times 6 \times 5} + \frac{1}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$= \frac{1}{3} - 2 \frac{1}{23} \pi$$

$$\dots + \frac{1}{23 \times 21 \times 19 \times 17} + \frac{1}{15 \times 13 \times 11 \times 9} + \frac{1}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$= \frac{\pi}{(21+2)94}$$

۲۳ - اگر $(\frac{x}{a} + 1) = (\frac{x}{b} + 1) = (\frac{x}{c} + 1) = \dots = (\frac{x}{j} + 1)$ خراب

تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \dots + \frac{1}{j} = \frac{1}{x}$$

اور اسلئے ثابت کرو کہ

$$\dots + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \dots + \frac{1}{j^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right)}{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)}$$

۲۴ - ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{2} - \frac{\text{جیب } \pi \text{ لا} + \text{جیب } \pi \text{ لا}}{\text{جیب } \pi \text{ لا} - \text{جیب } \pi \text{ لا}} \times \frac{\pi}{\pi} = \frac{1}{\pi + \pi} = \frac{1}{2\pi}$$

۲۵ - ثابت کرد

$$\frac{1}{\pi + \pi} = \frac{1}{2\pi}$$

۲۶ - ثابت کرد

$$\frac{\text{ب} + \text{لا} + \text{ج} - \text{لا}}{\text{ب} + \text{لا} + \text{ج} - \text{لا}}$$

$$\left\{ \frac{\pi^2 (ب-ج) + \pi^2 (ج-ب) + \pi^2 (ج-ب)}{\pi^2 (ج-ب) + \pi^2 (ج-ب) + \pi^2 (ج-ب)} + 1 \right\} \left\{ \frac{\pi^2 (ب-ج) + \pi^2 (ج-ب) + \pi^2 (ج-ب)}{\pi^2 (ج-ب) + \pi^2 (ج-ب) + \pi^2 (ج-ب)} + 1 \right\} =$$

$$\left\{ \frac{\pi^2 (ب-ج) + \pi^2 (ج-ب) + \pi^2 (ج-ب)}{\pi^2 (ج-ب) + \pi^2 (ج-ب) + \pi^2 (ج-ب)} + 1 \right\} \left(\frac{\pi^2}{ب-ج} + 1 \right) = \frac{\pi^2 - \text{ج} - \text{لا}}{\text{ب} - \text{ج}}$$

اور

$$\left\{ \frac{\pi^2 (ب-ج) + \pi^2 (ج-ب) + \pi^2 (ج-ب)}{\pi^2 (ج-ب) + \pi^2 (ج-ب) + \pi^2 (ج-ب)} + 1 \right\} \dots \dots \dots (\text{یوکر})$$

۲۷ - اگر

(372)

$$\frac{1}{\pi + \pi} - \frac{1}{\pi + \pi} + \frac{1}{\pi + \pi} - \frac{1}{\pi + \pi} + \frac{1}{\pi + \pi} - \frac{1}{\pi + \pi} = \text{ف}$$

$$\frac{1}{\pi + \pi} + \frac{1}{\pi + \pi} + \frac{1}{\pi + \pi} + \frac{1}{\pi + \pi} + \frac{1}{\pi + \pi} = \text{ق}$$

$$\frac{1}{\pi + \pi} + \frac{1}{\pi + \pi} + \frac{1}{\pi + \pi} - \frac{1}{\pi + \pi} = \text{ص}$$

$$\dots + \frac{1}{(m+n)^2} + \frac{1}{(m-n)^2} + \frac{1}{(m+n)^2} + \frac{1}{(m-n)^2} = \text{مس}$$

نو ثابت کرو کہ

$$\frac{\pi^2 (k^2 + 6k + 6)}{2 \times 4 \times 6 \times 8} = \text{س} \quad \frac{\pi^2 (2 + k^2)}{2 \times 4 \times 6 \times 8} = \text{ق} \quad \frac{\pi^2 k}{2} = \text{ن}$$

$$\frac{\pi^2 (8 + 3k^2 + 2k^2)}{2 \times 4 \times 6 \times 8} = \text{س}$$

جہاں $k = \text{مس} \frac{\pi}{2}$ (یولر)

۲۸ - ثابت کرو کہ سلسلہ

$$\dots + \frac{1}{3^{11}} - \frac{1}{3^6} + \frac{1}{3^5} - 1$$

کا مجموعہ جیسے وہ سب طاق عدد جو ۳ سے تقسیم پذیر نہیں ہیں لے گئے ہیں $\pi^2 \sqrt{18}$ ہے۔ (یولر)

۲۹ - ثابت کرو کہ ان سب عددوں کے متکافینوں کے مربعوں کا مجموعہ

$$\frac{\pi^2}{24} \text{ ہے جو } 3 \text{ سے تقسیم پذیر نہیں ہیں۔}$$

۳۰ - ثابت کرو کہ

$$\left(\frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}} \right) \left(\frac{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}} \right) \left(\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{\text{جنرنا} + \text{جنرنگ}}{\text{جنرنگ}}$$

$$\dots \left(\frac{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}} - 1 \right) \times$$

$$\left(\frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}} \right) \left(\frac{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}} - 1 \right) \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = \frac{\text{جنرنا} - \text{جنرنگ}}{1 - \text{جنرنگ}}$$

اور

$$x \left(\frac{r^2 - 1}{r^2 + r + 1} - 1 \right) \dots \dots \dots (\text{یولر})$$

۳۱- ثابت کرو کہ جب 'ن طاق ہو تو

$$\frac{1}{4} = \frac{\pi^2 (1-n)}{n^2} + \dots + \frac{\pi^2}{n^2} + \frac{\pi^2}{n^2}$$

$$\frac{1}{9} = \frac{\pi^2 (1-n)}{n^2} + \dots + \frac{\pi^2}{n^2} + \frac{\pi^2}{n^2}$$

$$x (n^2 - n + 13)$$

۳۲- ثابت کرو کہ لاستناهی حاصل ضرب

$$\dots \dots \left(\frac{n^2}{n^2} + 1 \right) \left(\frac{n^2}{n^2} + 1 \right) \left(\frac{n^2}{n^2} + 1 \right)$$

$$= \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \prod_{i=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n^i}) \quad (\text{جمر } \pi \text{ عہ لا جم } \pi \text{ بہ لا}) \text{ اگر حقیقت}$$

$$= \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \prod_{i=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n^i}) \quad (\text{جمر } \pi \text{ عہ لا جم } \pi \text{ بہ لا}) \text{ اگر طاق اور}$$

جہاں 'عہ' بر علی الترتیب جب $\frac{\pi}{n}$ جم $\frac{\pi}{n}$ کو بقیہ کرتے ہیں اور ر ایک طاق عدد ہے۔
(گلیشیر)

۳۳- ثابت کرو کہ لاستناهی حاصل ضرب

$$\dots \dots \left(\frac{n^2}{n^2} + 1 \right) \left(\frac{n^2}{n^2} + 1 \right) \left(\frac{n^2}{n^2} + 1 \right)$$

$$= \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \prod_{i=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n^i}) \quad (\text{جمر } \pi \text{ عہ لا جم } \pi \text{ بہ لا})$$

اگر ن جفت ہے اور

$$\frac{1}{\frac{n}{2} \cdot \frac{n-1}{2}} = \text{جنر } \pi \text{ لا } \pi^{1-n} \cdot (\text{جم } \pi \text{ لا} - \text{جم } \pi \text{ ب} \text{ لا})$$

اگر ن طاق ہے۔ ع اور ب کا وہی مفہوم لیا جائے جو سوال مابقی میں تھا۔
(گلشیر)

۳۴۔ ثابت کرو کہ

$$\dots + \frac{1}{\frac{n}{2} + \frac{n-1}{2}} + \frac{1}{\frac{n}{2} + \frac{n-2}{2}} + \frac{1}{\frac{n}{2} + \frac{n-3}{2}} + \dots$$

$$\frac{1}{\frac{n}{2}} - \frac{1-n}{1} \cdot \frac{\pi}{\text{جنر } \pi \text{ لا} - \text{جم } \pi \text{ ب} \text{ لا}} = \frac{\pi}{\text{جنر } \pi \text{ لا} - \text{جم } \pi \text{ ب} \text{ لا}}$$

جہاں ع اور ب کے وہی معنی ہیں جو پچھلے سوال میں تھے۔ (گلشیر)
۳۵۔ ثابت کرو کہ

$$\left\{ \frac{\text{لا} + \text{ب} + \text{ما}}{\text{لا}^2 + \text{ما}^2} + \dots \right\}_{r=1}^{\infty} = \frac{\text{لا} + \text{ب} + \text{ما}}{\text{لا}^2 + \text{ما}^2} + \frac{\text{لا} + \text{ب} + \text{ما}}{\text{لا}^2 + \text{ما}^2} + \dots$$

$$\left\{ \frac{\text{لا} + \text{ب} - \text{ما}}{\text{لا}^2 - \text{ما}^2} + \dots \right\}_{r=1}^{\infty} = \frac{\text{لا} + \text{ب} - \text{ما}}{\text{لا}^2 - \text{ما}^2} + \frac{\text{لا} + \text{ب} - \text{ما}}{\text{لا}^2 - \text{ما}^2} + \dots$$

$$\pi = \text{جب } \pi \left(\frac{\text{لا} + \text{ب} + \text{ما}}{\text{لا}^2 + \text{ما}^2} \right) \setminus \left\{ \text{جنر } \pi \left(\frac{\text{لا} - \text{ب} - \text{ما}}{\text{لا}^2 - \text{ما}^2} \right) \right\}$$

$$- \text{جم } \pi \left(\frac{\text{لا} + \text{ب} + \text{ما}}{\text{لا}^2 + \text{ما}^2} \right)$$



(374)

اٹھارواں باب

سلسل کسیریں

II کے غیر منطوق ہونی کا ثبوت

۲-۳۔ فرض کرو کہ مستحق سلسل

$$1 - \frac{1}{ج \times 1} + \frac{1}{ج \times 2 \times 1} - \frac{1}{ج \times 3 \times 2 \times 1} + \dots$$

ف (ج) سے تعبیر ہوتا ہے تب

$$ف (ج) - (1 + ج) = \frac{1}{ج (1 + ج)} ف (2 + ج)$$

$$اس لئے \frac{ف (ج)}{ف (1 + ج)} = 1 - \frac{1}{ج (1 + ج)} ف (2 + ج)$$

پس ف (1 + ج) | ف (ج) کو دوسری جماعت کی سلسل کسر

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{ج (1 + ج)} + \frac{1}{ج (1 + ج) (2 + ج)} - \frac{1}{ج (1 + ج) (2 + ج) (3 + ج)} + \dots$$

کے طور پر بیان کیا جاسکتا ہے۔
فرض کرو کہ ج = $\frac{1}{p}$ اور لا کی بجائے $\frac{1}{p}$ لاکھ تو سلسلہ ف (ج) ہو جائے

$$1 - \frac{1}{2 \times 3 \times 4 \times 5} + \frac{1}{2 \times 3} - \dots$$

= حجم لا

اور ف (ج+۱) جب لا ہو جاتا ہے۔ پس

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

یہ سلسل لا کے لئے دوسری جماعت کی ایک سلسل کسری ہے۔
۴۰۴۔ ۴۰۵۔ لیبرٹ کا وہ ثبوت ہے جو π کے غیر منطوق ہونے کے
منطوق ہے محصلہ بالا سلسل کسری پر منحصر ہے۔ رکھو لا = $\frac{1}{\pi}$

اور بفرض امکان رکھو $\frac{1}{\pi} = \frac{m}{n}$ جہاں m اور n صحیح عدد ہیں۔

$$1 = \frac{m}{n} - \frac{m^2}{n^3} + \frac{m^3}{n^5} - \dots$$

اب چونکہ کسی خاص رقم کے بعد کسروں $\frac{m}{n}$ ، $\frac{m^2}{n^3}$ ، $\frac{m^3}{n^5}$ ، ... (375)

کے نسبت نامشمار کنندوں کی بہ نسبت ایک ایسے عدد سے بڑے ہیں
جو ایک سے بڑا ہے اس لئے ایک مشہور مسئلہ کی رو سے
مساوات کی بائیں جانب کی سلسل کسری ایک غیر منطوق انتہا رکھتی
ہے اور اس لئے ایک کے مساوی نہیں ہو سکتی۔ پس $\frac{1}{\pi}$ کسری
کے مساوی نہیں ہو سکتا جبکہ m اور n صحیح عدد ہوں اور
اس لئے π غیر منطوق ہے۔ بلاشبہ یہ نتیجہ دفعہ (۲۵۱) کے نتیجہ تر

نے ۱۸۷۶ء میں برلن اکاڈمی کی یادداشت میں شائع ہوا۔

۲۵ دیکھو راسل کا الجبرا جلد دوم صفحہ (۴۸۴)۔

مسئلہ میں شامل ہے جو یہ ہے کہ Π ایک علوی عدد ہے۔

دو علوی ہندسی سلسلوں کے خارج قسمت کا استعمال

$$۳۰۴ - \text{کسر فا (ع، ب، جہ، ا، لا)} + \text{جہ، ا، لا} \backslash \text{فا (ع، ب، جہ، ا، لا)}$$

کو جس میں فا (ع، ب، جہ، ا، لا) علوی ہندسی سلسلہ

$$1 + \frac{\text{ع} \times \text{جہ}}{\text{ا} \times \text{ب}} + \frac{\text{ع} \times \text{جہ} \times (1 + \frac{\text{ع}}{\text{ا}})}{\text{ا} \times \text{ب} \times (1 + \frac{\text{ع}}{\text{ا}})} + \dots$$

کو تبخیر کرتا ہے مسلسل کسر

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{1} + \frac{1}{1} - \frac{1}{1} + \dots$$

میں تحویل کر سکتے ہیں جہاں

$$\frac{\text{ع} - (\text{جہ} - \text{ب})}{\text{جہ} - (\text{ا} + \text{ع})} = \frac{\text{ا} - (\text{جہ} - \text{ب})}{\text{جہ} - (\text{ا} + \text{ع})}$$

$$\frac{\text{ا} - (\text{جہ} - \text{ب})}{\text{جہ} - (\text{ا} + \text{ع})} = \frac{\text{ا} - (\text{جہ} - \text{ب})}{\text{جہ} - (\text{ا} + \text{ع})}$$

$$\dots, \frac{\text{ا} - (\text{جہ} - \text{ب})}{\text{جہ} - (\text{ا} + \text{ع})} = \frac{\text{ا} - (\text{جہ} - \text{ب})}{\text{جہ} - (\text{ا} + \text{ع})}$$

$$\frac{\text{ا} - (\text{جہ} - \text{ب})}{\text{جہ} - (\text{ا} + \text{ع})} = \frac{\text{ا} - (\text{جہ} - \text{ب})}{\text{جہ} - (\text{ا} + \text{ع})}$$

$$\frac{\text{ا} - (\text{جہ} - \text{ب})}{\text{جہ} - (\text{ا} + \text{ع})} = \frac{\text{ا} - (\text{جہ} - \text{ب})}{\text{جہ} - (\text{ا} + \text{ع})}$$

اس استعمال کا فائدہ تمثیل ذیل سے ظاہر ہوگا۔ سلسلہ

$$n = \text{جب } n \text{ م } n \left\{ 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{3^2} + \frac{8}{3^3} + \dots \right\}$$

و او، شایطانیہ یا لامیں رکھو $e = (a)^b = c$ ، یہ $= \frac{1}{b}$ ، لاء جب a تو

$$\frac{243}{545} \text{ جیاد } \frac{241}{543} \text{ جیاد } \frac{241}{341} \text{ جیاد } \frac{241}{341} \text{ جیاد } = 1$$

اس کے دوسرے مستحق سے فقہ کیلئے اسنیلیس (Snellius) کا یہ ضابطہ حاصل ہوتا ہے

$$\text{فد} = \frac{\text{حب فده جم فده}}{\frac{3 \text{ حب فده}}{(2 + \text{جم فده})^2}} = \frac{1 - \frac{1}{4} \text{ حب فده}}{(2 + \text{جم فده})^2}$$

یوں لڑکا استحالہ

۳۰۵۔ یوں کے سند

$$\dots \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}}{-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}} \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}{-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} \frac{1}{-1} = \dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

۱۔ بی بی سائیں

$$\dots \frac{1}{\pm 1 \pm 1} \frac{1}{\pm 1 \pm 1} \frac{1}{\pm 1} = \dots \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}$$

یہ بھی لکھا جا سکتا ہے دیگر سلسلے مستحیل ہو سکتے ہیں۔

اس طریقہ کی مثال یہ ہے کہ مسئلہ

$$\frac{\pi}{n} \text{ مم } \frac{m}{n} = \frac{1}{m} - \frac{1}{n-m} + \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n-m} + \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n-m} + \dots$$

$$\frac{\pi}{n} \text{ مم } \frac{m}{n} = \frac{1}{m} - \frac{1}{n-m} + \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n-m} + \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n-m} + \dots$$

حاصل کیا جا سکتا ہے۔

اٹھارویں باب پرتالیں

اسئلہ (۱) تا (۱۳) میں مندرجہ مسئلوں کی تحقیق کرو۔

$$1 - \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-3} + \dots$$

$$2 - \text{مس } n \text{ لا} = \frac{n}{n-1} - \frac{(n-1)}{n-2} + \frac{(n-2)}{n-3} - \frac{(n-3)}{n-4} + \dots$$

$$\dots \frac{(n-9)}{n-10} - \frac{(n-10)}{n-11} + \dots$$

جہاں لا > $\frac{1}{n}$ اور ن پر کوئی قید نہیں ہے۔

$$3 - \text{مس } n \text{ لا} = \frac{n}{n-1} - \frac{(n-1)}{n-2} + \frac{(n-2)}{n-3} - \frac{(n-3)}{n-4} + \dots$$

$$\dots \frac{(n-12)}{n-13} - \frac{(n-13)}{n-14} + \dots$$

متفرق مثالیں

(378)

۱۔ ثابت کرو کہ

$$\text{جم م لا۔ جم م ع} = \frac{\text{جم م لا۔ جم م ع}}{\text{جم لا۔ جم ع}}$$

$$+ \dots + \text{جم م لا۔ جم م ع} \quad \text{(ہرمانٹ)}$$

جہاں م ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

۲۔ اگر م اور ن مثبت صحیح عدد ہوں اور ع = $\frac{1}{n}$ تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جم م لا}}{\text{جم ن لا}} = \frac{1}{n} \quad \text{جب م لا۔ جم م ع} \quad \text{(۱۔) جب م ع مم لا۔ ع}$$

اور نیز یہ بخطے

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n} \quad \text{(۱۔) جب م ع مم لا۔ ع}$$

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n} \quad \text{(۱۔) جب م ع قم لا۔ ع}$$

یا بموجب اسکے کہ م + ن جفت یا طاق ہو۔
۳۔ ثابت کرو کہ

$$\text{مم (لا۔ ع) مم (لا۔ بی) ... مم (لا۔ لہ)} = \text{جم} \frac{1}{n} + \pi \quad \text{(مم لا۔ ع)}$$

جہاں $\pi = \text{مم (ع۔ بی) مم (ع۔ جی) ... مم (ع۔ لہ)}$
(ہرمانٹ)

۴۔ اگر (ب، ج) ایک مثلث کے زاوے ہوں اور لا، ما، ی وہ حقیقی مقداریں جو مساواتوں

محرلا (جب ب جب ج) $\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ جم $\frac{1}{4}$ ()

جزءا (جب ج جب ۱) = $\frac{1}{7}$ جم $\frac{1}{7}$ ب

جزی (جب ا جب ب) = $\frac{1}{2}$ جم = $\frac{1}{4}$ ج

جزری (جب ا جب ب) $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ جم $\frac{1}{2}$ ج
سے حاصل ہوئی ہیں تو ثابت کرو کہ کوئی تین نقطے جو اس طور واقع
ہوں کہ ان میں سے دو کے درمیان فاصلے علی الترتیب لا، ما، ی کے
متناسب ہیں ایک خط مستقیم پر واقع ہوتے ہیں۔

۵۔ اگر $\frac{1}{p} < \frac{1}{q}$ ، تو ثابت کرو کہ

مس $\frac{1}{r_{u+1}} < \frac{1}{r_u + u + 1}$ اور $\frac{1}{r_{u+u-1}} >$

۶۔ ثابت کرو کہ

$\frac{\pi}{n}$

اُس بڑے سے بڑے صحیح عدد کے مساوی ہے جو $\frac{1}{n}$ میں ہے۔
۷۔ ثابت کرو کہ

(379)

$$+ \frac{2b^2}{2b^3 + (b^2 + 1)^2} \text{ مستقیم} + \frac{2b^2}{2b^3 + (b^2 + 1)^2} \text{ مستقیم}$$

$$\frac{\text{مستأج}^1}{\text{دفعه}^1 + \text{دفعه}^2 + \text{دفعه}^3 + \dots} = \frac{\text{مستأج}^1}{\text{دفعه}^3 + [\text{دفعه}^2(1 - \text{نرخه}) + \text{دفعه}^1]}$$

اور اسلئے ثنابت کرو کہ لامتناہی سلسلہ

$$م^1 (1 + \frac{2}{3}) + م^2 (2 + \frac{3}{4}) + م^3 (3 + \frac{4}{5}) + \dots$$

کا مجموعہ $م^1 \frac{1}{6}$ ہے۔

۸۔ اگر مس قطب + مس ب قط = مس ج
تو ثابت کرو کہ مس قطب + مس ب قطب + مس ج قط ج
+ مس اس ب مس ج = ۱۰

اس نتیجہ اور معلومہ مسئلہ

جب ا ب م + ا جب ب ج م + ا جب ج م ج۔ جب ا ب ج جب ج۔

کے درمیان جو تعلق ہے اسے معلوم کرو جہاں 'ا' ب' ج ایک
ثلث کے زاویے ہیں۔

۹۔ اگر م اور ن کوئی عدد ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\left\{ 1 - \frac{n(n+1)}{(m+n)(m+n+1)} \right\} \frac{1}{2}$$

$$+ \left\{ \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{(m+n)(m+n+1)(m+n+2)(m+n+3)} - \frac{1}{2} \right\}$$

$$= (m+n+1) \left\{ \frac{1}{m+n} - \frac{1}{m+n+1} \right\} =$$

$$n(n+1)(n+2)(n+3) \left\{ \frac{1}{(m+n)(m+n+1)(m+n+2)(m+n+3)} - \frac{1}{2} \right\} + \dots$$

۱۰۔ ثابت کرو کہ

ا	جم ع	جم (ع + ب)	جم (ع + ب + ج)	جم (ع + ب + ج + د)
جم ع	ا	جم ب	جم (ب + ج)	جم (ب + ج + د)
جم (ع + ب)	جم ب	ا	جم ج	جم (ج + د)
جم (ع + ب + ج)	جم (ب + ج)	جم ج	ا	جم د
جم (ع + ب + ج + د)	جم (ب + ج + د)	جم (ج + د)	جم د	ا

۱۱- ثابت کرو کہ مقطع

ا	جم ا	جب ا	جم (ا + ب)
ا	جم ب	جب ب	جم (ب + ج)
ا	جم ج	جب ج	جم (ج + د)
ا	جم د	جب د	جم (د + ا)

$$= م [ح جب (ا + ب + ج + د)] \{ ا جب ا \frac{1}{4} (ب - ا) \}$$

جہاں م کوئی عددی جزو ضربی ہے اور مں = $\frac{1}{4} (ا + ب + ج + د)$ اگر

جم (ا - ب - ج - د) + جم (ب - ج - د - ا) + جم (ج - د - ا - ب) + جم (د - ا - ب - ج) =

اور لا، ما، ی میں سے کوئی دو مساوی نہ ہوں یا کسی دو میں π کے نصف کا فرق نہ ہو تو

۱۳- اگر منفر اور π کے درمیان طہ کی دو قیمتیں جہ اور ضہ ہوں جو مساوات

جب طہ جم (ع + ب) + جب طہ جم (ب + ج) + جب طہ جم (ج + د) + جب طہ جم (د + ا) = کو پورا کرتی ہیں تو ثابت کرو کہ عہ اور بہ اس مساوات

جب ۲ فہ جم (جہ + ضہ) + جب ۲ جہ جم (ضہ + فہ) + جب ۲ ضہ جم (جہ

۰ = (فہ +

کو پورا کرتے ہیں۔

۱۴۔ اگر مس طہ کی تین محصلہ قیمتیں مس ع، مس ی، مس جہ

ہوں جبکہ مس طہ دیا گیا ہو تو ثابت کرو کہ

(۱) جم ع جم ی جم جہ جب (ع + ی + جہ) + جب ع جب ی جب جہ جم (ع

۰ = (جہ +

(۲) جب (یہ + جہ) جب (جہ + ع) جب (ع + ی)

= جب ۲ ع جب ۲ ی جب ۲ جہ

۱۵۔ ثابت کرو کہ

ج جب (یہ - جہ) جم جہ + ع جم ع + ی جب ۲ ع + ی + جہ ۲ + ع ۲ + ی ۲ + جہ ۲

ج جب (یہ - جہ) جم جہ + ع جم ع + ی جب ۲ ع + ی + جہ ۲ + ع ۲ + ی ۲ + جہ ۲

= جب ۲ (ع + ی + جہ) + ج جب ۲ (ع + ی + جہ)

جم ۲ (ع + ی + جہ) + ج ۰ ج ۲ (ع + ی + جہ)

جہاں عل جمع ج اُس مجموعہ کو تغییر کرتا ہے جو زادیوں ع، ی، جہ

کے باہمی دائری تبادلہ سے بنتا ہے۔

۱۶۔ ثابت کرو کہ اگر

$$x = 1 + \frac{2 \text{ جم } ط}{+1} + \frac{2 \text{ جم } ط}{+1} + \frac{2 \text{ جم } ط}{+1} + \dots$$

مستقل ہے۔
۲۰۔ اگر لا حقیقی ہو اور $1 < لا < ۲$ ۔ اور اگر مسن ای سے
مراد وہ کم سے کم مثبت زاویہ ہو جسکا ماس ی ہے تو ثابت کرو کہ

(381)

$$\frac{1}{\cos \frac{A}{2}} = \frac{1}{\cos \frac{A}{2}} = \frac{1}{\cos \frac{A}{2}} = \frac{1}{\cos \frac{A}{2}}$$

۲۱۔ اگر مثلث ا ب ج کے باہمی دائروں کے مرکزوں میں
سے گزرنیوالے دائرہ پر کوئی نقطہ ف ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} = \frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}$$

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} = \frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}$$

۲۲۔ اگر $\sin A = \sin B + \sin C$ جہاں ا اور ب
ن پر منحصر نہیں ہیں تو ہندسی طور پر ثابت کرو کہ

$$\sin A = \sin B + \sin C$$

ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} = \frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}$$

۲۳۔ اگر مثلث کی مہم صورت میں جبکہ ا ب ا دے گئے ہوں

بیرونی دائرے کے مرکز، مرکز ہندسی، نقطہ لا کے مرکز، اور مرکز عمودی
کے دو محل علی الترتیب و ا، ب، ث، ث، ن، ن، ع، ح، ہوں تو ثابت کرو کہ

اس کے زاویوں کے ماس علی الترتیب

$$۲ \text{ جم } \frac{۱}{۲} (۱ + \text{جم } \frac{۱}{۲} \text{ ب} + \text{جم } \frac{۱}{۲} \text{ ج} - \text{جب } \frac{۱}{۲} \text{ ب} - \text{جب } \frac{۱}{۲} \text{ ج} - ۲)$$

$$۱ - \text{جم } \frac{۱}{۲} \text{ ب} - \text{جم } \frac{۱}{۲} \text{ ج} + \text{جب } \frac{۱}{۲} \text{ ب} + \text{جب } \frac{۱}{۲} \text{ ج}$$

اور دو متشابه جلوں کے مساوی ہیں۔

۳۰۔ اگر لایک صحیح عدد نہ ہو تو ثابت کرو کہ سلسلہ

$$Z = \frac{۲(۲+م+ن)}{۲(۲+ن)}$$

جس میں م اور ن کو ہر ممکن طریقہ سے غیر مساوی قیمتیں (جو ع اور ع کے درمیان صفر یا صحیح عدد ہوں) دی گئی ہیں معدوم ہوتا ہے جبکہ ع کو لا انتہا بڑھا دیا جائے۔

۳۱۔ ثابت کرو کہ جب ط جم ط کو اس شکل

$$۱ \text{ جم } (م+ن) ط + ۱ \text{ جم } (م+ن-۲) ط + ۱ \text{ جم } (م+ن-۴) ط + \dots$$

میں پھیلا یا جاسکتا ہے جہاں م اور ن مثبت صحیح عدد ہیں۔
نیز ثابت کرو کہ

$$(۲+ف) \frac{۱}{۲} + (م-ن) \frac{۱}{۲} + (م+ن-ف) \frac{۱}{۲} = ۰$$

سوائے سلسلہ کی آخری رقموں کی صورت کے جبکہ م اور ن دونوں

جفت ہوتے ہیں۔

۳۲۔ ایک دائرہ کے محیط کو جسکا مرکز ہے ن مساوی حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے اور ق کوئی اندرونی

نقطہ ہے۔ ثابت کرو کہ

سرف ق و + سرف ق و + ...

+ ... سرف ق و = ن سرف ق و

جہاں ف، دائرہ پر ایک نقطہ ہے ایسا کہ ق و ف = ن

x ق و ف، اور ق و پر ق ایک نقطہ ہے ایسا کہ (اگر میں

ق س، ق س، دائرہ کو س، س میں قطع کریں) ق و س = ن x

ق و س۔

۳۳ - اگر م، م، ...، م، م وہ صحیح عدد ہوں جو م سے

(882)

چھٹے اور اس کے لحاظ سے مفرد ہیں اور اگر م کے مختلف

مفرد اجزائے ضربی ف، ف، ف، ... ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جب } \pi^{\frac{m}{2}} \times \text{جب } \pi^{\frac{m}{2}} \times \text{جب } \pi^{\frac{m}{2}}}{\text{جب } \pi^{\frac{m}{2}} \times \text{جب } \pi^{\frac{m}{2}} \times \text{جب } \pi^{\frac{m}{2}}} = \left(\frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{m} + \pi \right)$$

$$\frac{\text{جب } \pi^{\frac{m}{2}} \times \text{جب } \pi^{\frac{m}{2}} \times \text{جب } \pi^{\frac{m}{2}}}{\text{جب } \pi^{\frac{m}{2}} \times \text{جب } \pi^{\frac{m}{2}} \times \text{جب } \pi^{\frac{m}{2}}} = \left(\frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{m} + \pi \right)$$

۳۴ - ف، ق، ر کی سب مثبت صحیح عددی قیمتوں کے لئے جو

ہیں ایسی کہ ف + ق + ر = س جبکہ س ≤ ۳ ثابت کرو کہ

ماہل ضربوں جب ف ع جب ق (ع + $\frac{\pi^2}{3}$) جب ر (ع + $\frac{\pi^2}{3}$)

کا مجموعہ صفر ہے سوائے اس صورت کے جبکہ س = ۳ کا ضعف ہو اور

یہ مجموعہ - $\frac{1}{p}$ جب s عد ہے جیکہ s کا ایک ضعف ہو -
۳۵ - اگر $\frac{1}{p} = ms$ تو ثابت کرو کہ

$$ms = \frac{1}{p} \left\{ 1 - \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} - \frac{1}{m^3} + \frac{1}{m^4} - \dots \right\}$$

$$\text{جب } p = \frac{1}{m} \left\{ 1 - \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} - \frac{1}{m^3} + \frac{1}{m^4} - \dots \right\}$$

$$p = \frac{1}{m} \left\{ 1 - \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} - \frac{1}{m^3} + \frac{1}{m^4} - \dots \right\}$$

یہ

$$\frac{۴۸۶}{۹۲}$$

اصطلاحات علم مثلث مستوی

Absolutely convergent	مطلقاً مستدق
Ambiguity of sign	علامت کا ابہام
Ambiguous sign	بہم علامت
Analytical	تحلیلی
Argument	ولیل، وجہ
Base	اساس، قاعدہ
Centroid	مرکز ہندسی
Circle of convergence	استدقاق کا دائرہ
Circular functions	دائری تفاعل
Circular measure	دائری ناپ
Circum-circle	حائط دائرہ بیرونی دائرہ
Circumscribed polygon	حائط کثیر الاضلاع
Complex number	ملقف عدد
Complex variable	ملقف متغیر
Conditionally convergent	مشروطاً مستدق
Continuous functions	مسلسل تفاعل

Convergence	استدقاق
Coterminal angles	هم اختتامی زاوے
Depression (angle of)	(زاویہ) نشیب
Doubly periodic	دو دوری
Elevation	ارتفاع
Escribed circles	جانبی دائرے
Even functions	جفت تفاعل
Exponential functions	قوت نمائی تفاعل
Exponential series	قوت نمائی سلسلہ
External bisectors	خارجی ناصف
Generalized logarithms	تعمیمی لوکارتم
Grades	مرتبے
Hyperbolic functions	زائدی تفاعل
Hyperbolic cosine (cosh)	زائدی جیب التمام (جمنز)
Hyperbolic sine (sinh)	زائدی جیب (جمنز)
Hyperbolic tangent (tanh)	زائدی تماس (منز)
Hyperbolic cotangent (coth)	زائدی تماس التمام (جمنز)
Hyperbolic secant (sech)	زائدی قاطع (قطر)
Hyperbolic cosecant (cosech)	زائدی قاطع التمام (قمنز)
Hypergeometric series	علوی ہندسی سلسلہ
Identity	متماثلہ
In-circle	اندرونی دائرہ
Inequality	لا تساوی
Infinite products	لامتناہی حاصل ضرب
Infinite series	لامتناہی سلسلہ

Inscribed polygon	اندرونی کثیرالاضلاع
Integral values	صحیح عددی قیمتیں
Internal bisectors	اندرونی ناصف
Inverse circular functions	مقلوب دائری تفاعل
Irrational	غیر منطوق
Lateral	جانبی
Limit	انتہا
Limits	حدود
Maximum	اعظم
Minimum	اقل
Minute	دقیقہ
Modulus	مقیاس
Multiple angles	ضعفی زاوے
Natural circular functions	طبعی دائری تفاعل
Natural logarithms	طبعی لوکارتم
Necessary and sufficient condition	ضروری اور کافی شرط
Nine-point circle	نو نقطی دائرہ
Oblique-angled triangle	غیر قائم الزاویہ مثلث
Odd functions	طاق تفاعل
Orthocentre	مرکز عمودی
Parallelepiped	متوازی السطوح
Partial fractions	جزوی کسور
Pedal line	خط پائین
Pedal triangle	مثلث پائین
Period	دور

Periodicity	دوریت
Porismatic systems	استنباطی نظام
Principal value	صدر قیمت
Projection	نظل
Quadrature of the circle	دائرہ کی ترجیح
Radian	نیم قطری
Radius of convergence	استدقاق کا نصف قطر
Radius vector	سمتی نیم قطر
Real variable	حقیقی متغیر
Regular polygon	منظم کثیر الاضلاع
Second	ثانیہ
Sector	قطاع
Sequence	تواتر
Semi-convergent	نیم مستدق
Sexagesimal system	ستینی نظام
Singly periodic	یک دوری
Submultiple angles	تحت ضعیفی زاوے
Sum-functions	مجموعہ تفاعل
Symmetrical functions	متشاکل تفاعل
Transcendental number	علوی عدد
Trigonometrical functions	مثلثی تفاعل
Uniform convergence	یکساں استدقاق

